ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ И ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 124

УДК 510.53; 510.67

ПОЛИНОМИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫЕ СВОДИМОСТИ ВЫЧИСЛИМЫХ ИНДЕКСАЦИЙ

В.П.Добрица

В классе конструктивных моделей устанавливается связь между наличием различных вычислимых индексаций и числом элементов в полурешетке всех его вычислимых индексаций. В частности, доказывается, что если у класса конструктивных моделей имеется две вычислимые индексации, неэквивалентные ограниченной сводимости с мажорантой 2^x, то полурешетка вычислимых индексаций этого класса счетна.

Основные определения и обозначения, используемые в работе, можно найти в [1-5]. Через K^* будем обозначать класс конструктивных моделей, через $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ - вычислимые индексации такого класса.

Скажем, что вычислимая индексация α класса K^* конструктивных моделей предельно сводится к вычислимой индексации β этого же класса, если существует общерекурсивная функция (о.р.ф.) $\varphi(n,x)$ такая, что для каждого $x\in\omega$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)$ и

$$\alpha_x \underset{a}{\equiv} \beta_{\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)}\text{; обозначение: } \alpha \underset{n}{\leq} \beta .$$

Если существует о.р.ф. $f(x)$, которая при каждом значении x ограничивает сверху число смен значений в последовательности $\varphi(0,x), \varphi(1,x),\ldots, \varphi(n,x),\ldots$, то сводимость назовем предельной ограниченной (п.о.) функцией $f(x)$. Саму функцию $f(x)$ будем называть функцией, ограничивающей сводящую функцию, или мажорантой сводящей функции $\varphi(n,x)$. Эту сводимость обозначим $\alpha \underset{\text{по},f(x)}{\leq} \beta$.

Введем отношение порядка на совокупности общерекурсивных одноместных функций. Будем считать $f(x) \preccurlyeq h(x)$, если множество

$\{x \mid h(x) < f(x)\}$ конечно. Очевидно, что если о.р.ф. $f(x)$ является мажорантой некоторой о.р.ф. $\varphi(n,x)$, то любая функция $h(x) \geqslant f(x)$ будет мажорантой о.р.ф. $\varphi_1(n,x)$, которая получается из $\varphi(n,x)$ изменением значений на конечном множестве аргументов.

Из определения видно, что мажоранта является неотрицательной функцией, и если о.р.ф. $\varphi(n,x)$ мажорируется некоторой о.р.ф. $f(x)$, то при каждом значении $k \in \omega$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n,k)$.

ТЕОРЕМА I. Если вычислимые индексации α, β класса K^* конструктивных моделей и о.р.ф. $f(x) \geqslant 3$ таковы, что $\alpha < \beta$, $\beta \underset{\text{по},f(x)}{\leq} \alpha$, $\beta \underset{\text{по},f(x)\dot{-}1}{\nleq} \alpha$, то существует такая вычислимая индексация γ этого же класса K^*, что $\alpha < \gamma$, $\gamma \underset{\text{по},1}{\leq} \beta$, $\gamma \underset{\text{по},f([\frac{x}{2}])\dot{-}1}{\leq} \alpha$, $\gamma \underset{\text{по},f([\frac{x}{2}])\dot{-}3}{\nleq} \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\varphi(n,x)$ о.р.ф., которая соответствует сводимости $\beta \underset{\text{по},f(x)}{\leq} \alpha$. Так как $\beta \underset{\text{по},f(x)\dot{-}1}{\nleq} \alpha$, то о.р.ф. $f(x)$ является достижимой мажорантой предельно сводящей функции $\varphi(n,x)$, т.е. непусто множество таких x, что в последовательности $\varphi(0,x),\ldots,\varphi(n,x),\ldots$ смен значений ровно $f(x)$. Обозначим через $h(x)$ о.р.ф., задающую сводимость $\alpha \leq \beta$.

Зададим сначала вспомогательную индексацию γ^1 класса K^*. Для этого рассмотрим множество N_1 таких x, что смен значений в последовательности $\{\varphi(n,x) \mid n \in \omega\}$ не меньше $f(x) \dot{-} 1$. Очевидно, что это множество рекурсивно-перечислимо. Но оно не может быть рекурсивным, так как в противном случае мы, переопределив сводящую функцию, получили бы сводимость $\beta \underset{\text{по},f(x)\dot{-}1}{\leq} \alpha$, что противоречит условию теоремы. Эффективное перечисление в индексации β нумераций, номера которых лежат в множестве N_1, обозначим через β^1. Ясно, что β^1 будет вычислимой индексацией некоторого подкласса класса K^*. Вычислимую индексацию γ^1 класса K^* определим как прямую сумму $\gamma^1 = \beta^1 \oplus \alpha$. Причем $\gamma^1_{2i} \underset{a}{\equiv} \beta_{n_i}$, где n_i - i-е число в пересечении элементов множества N_1, и в последовательности $\varphi(0,n_i),\ldots,\varphi(t,n_i),\ldots$ смен значений не меньше $f(n_i) \dot{-} 1$. Пусть t_i выбрано так, что в последовательности $\varphi(0,n_i),\ldots,\varphi(t_i,n_i)$

смен значений ровно $f(n_1) \dot{-} 1$. Определим новую функцию $\Psi(t,i)$ так:

$$\Psi(t,i) = \begin{cases} k, & \text{если } i = 2k+1; \\ \varphi(t_k + t, n_k), & \text{если } i = 2k. \end{cases}$$

Легко понять, что функция $\Psi(t,i)$ является общерекурсивной и в последовательности $\Psi(0,i), \Psi(1,i), \ldots, \Psi(t,i), \ldots$ число смен значений может быть не более одного. Кроме того, выполняется равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \Psi(t,2k) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t,n_k)$. Теперь нетрудно заметить, что о.р.ф. $\Psi(t,i)$ задает сводимость $\gamma^1 \underset{\text{по},1}{\le} \alpha$.

Покажем, что $\gamma^1 \not\le \alpha$. Предположим противное, т.е. что $\gamma^1 \le \alpha$ общерекурсивной функцией $h_1(x)$. Определим функцию $g(t,x)$ следующим алгоритмом. Если число смен значений в последовательности $\varphi(0,x), \ldots, \varphi(t,x)$ не превосходит величины значения $f(x) \dot{-} 2$, то полагаем $g(t,x) = \varphi(t,x)$. Если же при данном t_0 обнаружено, что в последовательности $\varphi(0,x), \ldots, \varphi(t_0,x)$ число смен значений больше $f(x) \dot{-} 2$, т.е. $f(x) \dot{-} 1$, то находим такое n_x, что $\beta_x \underset{a}{\equiv} \beta^1_{n_x}$. После этого для $t \ge t_0$ полагаем $g(t,x) = h_1(2n_x)$. Очевидно, что число смен значений в последовательности $g(0,x), \ldots, g(t,x), \ldots$ не больше $f(x) \dot{-} 1$.

Если последовательности $\{g(t,x) \mid t \in \omega\}$ и $\{\varphi(t,x) \mid t \in \omega\}$ совпадают, то $\lim\limits_{t\to\infty} g(t,x) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t,x)$ и $\beta_x \underset{a}{\equiv} \alpha_{\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,x)} \underset{a}{\equiv} \alpha_{\lim\limits_{t\to\infty} g(t,x)}$.

Если же, начиная с некоторого t_0, имеем $g(t,x) = h_1(2n_x)$, где $t \ge t_0$, то выполняются соотношения $\lim\limits_{t\to\infty} g(t,x) = h_1(2n_x)$ и $\beta_x \underset{a}{\equiv} \beta^1_{n_x} \underset{a}{\equiv} \alpha_{h_1(2n_x)} \underset{a}{\equiv} \alpha_{\lim\limits_{t\to\infty} g(t,x)}$.

Следовательно, функция $g(t,x)$ общерекурсивна и осуществляет сводимость $\beta \underset{\text{по},f(x)\dot{-}1}{\le} \alpha$, что противоречит условию теоремы. Значит, предположение $\gamma^1 \le \alpha$ неверно.

Из определения вычислимой индексации γ^1 ясно, что $\alpha \le \gamma^1$ общерекурсивной функцией $d(x) = 2x+1$.

Прежде чем определять нужную индексацию γ класса K^*, построим еще одну вспомогательную вычислимую индексацию β^2 некоторого подкласса $K^*_2 \subseteq K^*$. Построение этой индексации и соответствующих ей моделей осуществим по шагам.

Построение β^2

ШАГ $t \geq 0$. Для $i < t$ определяем число $l_i(t)$ смен значений в последовательности $\varphi(0,i), \ldots, \varphi(t,i)$. Если $l_i(t) \leq f(i) \dot{-} 2$, то полагаем $\mathfrak{M}^t_{\beta^2_i} = \mathfrak{M}^t_{\beta_i}$.

Если же $l_i(t) = (f(i) \dot{-} 2) + 1$ и для $t_1 < t$ число $l_i(t_1) \neq (f(i) \dot{-} 2) + 1$, то подбираем такое n_i, что

$$\mathfrak{M}^t_{\beta^2_i} \hookrightarrow \mathfrak{M}_{\alpha_{n_i}} .$$

Полагаем

$$\mathfrak{M}^t_{\beta^2_i} = \mathfrak{M}^t_{\alpha_{n_i}} \cup \mathfrak{M}^{t-1}_{\beta_i} .$$

Если $l_i(t) > f(i) - 2$ и на шаге $t_0 < t$ была осуществлена вложимость

$$\mathfrak{M}^{t_0 - 1}_{\beta^2_i} \hookrightarrow \mathfrak{M}_{\alpha_{n_i}} ,$$

то полагаем

$$\mathfrak{M}^t_{\beta^2_i} = \mathfrak{M}^t_{\alpha_{n_i}} \cup \mathfrak{M}^{t_0 - 1}_{\beta_i} .$$

Для всех $i \geq t$ полагаем $\mathfrak{M}^t_{\beta^2_i} = \emptyset$ и переходим к выполнению следующего шага.

Определяем $\mathfrak{M}^t_{\beta^2_i} = \bigcup_t \mathfrak{M}^t_{\beta^2_i}$. Построение закончено.

Заметим, что если число смен значений в последовательности $\varphi(0,i), \ldots, \varphi(t,i), \ldots$ не превосходит $f(i) \dot{-} 2$, то $\beta^2_i \underset{a}{\equiv} \beta_i$. Если же число смен значений в этой последовательности больше $f(i) \dot{-} 2$, то $\beta^2_i \underset{a}{\equiv} \alpha_{n_i}$ для подходящего α-индекса n_i.

Теперь определим искомую индексацию γ класса K^*, а именно $\gamma = \beta^2 \oplus \alpha$.

Установим сводимость $\gamma \underset{\text{по}, f([\frac{x}{2}]) \dot{-} 1}{\leq} \alpha$. Для этого определим сводящую функцию $\Psi_1(t,i)$:

$$\Psi_1(t,i)=\begin{cases} k\text{, если } & i=2k+1;\\ \varphi(t,i)\text{, если } & i=2k \text{ и } l_k(t)\le f(i)\dot{-}2;\\ n_k \text{ - в противном случае,}\end{cases}$$

где $l_k(t)$ и n_k - соответствующие значения из описанного выше построения индексации β^2. Легко понять, что эта функция общерекурсивна и задает соответствующую сводимость.

ЛЕММА I.

$$\gamma \underset{\text{по},f([\frac{x}{2}])\dot{-}3}{\not\leq} \alpha .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\gamma \underset{\text{по},f([\frac{x}{2}])\dot{-}3}{\leq} \alpha$ о.р.ф. $h_2(t,x)$. Определим новую функцию:

$$g_1(t,x)=\begin{cases} h_2(t,x)\text{, если на шаге } t \text{ нумерация } \beta^2_x \text{ строилась в соответствии с } \beta_x;\\ \Psi(t,2k_x) \text{ - в противном случае,}\end{cases}$$

где через k_x обозначен β^1-индекс конструктивной нумерации β_x.

Заметим, что если после некоторого шага t_0 нумерация β^2_x будет уже строиться как подходящая конструктивизация α_{h_x} , то в последовательности $\varphi(0,x),\dots,\varphi(t_0,x)$ через $f(x)\dot{-}1$ обозначено число смен значения. Следовательно, конструктивная нумерация β_x будет включена в индексацию β^1 в соответствии с определением множества N_1 . В этой нумерации β_x соответствующий ей β^1-индекс обозначен через k_x , и находится он эффективно. Этим самым установлена рекурсивность функции $g_1(t,x)$.

Если $\lim\limits_{t\to\infty} g_1(t,x)=\lim\limits_{t\to\infty} h_2(t,2x)$, то

$$\beta_x \underset{a}{\equiv} \alpha_{\lim\limits_{t\to\infty} h_2(t,2x)} \underset{a}{\equiv} \alpha_{\lim\limits_{t\to\infty} g_1(t,x)} .$$

Если же $\lim\limits_{t\to\infty} g_1(t,x)=\lim\limits_{t\to\infty}\Psi(t,2k_x)$, то

$$\beta_x \underset{a}{\equiv} \gamma^1_{2k_x} \underset{a}{\equiv} \alpha_{\lim\limits_{t\to\infty}\Psi(t,2k_x)} \underset{a}{\equiv} \alpha_{\lim\limits_{t\to\infty} g_1(t,x)} .$$

Заметим, что число смен значений в последовательности $\{g_1(t,x)\,|\,t\in\omega\}$, получающееся вследствие первоначального опре -

деления функции $g_1(t,x)$ в соответствии с $h_2(t,2x)$, не может быть больше $f(x) \dot- 3$. При переходе к определению значений функции $g_1(t,x)$ в соответствии с функцией $\Psi(t,2k_x)$ вместо $h_2(t,2x)$ в рассматриваемой последовательности может произойти еще одна замена значения. При дальнейшем определении значений функции $g_1(t,x)$ с ростом t в соответствии с функцией $\Psi(t,2k_x)$ может произойти еще одна смена значения, но не более. Значит, всего смен значений в рассматриваемой последовательности $\{g_1(t,x) \mid t \in \omega\}$ не будет превосходить величины $f(x) \dot- 1$. Этим мы установили, что о.р.ф. $g_1(t,x)$ задает сводимость $\beta \underset{\text{по},f(x)\dot-1}{\le} \alpha$. Но это противоречит условию теоремы. Значит, $\gamma \underset{\text{по},f([\frac{x}{2}])\dot-3}{\not\le} \alpha$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Выполнена сводимость $\gamma \underset{\text{по},1}{\le} \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если γ - индекс нечетный, то $\gamma_{2k+1} \underset{a}{\equiv} \alpha_k$. По условию теоремы α сводится к β общерекурсивной функцией $h(x)$. А тогда $\gamma_{2k+1} \underset{a}{\equiv} \beta_{h(k)}$.

Рассмотрим теперь конструктивную нумерацию γ_{2k} с четным γ-индексом. Если при построении γ_{2k} ее последователь β_x не меняется, то очевидно $\gamma_{2k} \underset{a}{\equiv} \beta_k$. В случае замены последователя β_k нумерации γ_{2k} конструктивной нумерацией α_{n_k} в результате построения мы получим $\gamma_{2k} \underset{a}{\equiv} \beta_{h(n_k)}$. Лемма доказана.

Из лемм I,2 и установленных сводимостей $\alpha \le \gamma, \gamma \underset{\text{по},f([\frac{x}{2}])\dot-1}{\le} \alpha$ следует, что вычислимая индексация γ удовлетворяет нужным требованиям.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть α, β - вычислимые индексации класса K^* таковы, что $\alpha \le \beta$, $\beta \underset{\text{по},k}{\not\le} \alpha$, $\beta \underset{\text{по},k+1}{\le} \alpha$. Тогда у класса K^* существует вычислимая индексация γ такая, что $\alpha \le \gamma \underset{\text{по},1}{\le} \beta$, $\beta \le \gamma$, $\gamma \underset{\text{по},k\dot-2}{\not\le} \alpha$, $\gamma \underset{\text{по},k}{\le} \alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если у класса K^* имеются вычислимые индексации α, β такие, что $\alpha \le \beta$, $\beta \underset{\text{по},k+1}{\le} \alpha$, $\beta \underset{\text{по},k}{\not\le} \alpha$, то $|L(K^*)| \ge [\frac{k+1}{2}]+2$.

Применяя следствие I, получаем такое γ^1, что

$$\alpha \le \gamma^1 \underset{\text{по},1}{\le} \beta,\ \beta \not\le \gamma,\ \gamma^1 \underset{\text{по},1}{\le} \alpha,\ \gamma^1 \underset{\text{по},k-2}{\not\le} \alpha \ .$$

Если к тому же $\gamma^1 \underset{\text{по},k-1}{\not\le} \alpha$, то, положив $\alpha^1 = \alpha$, $\beta^1 = \gamma^1$ и взяв $k-1$ вместо k, при $k>1$ можно снова применить следствие I.

Если же $\gamma^1 \underset{\text{по},k-1}{\le} \alpha$, то при тех же α^1, β^1 и $k-2$ вместо k при $k>2$ снова применимо следствие I.

Продолжая это процесс $[\frac{k+1}{2}]$ раз, получаем последовательность индексаций

$$\alpha \le \gamma^{[\frac{k+1}{2}]} \underset{\text{по},1}{\le} \gamma^{[\frac{k+1}{2}]-1} \underset{\text{по},1}{\le} \ldots \underset{\text{по},1}{\le} \gamma^1 \underset{\text{по},1}{\le} \beta$$

такую, что

$$\gamma^{[\frac{k+1}{2}]-j} \not\le \alpha,\ \beta \not\le \gamma^{[\frac{k+1}{2}]-j},\quad \gamma^{[\frac{k+1}{2}]-i} \not\le \gamma^{[\frac{k+1}{2}]-j}$$

для $[\frac{k-1}{2}] > i > j \ge 0$. Поэтому они определяют различные классы эквивалентных элементов в полурешетке $L(K^*)$ вычислимых индексаций класса K^*. Отсюда и следует оценка мощности этой полурешетки: $|L(K^*)| \ge [\frac{k+1}{2}]+2$.

Следствие доказано.

Введем индукцией по n суммы $S_n(k)$:

$$S_1(k) = S(k) = 1 + 2 + \ldots + k,$$

$$S_{n+1}(k) = S_n(1) + S_n(2) + \ldots + S_n(k).$$

Очевидно, что при каждом n выполняется импликация

$$m < k \Rightarrow S_n(m) < S_n(k).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для $n \ge 1$ и $k > 1$ выполняются следующие неравенства:

а) $S_{2n-1}(k) \le S^n(k)$;

б) $S_{2n}(k) < k \cdot S^n(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого предложения проведем индукцией по n. Пусть $n = 1$, тогда $S_1(k) = S(k) = S^1(k)$, $S_2(k) = S_1(1) + S_1(2) + \dots + S_1(k) < S(k) + S(k) + \dots + S(k) = k \cdot S(k)$.

Предположим, что при $n = m$ утверждение верно. Рассмотрим случай $n = m+1$:

$$\begin{aligned} S_{2m+1}(k) &= S_{2m}(1) + \dots + S_{2m}(k) = S_{2m-1}(1) + (S_{2m-1}(1) + \\ &+ S_{2m-1}(2)) + \dots + (S_{2m-1}(1) + S_{2m-1}(2) + \dots + S_{2m-1}(k)) = \\ &= (k \cdot S_{2m-1}(1) + (k-1)S_{2m-1}(2) + \dots + 1 \cdot S_{2m-1}(k)) < \\ &< S_{2m-1}(k)(k + (k-1) + \dots + 1) = S_{2m-1}(k) \cdot S(k) \le \\ &\le S^m(k) \cdot S(k) = S^{m+1}(k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2m+2}(k) &= S_{2m+1}(1) + S_{2m+1}(2) + \dots + S_{2m+1}(k) = \\ &= S_{2m}(1) + (S_{2m}(1) + S_{2m}(2)) + \dots \\ &\dots + (S_{2m}(1) + S_{2m}(2) + \dots + S_{2m}(k)) = \\ &= k \cdot S_{2m}(1) + (k-1)S_{2m}(2) + \dots + 1 \cdot S_{2m}(k) < \\ &< S_{2m}(k)(k + (k-1) + \dots + 1) < \\ &< k \cdot S^m(k) S(k) = k \cdot S^{m+1}(k). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Заметим, что в п."а" предложения I равенство справедливо только при $n = 1$.

Для каждого $n \ge 1$ определим функцию

$$R_n(k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \, S_{i+1}(k).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Функция $R_n(k)$ мажорируется некоторым многочленом $P_{n+2}(k)$ степени $n+2$.

Вначале рассмотрим случай нечетного $n = 2m-1$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{2m-1}(k) &= \sum_{i=0}^{2m-1} C_{2m-1}^i S_{i+1}(k) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2i} S_{2i+1}(k) + \sum_{i=1}^{m} C_{2m-1}^{2i-1} S_{2i}(k). \end{aligned}$$

Б силу предложения I получаем

$$R_{2m-1}(k) < \sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2i} S^{i+1}(k) + \sum_{i=1}^{m} C_{2m-1}^{2i-1} \cdot k \cdot S^{i}(k).$$

Легко понять, что в правой части неравенства стоит некоторый многочлен от k степени $2m + 1$.

Пусть теперь $n = 2m$. Тогда

$$R_{2m}(k) = \sum_{i=0}^{2m} C_{2m}^{i} S_{i+1}(k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_{2m}^{2i} S_{2i+1}(k) + \sum_{i=1}^{m} C_{2m}^{2i-1} S_{2i}(k) .$$

Вновь в силу предложения I правую часть этого равенства можно оценить многочленом степени $2m + 2$ от k. Поэтому получаем

$$R_{2m}(k) < \sum_{i=0}^{m} C_{2m}^{2i} S^{i+1}(k) + \sum_{i=1}^{m} C_{2m}^{2i-1} \cdot k \cdot S^{i}(k) .$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. $\sum_{i=1}^{n} R_i(k) \prec k^{n+3}$.

Действительно, по предложению 2 имеем $R_i(k) \prec P_i(k)$, где $P_i(k)$ - подходящий многочлен степени $i + 2$. А тогда

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(k) \prec \sum_{i=1}^{n} P_i(k) .$$

В правой части этого неравенства, очевидно, стоит многочлен, старший член которого определяется старшими членами двух слагаемых $P_n(k)$ и $P_{n-1}(k)$. Поэтому степень этого многочлена не превосходит $n + 2$. Таким образом, получаем требуемое соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(k) \prec k^{n+3} .$$

ТЕОРЕМА 2. Если у класса K^* конструктивных моделей имеются вычислимые индексации α, β такие, что $\alpha \not\leq_{\text{по } x^{n+1}} \beta$, то $|L(K^*)| \geq n-1$.

Рассмотрим вычислимую индексацию $\gamma \equiv \alpha$ класса K^*, получаемую из α "цилиндрификацией": $\gamma_{\langle k,m \rangle} \equiv_a \alpha_k$ при любом m из ω. При каждом фиксированном значении k конструктивные нумерации $\gamma_{\langle k,m \rangle}$

образуют "строку" (k) индексации γ. Исходя из этой вычислимой индексации γ, опишем для $n \geq 1$ построение вычислимых индексаций $\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}$ класса K^*, попарно неэквивалентных между собой.

Построение будем вести по шагам с использованием меток двух типов: $\langle i,j,m \rangle$, $[i,j,m]$. Навешивание их на строящиеся нумерации означает нарушение сводимости индексации γ^i к индексации γ^j с помощью функции φ_m, причем $1 \leq i < j \leq n-1$ и $\gamma^1 \equiv \gamma$. Указанные пары меток упорядочим по лексикографическому порядку. Большим приоритетом, как обычно, обладают меньшие метки.

Для каждой строящейся нумерации γ^i_j будет объявлен последователь $\alpha_{l(j)}$, в соответствии с которым и будет строиться эта нумерация. (Здесь $l(\langle k,m \rangle) = k$.) Последователь $\alpha_{l(j)}$ в процессе построения может смениться на некоторое число β_m, но такая смена последователя у каждой нумерации может быть осуществлена только один раз. Дальнейшее построение нумерации γ^i_j будет вестись уже в соответствии с новым последователем β_m.

Первоначально все метки первого типа $\langle i,j,m \rangle$, где $m \geq 0$ и $1 \leq i < j \leq n-1$, включаем в так называемый список меток для рассмотрения. В процессе построения этот список корректируется путем либо исключения, либо включения в него меток первого типа. Каждый шаг $t \geq 1$ построения состоит из $n-2$ подшагов.

Построение моделей $(\mathfrak{M}_{is}, \gamma^i_s)$

ШАГ 0. Для всех $s \in \omega$, $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, полагаем $\mathfrak{M}_{is} = \emptyset$. Переходим к следующему шагу построения.

ШАГ $t+1$. Для $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, $\langle s,r \rangle \leq t$ у нумерации $\gamma^i_{\langle s,r \rangle}$, которая еще не имеет последователя, объявляем последователем α_s. Во всех строящихся конструктивных нумерациях, имеющих последователей, перечисляем по одному элементу в соответствии с их последователями.

Начиная с $k+1$, выполняем подшаги k, увеличивая значение k последовательно до $n-2$.

ПОДШАГ k. Выбираем метки вида $\langle k,j,m \rangle$ из списка для рассмотрения, где $m \leq t$, $1 \leq k < j \leq n-1$. Для каждой такой метки находим первую "строку" (l) с $l \geq m$, в которой еще нет нумераций с меткой $\langle k,j,m \rangle$. Выбираем наименьшее значение s такое, что нумерация $\gamma^k_{\langle l,s \rangle}$ свободна от меток и имеет последователем конструктивизацию α_l. Навешиваем на нумерацию $\gamma^k_{\langle l,s \rangle}$ все метки

$\langle k,j,m\rangle$, вторая координата которых удовлетворяет неравенству $k < j \le n-1$, $m \le t$. Исключаем эти метки из списка для рассмотрения.

Преверяем условие $r \in \rho\varphi_p^t$ для таких r,p ,что нумерация γ_r^k индексации γ^k отмечена меткой $\langle k,j,p\rangle$,но среди строящихся нумераций нет таких, которые отмечены меткой $[k,j,p]$.

Если таких r,p нет, то переходим к выполнению подшага $k+1$, если $k < n-2$, и к выполнению следующего шага, если $k = n-2$.

В случае наличия таких r,p на нумерации $\gamma^j_{\varphi_p(r)}$ навешиваем метку $[k,j,p]$ для всех j , удовлетворяющих неравенству $k<j\le n-1$. Если у такой нумерации $\gamma^j_{\varphi_p(r)}$ последователем является некоторая конструктивизация β_s или $l(\varphi_p(r)) < l(r)$,то последователя этой нумерации $\gamma^j_{\varphi_p(r)}$ оставляем без изменения. Если же последователем нумерации $\gamma^j_{\varphi_m(r)}$ является конструктивизация $\alpha_{l(\varphi_p(r))}$ и $l(\varphi_p(r)) \ge l(r)$, то подбираем такое i , что $\mathfrak{M}^t_{j\varphi_p(r)} \hookleftarrow \mathfrak{M}_{\beta_i}$. Объявляем соответствующую конструктивизацию β_i новым последователем нумерации $\gamma^j_{\varphi_p(r)}$. При наличии на нумерации $\gamma^j_{\varphi_p(r)}$ метки вида $\langle j,v,w\rangle$ снимаем эту метку с нумерации $\gamma^j_{\varphi_p(r)}$ и включаем в список для рассмотрения. Со строящихся нумераций снимаем соответствующие метки $[j,v,w]$, если они уже были навешаны на некоторые строящиеся нумерации.

При $k = n-2$ переходим к выполнению следующего шага построения. В случае $k<n-2$ переходим к выполнению подшага $k+1$.

Полагаем $\mathfrak{M}_{ij} = \bigcup\limits_t \mathfrak{M}^t_{ij}$.

Построение закончено.

В силу эквивалентности перечисления элементов модели $\mathfrak{M}_{ij}$ очевидна конструктивность нумерации γ^i_j этй модели. Если последователь $\alpha_{l(j)}$ у нумерации γ^i_j не меняется, то в результате построения очевидно получим $\gamma^i_j \underset{a}{\equiv} \alpha_{l(j)}$. Заметим, что у каждой строящейся нумерации последователь может меняться не более одного раза. При замене последователя $\alpha_{l(j)}$ у нумерации γ^i_j на некоторую конструктивизацию β_{m_j} в результате построения будем иметь $\gamma^i_j \underset{a}{\equiv} \beta_{m_j}$.

Для каждого фиксированного $i \in \{1,\dots,n-1\}$ определим класс K^*_i конструктивных моделей, а именно:

$$K^*_i \rightleftharpoons \{(\mathfrak{M}_{ij}, \gamma^i_j) \mid j \in \omega\}.$$

Из сказанного выше заключаем, что для каждого $i \in \{1,\dots,n-1\}$ выполняется включение $K^*_i \subseteq K^*$. В силу равномерности описанного построения заключаем, что γ^i_j является вычислимой индексацией соответствующего класса K^*_i .

ЛЕММА I. В "строке" $(k)_i = \{\gamma^i_{\langle k,s\rangle} \mid s \in \omega\}$ индексации γ^i, $1 \le i \le n-1$, число замен α-последователей β-последователями не превосходит числа $\sum\limits_{j=1}^{i-1} R_j(k+1)$.

Действительно, в построении индексаций γ^1 последователи совсем не меняются. В строке $(k)_2$ индексации γ^2 замена α-последователей β-последователями может происходить за счет определения значений от индексов из строк: $(0)_1$ - по функции φ_0; $(1)_1$ - по функциям $\varphi_0, \varphi_1, \dots$; $(k)_1$ - по функциям $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$. Но для каждой функции используется только одно значение аргумента из соответствующей строки. Следовательно, замена α-последователей β-последователями в строке $(k)_2$ может произойти не более $S(k+1) = R_1(k+1)$ раз. Заметим, что эта оценка верна для любой индексации $\gamma^i, i \ge 2$, в случае рассмотрения только образов от индексов нумераций индексации γ^1.

С другой стороны, полученная оценка гарантирует, что в строке $(k)_2$ метки первого типа могут ставиться не более $R_1(k+1) + (k+1)$ раз. Поэтому замена α-последователей β-последователями в строке $(k)_3$ за счет определения образов от γ^2-индексов ограничивается сверху величиной $(1 + S_1(1)) + (2 + S_2(2)) + \dots \dots + (k+1+S_1(k+1)) = S(k+1) + S_2(k+1)$. Всех замен α-последователей β-последователями в строке $(k)_3$ будет проведено не более $S(k+1) + (S(k+1) + S_2(k+1)) = R_1(k+1) + R_2(k+1)$ раз. Снова заметим, что эта оценка верна для каждой индексации γ^i, $i \ge 3$, в случае рассмотрения образов от γ^1- и γ^2-индексов. А тогда легко понять, что метки первого типа в строке $(k)_3$ могут навешиваться не более $(k+1) + 2S(k+1) + S_2(k+2)$ раз.

Учитывая, что в строке $(k)_i$ замена α-последователя β-последователем происходит только за счет определения значений из строк с номерами, не превосходящими k, всех предыдущих индексаций, нетрудно установить возможное число замен α-последователей β-последователями в строке $(k)_j$ в зависимости от индексаций γ^i, где $i < j$. Каждая такая оценка представляет собой сумму $\sum_l a_{jl} S_l(k+1)$. Выпишем значения коэффициентов a_{jl} в виде таблицы.

Таблица

γ^i	S_l					
	$S_1(k+1)$	$S_2(k+1)$	$S_3(k+1)$	$S_4(k+1)$	$S_5(k+1)$	...
γ^1						...
γ^2	1					...
γ^3	1	1				...
γ^4	1	2	1			...
γ^5	1	3	3	1		...
...	...	...	...	...	...	...

Значение a_{il}, соответствующее пересечению строки индексации γ^i и столбца суммы $S_l(k+1)$, определяется по формуле

$$a_{il} = \sum_{r=1}^{i-1} a_{r,l-1}\ , \quad \text{где} \quad l > 1\ .$$

Заметим, что для $l = 1$ всегда $a_{i1} = 1$. Из этого правила заполнения этой таблицы видно, что ненулевые значения коэффициентов a_{il} образуют треугольник Паскаля.

Теперь нетрудно понять, что искомое число возможных замен α-последователей β-последователями в строке $(k)_i$, где $i > 1$, определяется как сумма

$$\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} a_{jl} S_l(k+1) = \sum_{j=1}^{i-1} R_j(k+1).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для каждого $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ справедливо равенство $K_i^* = K^*$.

Ранее уже отмечалось, что при каждом $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ выполняется включение $K^*_i \subseteq K^*$. Установим обратные включения. Как ясно из леммы I, в каждой строке $(k)_i$ замен α-последователей β-последователями происходит не более $\sum_{j=1}^{i-1} R_j(k+1)$ раз. В силу бесконечности строки $(k)_i$ там найдется конструктивизация $\gamma^i_{\langle k,s\rangle}$, у которой исходный последователь α_k не меняется. Поэтому в результате построения будем иметь $\gamma^i_{\langle k,s\rangle} \underset{a}{\equiv} \alpha_k$. По условию α является вычислимой индексацией класса K^*, следовательно, $K^* \subseteq K^*_i$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для различных i,j из множества $\{1,2,\dots,n-1\}$ индексации γ^i, γ^j не эквивалентны.

Предположим противное, т.е. что $\gamma^i \equiv \gamma^j$ для $i<j$ из множества $\{1,2,\dots,n-1\}$. Тогда имеем сводимость $\gamma^i \le \gamma^j$ подходящей общерекурсивной функцией φ_m. Исходя из этой функции, определим предельную сводимость индексации α к индексации β. Для конструктивных нумераций $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ будем считать заданными им соответствующие автоэквивалентные нумерации $\beta_{k_0}, \beta_{k_1}, \dots, \beta_{k_m}$. Зададим алгоритм вычисления двухместной общерекурсивной функции $\Psi(t,r)$. Если $r \le m-1$, то для всех $t \in \omega$ положим $\Psi(t,r) = k_r$. При $r \ge m$ полагаем $\Psi(t,r) = s_r$ такому, что для нумерации $\gamma^i_{\langle r,p\rangle}$, отмеченной на шаге t меткой $\langle i,j,m\rangle$ при $i<j\le n-1$, определится значение $\varphi_m(\langle r,p\rangle)$ и нумерация $\gamma^j_{\varphi_m(\langle r,p\rangle)}$ получит последователя β_{s_r}, т.е. $l(\varphi_m(\langle r,p\rangle)) \ge r$. Если же $l(\varphi_m(\langle r,p\rangle)) = r_1 < r$, то возможны два случая:

I) На некотором шаге $t_1 \ge t$ у нумерации $\gamma^j_{\varphi_m(\langle r,p\rangle)}$ последователем объявляется $\beta_{s_{r_1}}$, тогда $\Psi(t,r) = s_{r_1}$.

2) На некотором шаге $t_1 \ge t$ определится значение $\varphi_m(\langle r_1,p_1\rangle)$, где $\langle r_1,p_1\rangle$ является индексом нумерации $\gamma^i_{\langle r_1,p_1\rangle}$, отмеченной меткой $\langle i,j,m\rangle$. Если на подходящем шаге $t_2 \ge t_1$ последователь у нумерации $\gamma^j_{\varphi_m(\langle r_1,p_1\rangle)}$ сменится последователем $\beta_{s_{r_1}}$, то полагаем $\Psi(t,r) = s_{r_1}$.

Если же у нумерации $\gamma^j_{\varphi_m}(\langle\langle r_1,p_1\rangle\rangle)$ последователем является α_{r_1}, то необходимо вести рассуждения, аналогичные только что описанным, взяв r_1 в качестве r.

Продолжая эти рассуждения нужное число раз, мы либо определим некоторое s_{r_d}, либо при некоторых r_d, p_d получим значение $\varphi_m(\langle\langle r_d,p_d\rangle\rangle)$ такое, что $\gamma^j_{\varphi_m}(\langle\langle r_d,p_d\rangle\rangle)$ имеет последователем α_q и $q = l(\varphi_m(\langle\langle r_d,p_d\rangle\rangle)) < m$. В таком случае полагаем $\Psi(t,r) = k_q$.

Оценим число смен значений у определенной выше функции $\Psi(t,r)$ в зависимости от роста аргумента t. Длина цепочки $r > r_1 > r_2 > \ldots$ не превосходит r. Поэтому число смен значений функции $\Psi(t,r)$ за счет замен α-последователей β-последователями у нумераций, соответствующих этой цепочке, не превосходит r. Каждое α_{r_v} смен значений функции $\Psi(t,r)$ за счет передвижек метки $\langle i,j,m\rangle$ в соответствующей строке может вынуждать не более $\sum_{s=1}^{i-1} R_s(r_v+1)$ раз. Так как $r_v < r$, то

$$\sum_{s=1}^{i-1} R_s(r_v+1) < \sum_{s=1}^{i-1} R_s(r+1) .$$

Поэтому число всех смен значений функции $\Psi(t,r)$ при росте t меньше $r \cdot \sum_{s=1}^{i-1} R_s(r+1)$.

В силу предложения 2 получаем

$$r \cdot \sum_{s=1}^{i-1} R_s(r+1) < r\, r^{i+2} .$$

По выбору i,j имеем $i < j \le n-1$, т.е. $i \le n-2$. Следовательно, число смен значений в последовательности $\Psi(0,r), \ldots, \Psi(t,r), \ldots$ не превосходит величины r^{n+1}.

Функция φ_m сводит индексацию γ^i к индексации γ^j, поэтому имеем $\gamma^i_{\langle r,l\rangle} \equiv \gamma^j_{\varphi_m}(\langle\langle r,l\rangle\rangle)$.

А тогда при $k=r$ и подходящем l получаем, что у нумерации $\gamma^i_{\langle k,l\rangle}$ последователем является α_k и этот последователь не меняется. Пусть t_0 - шаг, после которого значения функции $\Psi(t,k)$ не меняются. Из определения этой функции через функцию $\varphi_m(x)$ легко понять, что $\alpha_k \underset{a}{\equiv} \beta_{\Psi(t,k)}$ при $t \ge t_0$. Таким образом, функция $\Psi(t,k)$

общерекурсивна и определяет предельную ограниченную сводимость $\alpha \underset{\text{по},X^{n+1}}{\leq} \beta$, но это противоречит условию теоремы.

Следовательно, при $i < j < n-1$ имеем $\gamma^i \not\leq \gamma^j$.

Лемма доказана.

Исходя из доказанных лемм, легко понять, что индексации γ^1, $\gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}$ искомые.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если у класса K^* конструктивных моделей имеются вычислимые индексации α, β такие, что $\alpha \underset{\text{по},2^X}{\not\leq} \beta$, то $|L(K^*)| = \chi_0$.

Действительно, для любого $n \in \omega$ выполняется неравенство $k^{n+1} < 2^k$. А тогда из условия следствия сразу имеем $\alpha \underset{\text{по},k^{n+1}}{\not\leq} \beta$. По теореме получаем нижнюю оценку мощности полурешетки $|L(K^*)| \geq \geq n-1$. В силу произвольности рассматриваемого $n \in \omega$ заключаем, что $|L(K^*)| = \chi_0$.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

2. РОДЖЕРС Х. Рекурсивные функции и эффективная вычислимость. -М.: Мир, 1972.

3. ДОБРИЦА В.П. Структурные свойства вычислимых классов конструктивных моделей //Алгебра и логика. - Новосибирск. - 1987. - Т. 26. № 1. - С. 36-62.

4. ДОБРИЦА В.П. Об ограниченной предельной сводимости вычислимых индексаций классов конструктивных моделей //Логические методы в программировании. - Новосибирск. - 1987. - Вып. 120: Вычислительные системы. - С. 143-158.

5. ДОБРИЦА В.П. Классы с ограниченно эквивалентными индексациями //Прикладные аспекты математической логики. - Новосибирск.- 1987. - Вып. 122: Вычислительные системы. - С. 59-72.

Поступила в ред.-изд.отд.
3 декабря 1987 года