ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ И ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 124

УДК 519.68

ИНТЕНСИОНАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ f_A-ПРОСТРАНСТВ ЕРШОВА

Г.К.Абдрахманова

Введение

Разрабатывая теорию нумераций, Ю.Л.Ершов [2] ввел понятие f-пространств, являющихся топологическим представлением важнейших свойств вычислимости. В дальнейшем оказалось, что в терминах f-пространств Ершова удовлетворительно может быть описана и денотационная семантика языков программирования высокого уровня. Скотт [4] нашел представление f-пространств через так называемые информационные системы. В некоторых ситуациях описание семантики в этих интенсиональных терминах оказывается более удобным и естественным.

В связи с развитием Σ-программирования для описания денотационной семантики языка Σ-выражений понадобилось введение понятия f_A-пространства [3] над допустимым множеством A (см. [1]). Построенные в [5] конструкции $\mathbb{A}_\tau$, $\tau \in PT$, для описания денотационной семантики языка Σ-выражений имеют естественную структуру полных f_A-пространств. Поэтому вполне естественно возникает задача интенсионального описания полных f_A-пространств, решению которой посвящена данная работа.

На протяжении всей статьи рассматриваем некоторое фиксированное допустимое множество $\mathbb{A} = (A; \in, \ldots)$, $\mathbb{A} \models KPU$ (см.[1]).

§I. L_A-системы*)

I.I. Определение и элементарные свойства L_A-систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I.I. Тройку $K = \langle D_K, Con_K, \vdash_K \rangle$ назовем L_A-*системой* над допустимым множеством A, если

I) $D_K \subseteq A$, D_K – Σ-множество, $D_K \neq \emptyset$;

2) $Con_K \subseteq D_K^* \rightleftharpoons \{c \subseteq D_K \mid c \in A\}$ и Con_K – Σ-множество;

3) $\vdash_K \subseteq D_K^* \times D_K$, $\vdash_K$ – Σ-множество, и выполняются следующие аксиомы: $\forall a, b \in D_K^*$ и $\forall d, p \in D_K$

e1: $\{d\} \in Con_K$;

e2: $b \in Con_K$, $a \subseteq b$, $a \neq \emptyset \to a \in Con_K$;

e3: $d \in b$, $b \in Con_K \to b \vdash_K d$;

e4: $\forall d \in a.\ b \vdash_K d$, $b \in Con_K \to b \cup a \in Con_K$;

e5: $\forall d \in a.\ b \vdash_K d$, $a \vdash_K p \to b \vdash_K p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. $Con_K \neq \emptyset$.

Для $a, b \in D_K^*$ условимся писать $b \vdash_K a$, если $\forall d \in a.\ b \vdash_K d$.

Непосредственно из аксиом вытекают следующие элементарные свойства.

ЛЕММА I.I.2. Для любых $a, b, c, a', b' \in D_K^*$ справедливы утверждения:

а) $a \vdash_K b$, $b \vdash_K c \to a \vdash_K c$;

б) $a \subseteq a'$, $a' \in Con_K$, $a \vdash_K b$, $b' \subseteq b \to a' \vdash_K b'$;

в) $a \vdash_K b$, $a \vdash_K b' \to a \vdash_K b \cup b'$.

Отметим естественную интерпретацию понятия L_A-системы как некого аналога понятия "выводимости": множество D_K представляет собой "эффективно" определяемое множество формул, под Con_K понимаем тоже эффективно определяемое множество непротиворечивых множеств формул из D_K, а отношение $\vdash_K$ является отношением "выводимости".

---

*) Термин "L-системы" ввел Д.И.Свириденко [6] для списочного варианта информационных систем Скотта.

1.2. Денотат L_A-системы.

Пусть $K = \langle D_K, Con_K, \vdash_K \rangle$ – L_A-система.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Непустое Σ-множество $a \subseteq D_K$ назовем элементом L_A-системы, если выполнено следующее условие:

$$\forall d \in D_K \quad \forall c \in a^* (\leftrightharpoons \{c \subseteq a \mid c \in A\}) \ c \in Con_K \ \& \ (c \vdash_K d \to d \in a).$$

Таким образом, в нашей интерпретации любое A-конечное подмножество элемента является непротиворечивым, и элемент замкнут относительно выводимости.

Пусть $b \in Con_K$. Рассмотрим его замыкание относительно отношения $\vdash_K$: $[b] \leftrightharpoons \{d \in D_K \mid b \vdash_K d\}$.

ЛЕММА 1.2.2. 1) Замыкание $[b]$ является элементом L_A-системы; 2) для элемента L_A-системы a выполняется равенство $a = \cup\{[b] \mid b \in a^*\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. П.1) непосредственно следует из аксиом e4 и e5. Для п.2) очевидно, что $\cup\{[b] \mid b \in a^*\} \subseteq a$. Для $d \in a$ достаточно рассмотреть $b = \{d\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.3. Множество всех элементов L_A-системы K назовем денотатом L_A-системы K.

Обозначим через $[\![K]\!]$ денотат L_A-системы K, через K_0 – множество всех замыканий элементов Con_K. На $[\![K]\!]$ рассмотрим естественный порядок $\subseteq$.

Отметим следующие свойства $[\![K]\!], K_0$.

ЛЕММА 1.2.4. 1) Если $c, b \in Con_K$ и $c \subseteq b$, то $[c] \subseteq [b]$; 2) если $c, b \in Con_K$ и существует $a \in [\![K]\!]$ такой, что $[c] \subseteq a$ и $[b] \subseteq a$, то $c \cup b \in Con_K$ и $[c \cup b]$ – точная верхняя грань $\{[c],[b]\}$ в $([\![K]\!], \subseteq)$; 3) если $a, a' \in [\![K]\!]$ и $a \not\subseteq a'$, то существует $a_0 \in K_0$ такой, что $a_0 \subseteq a$ и $a_0 \not\subseteq a'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. П.1) тривиален (по аксиомам e3, e5). П.2) Заметим, что $c \cup b \in a^*$. Следовательно, $c \cup b \in Con_K$. Легко убедиться, что $[c \cup b]$ есть точная верхняя грань $\{[c], [b]\}$ в $([\![K]\!], \subseteq)$. П.3) По условию, $\exists d (d \in a \ \& \ d \notin a')$. Легко понять, что $a_0 = [\{d\}]$ – искомый элемент.

ЛЕММА 1.2.5. Тройка $\langle [\![K]\!], K_0, \subseteq \rangle$ является f-пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой Ершова [2], из которой следует, что для выполнения утверждения леммы необходимы и достаточны следующие условия:

1) $\mathbb{K}_0 \subseteq [K]$;

2) $\subseteq$ - частичный порядок на $[K]$;

3) если $c_0, b_0 \in \mathbb{K}_0$ и $\exists a \in [K]$ такой, что $c_0, b_0 \subseteq a$, то $\exists a_0 \in \mathbb{K}_0$ такой, что $a_0 = \sqcup\{c_0, b_0\}$ - точная верхняя грань $\{c_0, b_0\}$ в $([K], \subseteq)$;

4) для любого $a \in [K]$ существует $a_0 \in \mathbb{K}_0$ такой, что $a_0 \subseteq a$;

5) если $a, a' \in [K]$ и $a \nsubseteq a'$, то $\exists a_0 \in \mathbb{K}_0$ такой, что $a_0 \subseteq a$ и $a_0 \nsubseteq a'$.

Выполнение этих условий непосредственно вытекает из лемм I.2.2 и I.2.4.

Рассмотрим нумерацию $\nu\colon Con_K \to \mathbb{K}_0$. Для $b \in Con_K$ полагаем $\nu b \leftrightharpoons [b]$. Очевидно, что ν является отображением "на".

ЛЕММА I.2.6. Нумерация ν является A-допустимой для f-пространства $\langle [K], \mathbb{K}_0, \subseteq \rangle$, т.е. выполняются следующие условия [3]:

1) $\forall c \in Con_K^*$ если $\exists a \in [K]$ такой, что $\forall b \in c$ $\nu b \subseteq a$, то $\nu c \leftrightharpoons \{\nu b \mid b \in c\}$ имеет в $([K], \subseteq)$ точную верхнюю грань $\sqcup \nu c \in \mathbb{K}_0$;

2) пусть $Con_{[K],\nu} \leftrightharpoons \{c \in Con_K^* \mid \exists a \in [K].\ \forall b \in c.\ \nu b \subseteq a\}$, тогда $L \leftrightharpoons \{\langle c, b \rangle \mid c \in Con_{[K],\nu},\ b \in Con_K,\ \nu b = \sqcup \nu c\}$ является Σ-множеством;

3) для каждого $a \in [K]$ множество $C_a \leftrightharpoons \{b \in Con_K \mid \nu b \subseteq a\}$ является Σ-множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Заметим, что $\cup c \in a^*$. Следовательно, $\cup c \in Con_K$. Нетрудно понять, что $\nu \cup c = \sqcup \nu c$. (2) Из предыдущего имеем, что $Con_{[K],\nu} = \{c \in Con_K^* \mid \cup c \in Con_K\}$ и $L = \{\langle c, b \rangle \mid c \in Con_{[K],\nu},\ \nu \cup c = \nu b\}$. Очевидно, что $Con_{[K],\nu}$ и L являются Σ-множествами. (3) Заметим, что $\nu b \subseteq a \leftrightarrow b \subseteq a$.

Из этой леммы вытекает, что денотат L_A-системы является f_A-пространством [3]. Таким образом, $L_0 \leftrightharpoons \{\langle b_0, b_1 \rangle \mid b_0, b_1 \in Con_K,\ \nu b_0 \subseteq \nu b_1\}$ является Σ-множеством, и для каждого $a \in [K]$ множество $C_a \in m_\nu Con_K \leftrightharpoons \{C \subseteq Con_K \mid C$ - Σ-множество, удовлетворяющее следующим условиям:

a1) $C \neq \emptyset$; $\langle b_0, b_1 \rangle \in L_0 \,\&\, b_1 \in C \to b_0 \in C$;

a2) $c \in C^* \to (c \in Con_{[K],\nu} \,\&\, (\langle c, b \rangle \in L \to b \in C))$.

Рассмотрим отображение β: $[K] \to m_\nu Con_K$, заданное как $\beta(a) \leftrightharpoons C_a$, $a \in [K]$.

ЛЕММА I.2.7. Отображение β есть отображение "на", т.е. для любого $C \in m_\nu Con_K$ существует $a \in [K]$ такой, что $C_a = C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C \in m_\nu Con_K$. Рассмотрим $\cup C = \{d \in D_K \mid \exists b \; b \in C \,\&\, d \in b\}$ – непустое Σ-подмножество D_K. Покажем, что $\cup C \in [K]$.

Пусть $c' \in (\cup C)^*$. Очевидно, что $\forall d \in c' \; \exists b$ такое, что $b \in C \,\&\, d \in b$. Заметим, что $b \in C \,\&\, d \in b$ является Σ-формулой. Применив Σ-выборку, получим

$$\exists c\, (\forall d \in c' \; \exists b \in c \;\; b \in C \,\&\, d \in b) \,\&$$
$$\&\, (\forall b \in c \;\; \exists d \in c' \;\; b \in C \,\&\, d \in b).$$

Очевидно, что $c \in C^*$ и $c' \subseteq \cup c$. Из условия a2) имеем $c \in Con_{[K],\nu}$, значит, $\cup c \in Con_K$ и, следовательно, $c' \in Con_K$.

Пусть $c' \vdash_K d$, $d \in D_K$. Так как $\langle c', \cup c \rangle \in L_0$, то $\langle \{d\}, \cup c \rangle \in L_0$. Отсюда получаем $\{d\} \in C$, т.е. $d \in \cup C$.

Нетрудно убедиться, что $\cup C$ и есть искомый элемент, т.е. $\beta(\cup C) = C$.

Из лемм I.2.5, I.2.6, I.2.7 следует

ТЕОРЕМА I.2.8. Денотат L_A-системы K имеет структуру полного f_A-пространства, которая определяется четверкой $\langle [K], K_0, \subseteq, \nu : Con_K \xrightarrow{\text{на}} K_0 \rangle$.

Таким образом, определено отображение $[\cdot]$, ставящее в соответствие L_A-системе ее денотат, являющийся полным f_A-пространством.

I.3. Интенсиональная характеристика полного f_A-пространства.

Пусть $\ast = \langle X, X_0, \leq, \nu : B \xrightarrow{\text{на}} X_0 \rangle$ – полное f_A-пространство. Из определения [3] имеем, что $\langle X, X_0, \leq \rangle$ – f-пространство, $B \subseteq A$ и B является Σ-множеством, а нумерация ν удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall c \in Con_{X,\nu} \leftrightharpoons \{c \in B^* \mid \exists \xi \in X \;\; \forall b \in c$ выполняется $\nu b \leq \xi\}$ множество $\nu c \leftrightharpoons \{\nu b \mid b \in c\}$ имеет в $\langle X, \leq \rangle$ точную верхнюю грань $\bigsqcup \nu c \in X_0$;

2) множество $L \leftrightharpoons \{\langle c, b \rangle \mid c \in Con_{X,\nu} \,\&\, b \in B \,\&\, \nu b = \bigsqcup \nu c\}$ является Σ-множеством;

$K_0 \subseteq \beta(X_0)$, так как для $c \in Con$ существует $b \in B$ такой, что $\nu b = \sqcup \nu c$. Обратное тоже тривиально. Для $b \in B$ $c \leftrightharpoons \{b\} \in Con$ и $\sqcup \nu c = \nu b$.

Таким образом, мы показали, что денотат L_A-системы $K = \langle B, Con, \vdash \rangle$ есть пополнение f_A-пространства $\mathscr{X}$ и, стало быть, доказана следующая

ТЕОРЕМА I.3.3. Для полного f_A-пространства можно указать L_A-систему, денотат которой будет изоморфен данному пространству.

§2. Операции над L_A-системами

2.I. Определение операций $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$ над L_A-системами.

Пусть $K = \langle D_K, Con_K, \vdash_K \rangle$, $N = \langle D_N, Con_N, \vdash_N \rangle$ - L_A-системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I.I. $K \oplus N \leftrightharpoons \langle D_{K+N}, Con_{K+N}, \vdash_{K+N} \rangle$, где

а) $D_{K+N} \leftrightharpoons \{\langle d', 0\rangle \mid d' \in D_K\} \cup \{\langle d'', 1\rangle \mid d'' \in D_N\}$;

б) $$Con_{K+N} \leftrightharpoons \{c \in D^*_{K+N} \mid (pr_0(c) \in Con_K \;\&\; pr_1(c) = \emptyset) \vee \vee (pr_1(c) \in Con_N \;\&\; pr_0(c) = \emptyset)\};$$

в) $$\vdash_{K+N} \leftrightharpoons \{\langle c, d\rangle \mid c \in D^*_{K+N} \;\&\; d \in D_{K+N} \;\&\; ((d = \langle d', 0\rangle \;\&\; \& \; pr_0(c) \vdash_K d') \vee (d = \langle d'', 1\rangle \;\&\; pr_1(c) \vdash_N d''))\},$$

где функции pr_0 и pr_1 определены на D^*_{K+N} следующим образом:

1) $pr_0(c) \leftrightharpoons \{d' \mid \langle d', 0\rangle \in c\}$,

2) $pr_1(c) \leftrightharpoons \{d'' \mid \langle d'', 1\rangle \in c\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I.2. $K \otimes N \leftrightharpoons \langle D_{K\times N}, Con_{K\times N}, \vdash_{K\times N} \rangle$, где

а) $D_{K\times N} \leftrightharpoons D_{K+N}$;

б) $Con_{K\times N} \leftrightharpoons \{c \in D^*_{K\times N} \mid pr_0(c) \in Con_K \;\&\; pr_1(c) \in Con_N\}$;

в) $$\vdash_{K\times N} \leftrightharpoons \{\langle c, d\rangle \mid c \in D^*_{K\times N} \;\&\; d \in D_{K\times N} \;\&\; ((d = \langle d', 0\rangle \;\&\; \& \; pr_0(c) \vdash_K d') \vee (d = \langle d'', 1\rangle \;\&\; pr_1(c) \vdash_N d''))\}.$$

3) для каждого $\xi \in X$ множество $B_\xi \leftrightharpoons \{ b \in B \mid \nu b \le \xi \}$ является Σ-множеством.

Множество $L_0 \leftrightharpoons \{ \langle b_0, b_1 \rangle \mid b_0, b_1 \in B \ \&\ \nu b_0 \le \nu b_1 \}$ является Σ-множеством (см. [3]).

Рассмотрим отображение β, заданное как $\beta(\xi) \leftrightharpoons B_\xi, \xi \in X$. Полнота означает, что $\beta(X) = m_\nu B \leftrightharpoons \{B' \subseteq B \mid B'$ - непустое Σ-множество, удовлетворяющее условиям:

a1) $\langle b_0, b_1 \rangle \in L_0 \ \&\ b_1 \in B' \to b_0 \in B'$;

a2) $c \in (B')^* \to (c \in Con_{X,\nu} \ \&\ (\langle c, b \rangle \in L \to b \in a))\}$.

Четверка $\mathcal{K}^* = \langle m_\nu B, \beta(X_0), \subseteq, \nu^*: B \xrightarrow{\text{на}} \beta(X_0) \rangle$, где для $b \in B$ $\nu^* b \leftrightharpoons \beta(\nu b)$, называется пополнением пространства $\mathcal{K}$ и является полным f_A-пространством. Отображением β осуществляется изоморфизм $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$ (см. [3]).

Рассмотрим тройку $K \leftrightharpoons \langle B, Con, \vdash \rangle$, где $Con \leftrightharpoons Con_{X,\nu}$, $\vdash \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \{ \langle c, b \rangle \mid c \in Con \ \&\ b \in B \ \&\ \nu b \le \bigsqcup \nu c \}$ Заметим, что

$$Con = \{ c \in B^* \mid \exists b \in B \ \&\ \langle c, b \rangle \in L \}$$

и

$$\vdash = \{ \langle c, b \rangle \mid (c \in B^*) \ \&\ \exists b'. b' \in B \ \&\ \langle c, b' \rangle \in L \ \&\ \langle b, b' \rangle \in L_0 \}.$$

Отсюда Con и $\vdash$ являются Σ-множествами.

ЛЕММА I.3.I. Тройка $K = \langle B, Con, \vdash \rangle$ является L_A-системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы заключается в непосредственной проверке аксиом L_A-систем.

Теперь рассмотрим денотат нашей L_A-системы K. По определению, $a \in [\![K]\!] \leftrightarrow (a \ne \emptyset, a \subseteq B, a - \Sigma$-множество$) \ \&\ (\forall b \in B \ \forall c \in a^* (c \in Con \ \&\ (c \vdash b \to b \in a)))$. Очевидно, что

$$\mathbb{K}_0 \leftrightharpoons \{ \{ b \in B \mid c \vdash b \} \mid c \in Con \} = \{ \{ b \in B \mid \nu b \le \bigsqcup \nu c \} \mid c \in Con \} = \{ B_{\bigsqcup \nu c} \mid c \in Con \}.$$

ЛЕММА I.3.2. Справедливы утверждения:

1) $[\![K]\!] = m_\nu B$;

2) $\mathbb{K}_0 = \beta(X_0) \leftrightharpoons \{ B_{\nu b} \mid b \in B \}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Справедливость утверждения следует непосредственно из определений $m_\nu B$ и $[\![K]\!]$. (2) Очевидно, что

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I.3 $K \ominus N \leftrightharpoons \langle D_{K\to N},\ Con_{K\to N},\ \vdash_{K\to N}\rangle$, где

а) $D_{K\to N} \leftrightharpoons Con_K \times Con_N$;

б) $Con_{K\to N} \leftrightharpoons \{c \in D^*_{K\to N} \mid \forall c \in c^*(\cup \delta c' \in Con_K \to \cup \rho c' \in Con_N)\}$;

в) $\vdash_{K\to N} = \{\langle c, d\rangle \mid c \in Con_{K\to N} \ \&\ d \in D_{K\to N} \ \&\ d = \langle d_0, d_1\rangle \ \&$

$\& \ (\exists c_d \in Con^*_N \ (\forall c_1 \in c_d \ \exists c_0 \ \langle c_0, c_1\rangle \in c \ \&$

$\& \ d_0 \vdash_K c_0) \ \& \ (\cup c_d \vdash_N d_1))\}$.

ЛЕММА 2.I.4. Функции pr_0 и pr_1 являются проекциями, т.е.

$$\forall c \in D^*_{K+N} \quad pr_0(c) \in D^*_K \text{ и } pr_1(c) \in D^*_N .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По принципу Δ_0-выделения имеем

$$KPU \vdash \exists a \in A \quad (d \in a \leftrightarrow d \in \delta c \ \& \ \langle d, 0\rangle \in c)$$

и

$$KPU \vdash \exists b \in A \quad (d \in b \leftrightarrow d \in \delta c \ \& \ \langle d, 1\rangle \in c) .$$

Очевидно, что $a = pr_0(c)$, $b = pr_1(c)$.

Следующая теорема утверждает замкнутость класса L_A-систем относительно операций $\oplus$, $\otimes$. Замкнутость класса L_A-систем относительно операции $\ominus$ требует некоторых дополнительных условий.

ТЕОРЕМА 2.I.5. Пусть K, N – L_A-системы. Тогда $K \oplus N$, $K \otimes N$ – тоже L_A-системы, и если $Con_{K\to N}$ является Σ-множеством, то $K \ominus N$ – тоже L_A-система.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Читателю предоставляется самому провести нетрудную проверку выполнения аксиом для L_A-систем в случае $K \oplus N$ и $K \otimes N$. Что касается $K \ominus N$, то заметим, что проверка аксиом e1-e3 тривиальна. Покажем выполнение аксиом e4 и e5.

e4: Предположим, что $c, a \in D^*_{K\to N}$, $c \in Con_{K\to N}$ и $\forall d \in a$ $c \vdash_{K\to N} d$. Покажем, что $c \cup a \in Con_{K\to N}$, т.е. $\forall b \in (c \cup a)^*$ $\cup \delta b \in Con_K \to \cup \rho b \in Con_N$.

Пусть $\cup \delta b \in Con_K$. Очевидно, что $b = c' \cup a'$, где $a' \in a^*$, $c' \in c^*$ и $a' \neq \emptyset$ (если $a' = \emptyset$, то тривиально). Значит, $\cup \delta c' \in$ $\in Con_K$ и $\cup \delta a' \in Con_K$. Отсюда $\cup \rho c' \in Con_N$ (так как $c \in Con_{K\to N}$).

Нужно показать, что

$$\cup\rho b = (\cup\rho c') \cup (\cup\rho a') \in Con_N .$$

Пусть $d \in a$, $d = \langle d_0, d_1 \rangle$. Из предположения имеем $\exists c_d^1 (\forall c_1 \in c_d^1 \; \exists c_0 \; \langle c_0, c_1 \rangle \in c \,\&\, d_0 \vdash_K c_0) \,\&\, (\cup c_d^1 \vdash_N d_1)$.

Так как $\varphi(c_0, c_1) \leftrightharpoons \langle c_0, c_1 \rangle \in c \,\&\, d_0 \vdash_K c_0$ является Σ-формулой, то из $\forall c_1 \in c_d^1 \; \exists c_0 \; \varphi(c_0, c_1)$ по Σ-выборке получаем

$$\exists c_d^0 (\forall c_1 \in c_d^1 \; \exists c_0 \in c_d^0 \; \varphi(c_0, c_1)) \,\&$$

$$\& (\forall c_0 \in c_d^0 \; \exists c_1 \in c_d^1 \; \varphi(c_0, c_1)).$$

Очевидно, что $d_0 \vdash_K \cup c_d^0$. Отсюда $\cup c_d^0 \in Con_K$ (по e4).

Рассмотрим $\bar{c}_d \leftrightharpoons (c_d^0 \times c_d^1) \cap c$. Очевидно, что $\bar{c}_d \in c^*$, $\cup\delta\bar{c}_d = \cup c_d^0$ и $\cup\rho\bar{c}_d = \cup c_d^1$. Отсюда $\cup c_d^1 \in Con_N$ (так как $c \in Con_{K\to N}$.

Таким образом, получим, что

$$\forall d = \langle d_0, d_1 \rangle \in a \; \exists \bar{c}_d \; \theta(d, \bar{c}_d) \leftrightharpoons$$

$$\leftrightharpoons d_0 \vdash_K \cup\delta\bar{c}_d \,\&\, \cup\rho\bar{c}_d \vdash_N d_1 \,\&\, \cup\delta\bar{c}_d \in Con_K \,\&\, \cup\rho\bar{c}_d \in Con_N.$$

Применив Σ-выборку, получим

$$\exists w (\forall d \in a \; \exists \bar{c}_d \in w \; \theta(d, \bar{c}_d)) \,\&$$

$$\& (\forall \bar{c}_d \in w \; \exists d \in a \; \theta(d, \bar{c}_d)).$$

Рассмотрим $v = \cup w$. Очевидно, что $v \in c^*$. Нетрудно заметить, что $\cup\delta a' \vdash_K \cup\delta v$. Отсюда имеем $(\cup\delta a') \cup (\cup\delta c') \vdash_K \cup\delta v$ (из свойств L_A-системы). С помощью аксиомы e4 получаем, что $(\cup\delta c') \cup (\cup\delta v) \in Con_K$. А так как $c' \cup v \in c^*$ и $c \in Con_{K\to N}$, то $(\cup\delta c') \cup (\cup\delta v) \in Con_N$.

Заметим, что $\cup\rho v \vdash_N \cup\rho a'$. Отсюда $(\cup\rho v) \cup (\cup\rho c') \vdash_N \cup\rho a'$ и, следовательно, $(\cup\rho c') \cup (\cup\rho a') \in Con_N$, что и требовалось доказать.

e5: Пусть $c, a \in D^*_{K\to N}$, $d, p \in D^*_{K\to N}$. Предположим, что $(\forall d \in a \; c \vdash_{K\to N} d) \,\&\, a \vdash_{K\to N} p$. Покажем, что $c \vdash_{K\to N} p$.

Из предположения следует, что $p = \langle p_0, p_1 \rangle$ и

$$\exists a_p \in Con_N^* (\forall d_1 \in a_p \ \exists d_0 \ \langle d_0, d_1 \rangle \in a \ \&$$

$$\& \ p_0 \vdash_K d_0) \ \& \ (\cup a_p \vdash_N p_1).$$

Пусть $d_1 \in a_p$, рассмотрим d_0 такое, что $d = \langle d_0, d_1 \rangle \in$ $\in a \ \& \ p_0 \vdash_K d_0$. По предположению получаем, что

$$\exists c_d \in Con_N^* (\forall c_1 \in c_d \ \ \exists c_0 \ \langle c_0, c_1 \rangle \in c \ \&$$

$$\& d_0 \vdash_K c_0) \ \& \ (\cup c_d \vdash_N d_1).$$

Очевидно, что $\forall c_1 \in c_d \ \exists c_0 \ \langle c_0, c_1 \rangle \in c \ \& \ p_0 \vdash_K c_0$.
Применив Σ-выборку к утверждению

$\forall d_1 \in a_p \ \exists c_d \ \varphi(d_1, c_d) \leftrightharpoons$

$\leftrightharpoons (\forall c_1 \in c_d \ \exists c_0 \ \langle c_0, c_1 \rangle \in c \ \& \ p_0 \vdash_K c_0) \ \& \ (\cup c_d \vdash_N d_1)$,

получаем, что

$$\exists w \ (\forall d_1 \in a_p \ \exists c_d \in w \ \varphi(d_1, c_d)) \&$$
$$\& (\forall c_d \in w \ \exists d_1 \in a_p \ \ \varphi(d_1, c_d)).$$

Рассмотрим $v = \cup w$, $v \in Con_N^*$ и $\forall c_1 \in v \ \ \exists c_0 \ \langle c_0, c_1 \rangle \in c \ \&$ $\& \ p_0 \vdash_K c_0$. Покажем, что $\cup v \vdash_N p_1$. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 2.1.6. Для элемента v верно следующее включение $\cup v \in Con_N$. .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$v \subseteq C \leftrightharpoons \{c_1 \mid \exists c_0 \ \langle c_0, c_1 \rangle \in c \ \& \ \nu_K c_0 \subseteq \nu_K p_0\},$$

где $\nu_K p_0 = \{d' \in D_K \mid p_0 \vdash_K d'\}$. Заметим, что $C \subseteq Con_N$ и C – Σ-множество. Так как $c \in Con_{K \to N}$, то получаем, что $\forall c' \in C^*$ $c' \in Con_{[N], \nu_N}$ (см. [3]). Тогда существует в $([N], \subseteq)$ $\cup \nu_N C \in [N]$, где $\nu_N C \leftrightharpoons \{\nu_N c_1 \mid c_1 \in C\}$ (см. [3]). Очевидно, что $\cup C \subseteq \cup \nu_N C$, следовательно, и $\cup v \subseteq \cup \nu_N C$. Тогда по определению элемента получаем, что $\cup v \in Con_N$.

Используя лемму, легко заметить, что $\cup v \vdash_N \cup a_p$ и, следовательно, $\cup v \vdash_N p_1$. Теорема доказана.

2.2. Свойства отображения $[\![\cdot]\!]$.

Покажем, что отображение $[\![\cdot]\!]$, ставящее в соответствие каждой L_A-системе K ее денотат $[\![K]\!]$, порождает на множестве денотатов L_A-систем соответствующие операциям $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$ над L_A-системами операции прямой суммы, прямого произведения, взятия $C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$-пространств всех вычислимых отображений из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Если K, N — L_A-системы, то $[\![K \oplus N]\!] \cong [\![K]\!] + [\![N]\!]$ (прямая сумма пространств).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться, что прямая сумма полных f_A-пространств $\langle [\![K]\!], K_0, \subseteq, \nu_K : Con_K \to K_0\rangle$ и $\langle [\![N]\!], N_0, \subseteq, \nu_N : Con_N \to N_0\rangle$ имеет следующую структуру полного f_A-пространства: $[\![K]\!] + [\![N]\!] \leftrightharpoons \langle [\![K]\!] \times \{0\} \cup [\![N]\!] \times \{1\}, K_0 \times \{0\} \cup N_0 \times \{1\}, \le, \nu :$ $Con_{K+N} \xrightarrow{\text{на}} K_0 \times \{0\} \cup N_0 \times \{1\}\rangle$, где

1) порядок $\le$ определен следующим образом:

для $\xi_0, \xi_1 \in [\![K]\!] \times \{0\} \cup [\![N]\!] \times \{1\}$.

$$\xi_0 \le \xi_1 \leftrightarrow \bigvee_{i=0,1} (\xi_0 = \langle \xi_0', i\rangle \,\&\, \xi_1 = \langle \xi_1', i\rangle \,\&\, \xi_0' \subseteq \xi_1');$$

2) нумерация ν определяется так:

для $c \in Con_{K+N}$ полагаем

$$\nu c = \begin{cases} \langle \nu_K pr_0(c), 0\rangle, & \text{если } pr_0(c) \in Con_K \,\&\, pr_1(c) = \emptyset; \\ \langle \nu_N pr_1(c), 1\rangle, & \text{если } pr_1(c) \in Con_N \,\&\, pr_0(c) = \emptyset. \end{cases}$$

Из полноты имеем, что

$$[\![K]\!] + [\![N]\!] \cong m_\nu Con_{K+N} = \{C_\xi \mid \xi \in [\![K]\!] + [\![N]\!]\},$$

где $C_\xi \leftrightharpoons \{c \in Con_{K+N} \mid \nu c \le \xi\}$.

Денотат L_A-системы $K \oplus N$ имеет следующую структуру полного f_A-пространства:

$$\langle [\![K \oplus N]\!], \tilde{\nu}(Con_{K+N}), \subseteq, \tilde{\nu} : Con_{K+N} \xrightarrow{\text{на}} \tilde{\nu}(Con_{K+N})\rangle,$$

где для $c \in Con_{K+N}$ $\tilde{\nu} c \leftrightharpoons \{d \in D_{K+N} \mid c \vdash_{K+N} d\}$.

Из полноты имеем, что

$$[\![K \oplus N]\!] \cong m_{\tilde{\nu}}\, Con_{K+N} = \{\tilde{C}_\varphi \mid \varphi \in [\![K \oplus N]\!]\},$$

где

$$\tilde{C}_{\varphi} = \{c \in \mathrm{Con}_{K+N} \mid \tilde{\nu} c \subseteq \varphi\}.$$

ЛЕММА 2.2.2. Справедливо равенство $m_{\nu}\mathrm{Con}_{K+N} = m_{\tilde{\nu}}\mathrm{Con}_{K+N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\subseteq$: Пусть $C_{\xi} \in m_{\nu}\mathrm{Con}_{K+N}$, $C_{\xi} = \{c \in \mathrm{Con}_{K+N} \mid \nu c \le \xi\}$, $\xi \in [K] + [N]$ и пусть $\xi = \langle \xi', i\rangle$, $i = 0,1$. Нетрудно заметить, что $\varphi \leftrightharpoons \{\langle d', i\rangle \mid d' \in \xi'\}$ является элементом $[K \oplus N]$ и $C_{\xi} = \tilde{C}_{\varphi} \leftrightharpoons \{c \in \mathrm{Con}_{K+N} \mid \tilde{\nu} c \subseteq \varphi\}$.

$\supseteq$: Пусть $\tilde{C}_{\varphi} \in m_{\tilde{\nu}}\mathrm{Con}_{K+N}$, $\varphi \in [K \oplus N]$. Легко понять, что для $\varphi \in [K \oplus N]$ выполняется одно из двух условий:

(0) $\forall \varphi' \in \varphi^{*}\ pr_0(\varphi') \in \mathrm{Con}_K \ \&\ pr_1(\varphi') = \emptyset$,

(1) $\forall \varphi' \in \varphi^{*}\ pr_1(\varphi') \in \mathrm{Con}_N \ \&\ pr_0(\varphi') = \emptyset$.

Тогда в случае (i) рассмотрим $\xi' \leftrightharpoons \{d' \mid \langle d', i\rangle \in \varphi\}$ и положим $\xi \leftrightharpoons \langle \xi', i\rangle$. Нетрудно убедиться, что $\xi \in [K] + [N]$ и $\tilde{C}_{\varphi} = C_{\xi}$.

Эта лемма доказывает теорему, т.е. $[K \oplus N] \cong [K] + [N]$.

ТЕОРЕМА 2.2.3. Если $K, N - L_A$-системы, то $[K \otimes N] \cong [K] \times [N]$ (прямое произведение пространств).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое произведение полных f_A-пространств

$$\langle [N], K_0, \subseteq, \nu_K : \mathrm{Con}_K \xrightarrow{\text{на}} K_0 \rangle$$

и

$$\langle [N], N_0, \subseteq, \nu_N : \mathrm{Con}_N \xrightarrow{\text{на}} N_0 \rangle$$

имеет следующую структуру полного f_A-пространства:

$$\langle [K] \times [N], K_0 \times N_0, \le, \nu : \mathrm{Con}_{K \times N} \xrightarrow{\text{на}} K_0 \times N_0 \rangle,$$

где

1) порядок $\le$ определен следующим образом:

для $\langle \xi_0, \varphi_0\rangle, \langle \xi_1, \varphi_1\rangle \in [K] \times [N]$

$$\langle \xi_0, \varphi_0\rangle \le \langle \xi_1, \varphi_1\rangle \leftrightarrow \xi_0 \subseteq \xi_1 \ \&\ \varphi_0 \subseteq \varphi_1;$$

2) нумерация ν определяется так:
для $c \in Con_{K\times N}$

$$\nu c \leftrightharpoons \langle \nu_K pr_0(c),\ \nu_N pr_1(c)\rangle .$$

Нетрудную проверку корректности операции $\times$ предоставим читателю. (Достаточно проверить, что нумерация ν является A-допустимой и убедиться в полноте пространства.)

Из полноты вытекает, что

$$[K]\times[N] \cong m_\nu Con_{K\times N} = \{C_{\langle \xi,\varphi\rangle} \mid \langle \xi,\varphi\rangle \in [K]\times[N]\},$$

где $C_{\langle \xi,\varphi\rangle} \leftrightharpoons \{c\in Con_{K\times N} \mid \nu c \le \langle \xi,\varphi\rangle\}$.

Денотат L_A-системы $K\otimes N$ имеет следующую структуру полного f_A-пространства,

$$\langle [K\otimes N],\ \tilde\nu(Con_{K\times N}),\ \subseteq,\ \tilde\nu : Con_{K\times N} \xrightarrow{\text{на}} \tilde\nu(Con_{K\times N})\rangle ,$$

где для $c\in Con_{K\times N}$ $\tilde\nu c \leftrightharpoons \{d\in D_{K\times N} \mid c \vdash_{K\times N} d\}$. Из полноты имеем, что

$$[K\otimes N] \cong m_{\tilde\nu}\, Con_{K\times N} = \{C_\xi \mid \xi \in [K\otimes N]\},$$

где $C_\xi = \{c \in Con_{K\times N} \mid \tilde\nu c \subseteq \xi\}$.

ЛЕММА 2.2.4. Справедливо равенство $m_\nu Con_{K\times N} = m_{\tilde\nu} Con_{K\times N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$\subseteq$: Пусть $C_{\langle \xi,\varphi\rangle} \in m_\nu Con_{K\times N}$. Положим

$$\theta \leftrightharpoons \{\langle d,0\rangle \mid d\in\xi\} \cup \{\langle d,1\rangle \mid d\in\varphi\}.$$

Легко понять, что $\theta \in [K\otimes N]$ и $C_{\langle \xi,\varphi\rangle} = C_\theta \leftrightharpoons \{c \in Con_{K\times N} \mid \tilde\nu c \subseteq \theta\}$, используя $\tilde\nu c \subseteq \theta \leftrightarrow c \subseteq \theta$.

$\supseteq$: Пусть $C_\theta \in m_{\tilde\nu}\, Con_{K\times N}$, $\theta\in[K\otimes N]$. Определим $\xi \leftrightharpoons \{d \mid \langle d,0\rangle \in\theta\}$ и $\varphi \leftrightharpoons \{d \mid \langle d,1\rangle \in \theta\}$. Нетрудно проверить, что $\xi \in [K]$, $\varphi \in [N]$ и $C_{\langle \xi,\varphi\rangle} = C_\theta$.

Отсюда получаем $[K\otimes N] \cong [K]\times[N]$.

ТЕОРЕМА 2.2.5. Пусть K, N – L_A-системы. Если

$$Con_{K\to N} \leftrightharpoons \{c \in (Con_K \times Con_N)^* \mid \forall c' \in c^*\ \cup\delta c' \in Con_K \to \cup\rho c' \in Con_N\}$$

является Σ-множеством, то $[K \ominus N] \cong$
$\cong C([K],[N])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.I.5 следует, что $K \ominus N$ – L_A-система. Значит, $[K \ominus N]$ является полным f_A-пространством. Из полноты вытекает, что

$$[K \ominus N] \cong m_{\tilde{\nu}}\, Con_{K\to N} = \{C_\xi \mid \xi \in [K \ominus N]\},$$

где

$$C_\xi \leftrightharpoons \{c \in Con_{K\to N} \mid \tilde{\nabla} c \subseteq \xi\},$$

а

$$\tilde{\nabla} c \leftrightharpoons \{d \in D_{K\to N} \mid c \vdash_{K\to N} d\}.$$

По определению (см. [3]), $C([K],[N]) = \{\mu: [K] \to [N] \mid$ μ-непрерывно и множество $L_\mu \leftrightharpoons \{\langle c_0, c_1\rangle \mid \nu_N c_1 \subseteq \mu \nu_K c_0\}$ является Σ-множеством$\}$.

Легко заметить, что множество

$$C \leftrightharpoons \{ c \in (con_K \times Con_N)^* \mid \forall c' \in c^* \;\; \delta c' \in Con_{[K],\nu_K} \to$$
$$\to \rho c' \in Con_{[N],\nu_N} \}$$

совпадает с множеством $Con_{K\to N}$.

Тогда $C([K],[N])$ имеет структуру полного f_A-пространства [3]:

$$\langle C([K],[N]),\, C_0([K],[N]), \le, ,\nu : Con_{K\to N} \to C_0([K],[N])\rangle,$$

где

I) нумерация ν определяется так: для $c \in Con_{K\to N}$ полагаем $\nu c \leftrightharpoons \mu_c$, где

$$\mu_c(\xi) \leftrightharpoons \sqcup\{\nu_N c_1 \mid \exists c_0 \; \langle c_0, c_1\rangle \in c \;\&\; \nu_K c_0 \in \xi\}, \; \xi \in [K];$$

2) $C_0([K],[N]) \leftrightharpoons \{\mu_c \mid c \in Con_{K\to N}\}$;

3) порядок $\le$ задается следующим образом:
для $\mu_1, \mu_2 \in C([K],[N])$ имеет место

$$\mu_1 \le \mu_2 \leftrightarrow \forall \xi \in [K] \;\; \mu_1(\xi) \subseteq \mu_2(\xi).$$

Из полноты следует, что

$$C([K],[N]) \cong m_\nu \mathrm{Con}_{K\to N} = \{C_\mu \mid \mu \in C([K],[N])\},$$

где $C_\mu \leftrightharpoons \{c \in \mathrm{Con}_{K\to N} \mid \mu_c \le \mu\}$.

ЛЕММА 2.2.6. Справедливо равенство $m_\nu \mathrm{Con}_{K\to N} = m_{\tilde\nu}\mathrm{Con}_{K\to N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\subseteq$: Пусть $C_\mu \in m_\nu \mathrm{Con}_{K\to N}$, $\mu \in C([K],[N])$.

ЛЕММА 2.2.7. Множество L_μ является элементом $[K \ominus N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$L_\mu = \{\langle c_0, c_1\rangle \mid \nu_N c_1 \subseteq \mu\, \nu_K c_0\} \subseteq \mathrm{Con}_K \times \mathrm{Con}_N$$

и является Σ-множеством. Из результатов работы [3] следует, что

$$\forall a \in L^*_\mu \quad \delta a \in \mathrm{Con}_{[K],\nu_K} \to \rho a \in \mathrm{Con}_{[N],\nu_N}.$$

Легко понять, что $\forall a \in L^*_\mu \quad a \in \mathrm{Con}_{K\to N}$.

Пусть $a \in L^*_\mu$ и $a \vdash_{K\to N} d$, $d = \langle d_0, d_1\rangle \in D_{K\to N}$. Аналогично тому, как мы делали в доказательстве теоремы 2.I.5 при проверке аксиомы e4, получаем, что существует $a' \in a^*$ такой, что $\cup\delta a' \in \mathrm{Con}_K$, $\cup\rho a' \in \mathrm{Con}_N$, $d_0 \vdash_K \cup\delta a'$, $\cup\rho a' \vdash_N d_1$. Таким образом, $\nu_N d_1 \subseteq \nu_N(\cup \rho a')$, а $\forall c_1 \in \rho a'\ \exists c_0 \in \delta a'\ \nu_N c_1 \subseteq \mu\nu_K c_0$. Следовательно, $\sqcup \nu_N \rho a' \subseteq \cup\{\mu\nu_K c_0 \mid c_0 \in \delta a'\}$, а $\sqcup \nu_N \rho a' = \nu_N(\cup \rho a')$. А так так $\forall c_0 \in \delta a'$ $d_0 \vdash_K c_0$, то $\nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0$ и, следовательно, в силу монотонности μ (см. [2]) получаем, что $\mu\nu_K c_0 \subseteq \mu\nu_K d_0$. Таким образом, $\nu_N d_1 \subseteq \mu\nu_K d_0$, т.е. $d \in L_\mu$.

ЛЕММА 2.2.8. Справедливо $C_\mu = C_{L_\mu} \leftrightharpoons \{c \in \mathrm{Con}_{K\to N} \mid \tilde\nu c \subseteq L_\mu\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\tilde\nu c \subseteq L_\mu \leftrightarrow c \subseteq L_\mu$. Пусть $c \in \mathrm{Con}_{K\to N}$ такое, что $\forall \xi \in [K]$ $\mu_c(\xi) \leftrightharpoons \sqcup\{\nu_N c_1 \mid \exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in c\ \& \ \& \nu_K c_0 \subseteq \xi\} \subseteq \mu(\xi)$.

Рассмотрим $d \in c$, $d = \langle d_0, d_1\rangle$. Очевидно, что $\nu_N d_1 \subseteq \mu_c(\nu_K d_0) \subseteq \subseteq \mu(\nu_K d_0)$ т.е. $d \in L_\mu$.

Теперь пусть $c \in Con_{K\to N}$ такое, что $c \subseteq L_\mu$. Тогда для $\xi \in [K]$ очевидно, что

$$\mu_c(\xi) = \bigsqcup\{\nu_N c_1 \mid \exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in c \ \&\ \nu_K c_0 \subseteq \xi\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigsqcup\{\nu_N c_1 \mid \exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in L_\mu \ \&\ \nu_K c_0 \subseteq \xi\} = \mu(\xi)$$

(так восстанавливается μ по заданному L_μ (см. [3])).

Продолжаем доказательство леммы 2.2.6.

$\supseteq$: Пусть $C_\varphi \in m\,Con_{K\to N}$, $\varphi \in [K \ominus N]$. Заметим, что $\varphi \subseteq Con_K \times Con_N$, φ – Σ-множество и $\forall c' \in \varphi^*\ \bigcup \delta c' \in Con_K \to \bigcup \rho c' \in Con_N$ (из определения элемента). Тогда для $\xi \in [K]$ определено

$$\mu_\varphi(\xi) = \bigsqcup\{\nu_N c_1 \mid \exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in \varphi \ \&\ \nu_K c_0 \subseteq \xi\}$$

и μ_φ является вычислимым (см. [3]).

Убедимся, что $C_\varphi = \{c \in Con_{K\to N} \mid c \subseteq \varphi\}$ совпадает с $C_{\mu_\varphi} = \{c \in Con_{K\to N} \mid \mu_c \leq \mu_\varphi\}$. Вложение $C_\varphi \subseteq C_{\mu_\varphi}$ очевидно.

Пусть $c \in C_{\mu_\varphi}$ и $\mu_c \leq \mu_\varphi$. Допустим, что $c \not\subseteq \varphi$, т.е. $\exists\, d \in c$ такой, что $d \notin \varphi$, $d = \langle d_0, d_1\rangle$. Очевидно,

$$d_1 \subseteq \nu_N d_1 \subseteq \bigsqcup\{\nu_N c_1 \mid \exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in c \ \&\ \nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0\} =$$
$$= \mu_c(\nu_K d_0) \subseteq \mu_\varphi(\nu_K d_0) = \bigsqcup\{\nu_K c_1 \mid \exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in \varphi \ \&$$
$$\&\ \nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0\}.$$

Отсюда

$$\forall p \in d_1\ \exists c_1 (\exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in \varphi \ \&\ \nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0) \ \&\ (c_1 \vdash_N p).$$

Применив Σ-выборку, получаем

$$\exists w\ (\forall p \in d_1\ \exists c_1 \in w\ (\exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in \varphi \ \&$$
$$\&\ \nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0) \ \&\ (c_1 \vdash_N p)) \ \&\ (\forall c_1 \in w\ \exists p \in d_1$$
$$\exists c_0\ \langle c_0, c_1\rangle \in \varphi \ \&\ \nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0 \ \&\ c_1 \vdash_N p).$$

Применив Σ-выборку к утверждению

$$\forall c_1 \in w\ \exists c'\ (\exists c_0\ c' = \langle c_0, c_1\rangle \ \&\ c' \in \varphi \ \&\ \nu_K c_0 \in \nu_K d_0),$$

получаем

$$\exists \bar{c} \, (\forall c_1 \in w \;\; \exists c'_1 \in \bar{c} \; \exists c_0, c_1 = \langle c_0, c_1 \rangle \; \& \; c' \in \varphi \; \&$$

$$\& \; \nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0) \& \; (\forall c' \in \bar{c} \;\; \exists c_1 \in w \quad \exists c_0$$

$$c' = \langle c_0, c_1 \rangle \; \& \; c' \in \varphi \; \& \;\; \nu_K c_0 \subseteq \nu_K d_0).$$

Очевидно, что $\bar{c} \in \varphi^*$ и $\bar{c} \vdash_{K \to N} d$. Действительно, $\forall c_1 \in w$ $\exists c_0 \; \langle c_0, c_1 \rangle \in \bar{c} \; \& \; d_0 \vdash_K c_0$. Аналогично доказательству леммы 2.I.6 можно показать, что $\cup w \in Con_N$. Теперь очевидно, что $\cup w \vdash_N d_1$. Лемма 2.2.6 доказана.

Из данной леммы вытекает, что $C([\![K]\!], [\![N]\!]) \cong [\![K \ominus N]\!]$. Теорема доказана.

Три последние теоремы можно в определенном смысле рассматривать как утверждение о том, что отображение $[\![\cdot]\!]$ является "изоморфизмом" многообразия L_A-систем и полных f_A-пространств. Подобная связь L_A-систем и f_A-пространств позволяет надеяться, что в терминах L_A-систем может быть удовлетворительно описана денотационная семантика языка Σ-выражений.

В заключение автор выражает благодарность Д.И.Свириденко за постановку задачи и помощь в работе над статьей.

Литература

I. BARWISE J. Admissible Sels and Structures. - Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1975. - P.6-42.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. - М.: Наука, 1976. - С. 577-588.

3. Его же. Об f_A-пространствах //Алгебра и логика. - 1986. - Т. 25, №5. - С. 533-544.

4. SCOTT D.S. Domains for denotational semantics// Automata, languages and programming.- Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1982. - P.577-612.- (Lecture notes in computer science.)

5. СВИРИДЕНКО Д.И., САЗОНОВ В.Ю. Денотационная семантика языка Σ-выражений //Логические вопросы теории типов данных. - Новосибирск, 1986. - Вып. 114: Вычислительные системы. - С. 16-33.

6. СВИРИДЕНКО Д.И. Проектирование Σ-программ. Σ-оцениваемость //Там же. - С. 59-83.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 февраля 1988 года