ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ И ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск I24

УДК 519.47

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МОДЕЛИ

А.С.Морозов

Изучаются процессы, допускающие алгебраические спецификации. Получено полное описание таких процессов в терминах перечислимых моделей. Доказана замкнутость множества этих процессов относительно основных операций.

Мы предполагаем, что читатель знаком хотя бы с одной работой Бергстры и Клопа по теории процессов, выполненной в алгебраическом духе. Все определения и обозначения можно найти, например, в [I,2].

Следуя Бергстре и Клопу [I], определим понятие алгебраически специфицируемого процесса, или просто алгебраического процесса. Пусть σ - конечная функциональная сигнатура, в которой есть нульместные функции (константы), A - конечный алфавит. Алгебраической спецификацией называется упорядоченная четверка $S = (\sigma, t, E, R)$, где t - некоторый терм без переменных сигнатуры σ; E - конечная система тождеств вида $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$ (u и v - термы сигнатуры σ); R - конечная система помеченных редукций вида $a: p(\bar{y}) \to q(\bar{y})$ (здесь $a \in A$, p и q - термы сигнатуры σ).

Каждая алгебраическая спецификация $S = (\sigma, t, E, R)$ определяет некоторый процесс $\gamma(S) = \lim_n (S)$ следующим образом: $\gamma_0(S)$ - пустой процесс, $\gamma_1(S) = \Sigma\{a \mid a: p(\bar{y}) \to q(\bar{y}) \in R$, и для некоторого кортежа термов $\bar{w}$ без переменных сигнатуры σ справедливо $E \vdash t = p(\bar{w})\}$, $\gamma_{n+1}(S) = \Sigma\{ a \cdot \gamma_n(S') \mid a: p(\bar{y}) \to q(\bar{y}) \in R$, $S' = (\sigma, r, E, R)$, и для некоторого кортежа $\bar{w}$ термов без переменных сигнатуры σ справедливо $E \vdash t = p(\bar{w})$ и $E \vdash r = q(\bar{w})$ $\}$. Фактически $\gamma(S)$ есть процесс редукции терма t в инициальной системе многообразия, определяемого тождествами из E.

Определим теперь понятие позитивного процесса. Пусть σ_A – сигнатура, содержащая для каждого $a \in A$ в точности один бинарный предикатный символ P_a и при этом $P_a \neq P_b$ при $a \neq b$. Других символов сигнатура σ_A не содержит.

Позитивная модель сигнатуры σ_A – это пара $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M}$ – модель сигнатуры σ_A, а $\nu : w \to |\mathfrak{M}|$ – нумерация основного множества модели $\mathfrak{M}$ такая, что множества $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ и $\{\langle x\ y\rangle \mid \mathfrak{M} \models P_a(\nu x, \nu y)\}$, $a \in A$, перечислимы. Понятие позитивной модели введено в [3]. Каждый элемент m этой модели задает некоторый процесс $\tau(m, \mathfrak{M})$, который определяется следующим образом:

$$\tau(m, \mathfrak{M}) = \lim \tau_n(m, \mathfrak{M}),$$

где τ_0 – пустой процесс,

$$\tau_1(m, \mathfrak{M}) = \Sigma\{b \mid \mathfrak{M} \models \exists c P_b(m, c)\},$$

$$\tau_{n+1}(m, \mathfrak{M}) = \Sigma\{b \cdot \tau_n(c, \mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \models P_b(m, c)\}.$$

Процесс τ назовем позитивным, если существуют позитивная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ сигнатуры σ_A и элемент $m \in |\mathfrak{M}|$ такие, что $\tau = \tau(m, \mathfrak{M})$. Если отказаться от требования перечислимости множества $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$, то мы получим понятие перечислимого процесса.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА I. Эквивалентны следующие три условия:

I) процесс γ – алгебраический;

2) процесс γ – позитивный;

3) процесс γ – перечислимый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\to$ 2). Пусть $\gamma(S)$ – алгебраический процесс. Определим модель $\mathfrak{M}$ следующим образом: пусть $|\mathfrak{M}|$ будет основным множеством свободной системы $\mathfrak{A}$ в многообразии, определяемом системой тождеств E, порожденной константами. Определим $P_a = \{\langle c, d\rangle \mid \mathfrak{A} \models \exists \bar{e}(c = p(\bar{e})\ \&\ d = q(\bar{e}))$ и $a: p(\bar{y}) \to q(\bar{y}) \in R\}$. Этим модель $\mathfrak{M}$ определена полностью. Очевидно, что $\mathfrak{M}$ допускает нумерацию ν, делающую ее позитивной. Кроме того, понятно, что $\gamma(S) = \tau(t^*, \mathfrak{M})$, где t^* – элемент $|\mathfrak{M}|$, определяемый термом t. Таким образом, процесс $\gamma(S)$ – позитивный.

2) $\to$ 3) очевидно.

3) $\to$ I). Пусть c, l и r обозначают примитивно-рекурсивные канторовские нумерующие функции [2]: $c: \omega^2 \to \omega$; $l, r: \omega \to \omega$, при-

чем $c(l(x), r(x)) = x$, $r(c(x,y)) = y$, $l(c(x,y)) = x$ для всех $x,y \in \omega$.

Пусть рекурсивные функции f_a $(a \in A)$ перечисляют множества $\{c(x,y) \mid \mathfrak{M} \models P_a(\nu x, \nu y)\}$ соответственно (их можно считать непустыми). Все эти функции могут быть выбраны примитивно-рекурсивными [2].

Сигнатура σ будет содержать константу 0, символы для функций f_a $(a \in A)$, символы для канторовских функций c, l, r, а также все необходимые функциональные символы, участвующие в записи примитивно-рекурсивных определений для этих функций, исходя из простейших функций $\mathbf{0}(x) = 0$, $s(x) = x+1$ и $I^m_n(x_1, \dots, x_m) = x_n$. Мы предполагаем, что символы для определения различных функций f_a $(a \in A)$ и c, r, l попарно различны.

Система равенств, определяющих функции f_a $(a \in A)$, c, l, r как примитивно-рекурсивные функции с помощью суперпозиции и примитивной рекурсии, а также необходимый конечный набор тождеств вида $\mathbf{0}(x) = 0$, $I^m_n(x_1, \dots, x_n) = x_m$ составляют нашу систему тождеств E.

Система редукций R определяется так:

$$R = \{ a:\ lf_a(x) \to rf_a(x) \mid a \in A \}.$$

Пусть $m \in \mathfrak{M}$ таков, что наш процесс τ есть $\tau(m, \mathfrak{M})$ и $m = \nu k$. Тогда алгебраической спецификацией процесса будет четверка $S = (\sigma, \underbrace{s \dots s}_{k \text{ раз}}(o), E, R)$.

Действительно, инициальная система в многообразии, определяемом E, есть множество классов эквивалентности термов $o, s(o)$, $s^2(o)$ и т.д., причем в этой системе все термы $o, s(o), s^2(o), \dots$ имеют различные значения. Можно считать основным множеством этой системы ω. Тогда все функции $f_a(a \in A), c, l, r$ превращаются в привычные нам рекурсивные функции f_a, c, l, r.

Докажем по индукции, что $\tau_n(m, \mathfrak{M})$ равен $\gamma_n(S)$. Тогда, переходя к пределу, мы будем иметь:

$$\tau = \lim \tau_n(m, \mathfrak{M}) = \lim \gamma_n(S) = \gamma .$$

При $n = 1$ необходимо проверить, что $\tau_1(m, \mathfrak{M}) = \Sigma \{ b \mid \mathfrak{M} \models$ $\models \exists c P_b(m,c) \} = \gamma(s^k(o), E, R) = \Sigma \{ b \mid$ для некоторого $x \in \omega$ справедливо $s^k(o) = lf_b(x) \}$. Это непосредственно следует из определений. Теперь нужно проверить равенство $\tau_{n+1}(m, \mathfrak{M}) = \Sigma\{ b \cdot \tau_n(c, \mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \models$

$= P_b(m,c)\} = \gamma_{n+1}(s^k(o),E,R) = \Sigma\{ b\gamma_n(S') \mid$ для некоторого $x \in \omega$ справедливо $s^k(o) = lf_b(x)$, $S' = (i,E,R)$, $i = rf_b(x)\}$.

Пусть $b\tau_n(c,\mathfrak{M})$ входит в первую сумму, тогда $\mathfrak{M} \models P_b(m,c)$ и для подходящего j справедливо $\mathfrak{M} \models P_b(\nu k,\nu j)$. Найдется $x \in \omega$ такой, что $c(k,j) = f_b(x)$. Тогда $s^k(o) = lf_b(x)$, $j = rf_b(x)$ и по предположению индукции $\gamma_n(s^j(o),E,R) = \tau_n(\nu j,\mathfrak{M})$. Отсюда $b\cdot\tau_n(c,\mathfrak{M}) = b\cdot\tau_n(\nu j,\mathfrak{M}) = b\gamma_n(s^j(o),E,R)$, и, таким образом, это слагаемое присутствует и во второй сумме.

Наоборот, пусть $b\cdot\gamma_n(s^j(o),E,R)$ присутствует и во второй сумме. Тогда для некоторого $x \in \omega$ справедливо $k = lf_b(x)$, $i = rf_b(x)$. Отсюда $\mathfrak{M} \models P_b(\nu k,\nu i)$. Кроме того, по предположению индукции $\gamma_n(s^i(o),E,R) = \tau_n(\nu i,\mathfrak{M})$. Отсюда мы получаем, что слагаемое $b\cdot\gamma_n(i,E,R)$ присутствует в первой сумме. Теорема доказана.

В [I] определен класс процессов K_{eff} как класс таких процессов из A^∞, у которых проективная последовательность вычислима. Там же сообщается, что соотношение классов K_{eff} и K всех алгебраических процессов до сих пор не ясно. Из теоремы легко вытекают

СЛЕДСТВИЕ I. $K_{eff} \subsetneq K$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество всех алгебраических процессов замкнуто относительно операций $\cdot$, $+$, $\sqcup\!\!\sqcup$ и $\|$.

Докажем еще одну теорему о спецификациях алгебраических процессов, отвечающую на вполне естественный вопрос: можно ли распознавать эффективно непустоту алгебраического процесса по его спецификации?

ТЕОРЕМА 2. Не существует алгоритма, позволяющего по алгебраической спецификации алгебраического процесса выяснить, определяет эта спецификация пустой процесс или нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_0,\pi_1,\ldots$ – постовская нумерация всех рекурсивно-перечислимых множеств [2]. Нам понадобятся два утверждения из теории алгоритмов. Первое – множество $\{n \mid \exists t c(o,t) \in \pi_n\}$ не рекурсивно. Это следует из теоремы Райса [2]. Второе утверждение сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА. Пусть d - произвольное натуральное число. Существует эффективная процедура, позволяющая по любому n эффективно выписывать примитивно-рекурсивное определение для функции, перечисляющей множество $\pi_n \cup \{d\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [2] следует, что существует примитивно-рекурсивная функция $P(n,x,t)$, принимающая лишь значения 0 и I, такая, что для любого n справедливо: π_n есть область значений частично-рекурсивной функции $l\mu t(P(n,x,t) = 1)$ (здесь μ - оператор минимизации [2]).

Пусть $P'(n,x,t) = sg \sum_{u \le t} P(n,x,u)$ (здесь $sg(o) = 0$, $sg(x+1) = 1$) и $P^*(n,x,o) = P'(n,x,o)$, $P^*(n,x,t+1) = P'(n,x,t+1) - P'(n,x,t)$. Тогда P^* - примитивно-рекурсивная функция, обладающая следующими свойствами: $P^*(n,x,t) = 1 \to P(n,x,t)=1$ и для любых n и x существует не более одного t такого, что $P^*(n,x,t) = 1$. Очевидно, тогда частично-рекурсивные функции $l\mu t(P(n,x,t) = 1$ и $l\mu t(P^*(n,x,t) = 1)$ совпадают.

Определим функцию f_n следующим образом:

$$f_n(k) = \begin{cases} d, & \text{если } P^*(n,lk,rk) \neq 1; \\ lrk, & \text{если } P^*(n,lk,rk) = 1. \end{cases}$$

Кроме того, f_n может быть записана в виде:

$$f_n(k) = a\,|P^*(n,lk,rk) - 1| + lrk \cdot P^*(n,lk,rk),$$

т.е. $f_n(k) = G(n,k)$ для подходящей примитивно-рекурсивной функции G. Выпишем равенства, определяющие $G(n,k)$. Теперь для получения схемы, определяющей f_n, необходимо в соответствующем месте поставить $S^n(o)$. Осталось заметить, что f_n перечисляет $\pi_n \cup \{d\}$.

Выберем теперь произвольное d такое, что $ld \neq 0$. Пусть нам задано n. Построим по нему алгебраическую спецификацию процесса. В качестве t_n возьмем 0. Пусть E_n - система равенств, определяющая функцию f_n, перечислющую множество $\pi_n \cup \{d\}$. Множество редукций R_n будет состоять из единственной редукции a: $lf(x) \to rf(x)$. Пусть сигнатура σ_n состоит из нуля и всех символов, использованных при определении f_n.

Очевидно, что процесс, определяемый спецификацией $(\sigma_n, t_n, E_n, R_n)$ будет непустым в том и только в том случае, если $n \in B$. Отсюда и следует неразрешимость проблемы непустоты процесса. Теорема доказана.

Литература

I. BERGSTRA J.A., KLOP J.W. An algebraic specification method for processes over a finite action set// Preprint IW 232/83. Mathematisch centrum, Amsterdam,1983.

2. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции.- М.: Наука, 1980.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы, как абстрактный тип данных// Математическое обеспечение ВС и микро-ЭВМ. - Новосибирск,1983.-Вып.96: Вычислительные системы. - С.75-86.

Поступила в ред.-изд.отд.
31 мая 1988 года