ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ И ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 124

УДК 517.11

ОТНОСИТЕЛЬНО КОНСТРУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

К.Ф. Самохвалов

Обычные конструктивные интерпретации первопорядковых языков следуют идее, что конструктивный смысл сложной формулы должен редуцироваться, как это имеет место в классическом случае, к конструктивным смыслам ее конституентов. Однако на этом пути возникают известные технические (если не принципиальные) трудности. Приходится говорить, например, о функционалах высших типов при попытках конструктивно истолковать формулу с глубиной вхождения импликации больше единицы. Цель работы - убедиться, что ценою отказа от идеи редукционизма можно развить новый подход к конструктивным истолкованиям языков первого порядка, технически менее сложный, чем подходы, связанные с обычными интерпретациями. В частности, в этом новом подходе нет нужды иметь дело с функционалами высших типов при построении конструктивных семантик сложных формул,

1. <u>τ-логики</u>. Пусть L - язык первого порядка сигнатуры σ. Логические символы L: $\&, \vee, \supset, \forall, \exists, \perp$ и, быть может, "равенство" $=$; $\perp$ - атомное высказывание "ложь". Пусть T - исчисление в языке L [ж]; T называется: ф о р м а л ь н ы м, если множество $Thm(T)$ теорем T эффективно перечислимо; п р о т и в о р е ч и в ы м, если $Thm(T) = F(L)$, где $F(L)$ - множество всех формул языка L; н е п р о т и в о р е ч и в ы м, если $\perp \notin Thm(T)$.

Заметим, что допускаются к рассмотрению исчисления, которые в предлагаемой терминологии одновременно ни противоречивы, ни непротиворечивы.

Для любого формального T в L определяем специальное множество $C(T)$ формул из L.

[ж] Термин "исчисление" понимается так, как он определен в [1, с. 21-22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.

(i) Если φ - атомная формула L , то $\varphi \in C(T)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in Thm(T)$;

(ii) если φ имеет вид $(\varphi_1 \ \& \ \varphi_2)$, то $\varphi \in C(T)$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 \in Thm(T)$ и $\varphi_2 \in Thm(T)$;

(iii) если φ имеет вид $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, то $\varphi \in C(T)$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 \in Thm(T)$ или $\varphi_2 \in Thm(T)$;

(iv) если φ имеет вид $(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, то $\varphi \in C(T)$ тогда и только тогда, когда существует эффективное (вообще говоря, частичное) отображение $A_{\varphi_1 \supset \varphi_2}$ из множества всех в T доказательств в себя такое, что если x - доказательство в T формулы φ_1 ,то $A_{\varphi_1 \supset \varphi_2}$ определено на x и $A_{\varphi_1 \supset \varphi_2}(x)$ - доказательство в T формулы φ_2 ;

(v) если φ имеет вид $\forall x \varphi_1(x)$, то $\varphi \in C(T)$ тогда и только тогда, когда существует эффективное тотальное отображение $A_{\forall x \varphi_1(x)}$ из множества всех замкнутых термов из L во множество всех доказательств в T такое, что если t - произвольный замкнутый терм в L , то $A_{\forall x \varphi_1(x)}(t)$ - доказательство в T формулы $\varphi_1(t)$;

(vi) если φ имеет вид $\exists x \varphi_1(x)$, то $\varphi \in C(T)$ тогда и только тогда, когда для некоторого замкнутого терма t в L формула $\varphi_1(t) \in Thm(T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть T - формальное исчисление в языке L.Формула φ в L к о н с т р у к т и в н о и с т и н н а о т н о с и т е л ь н о T (T-истинна), е с л и и т о л ь к о е с л и $\varphi \in C(T)$.

Эти определения говорят о том, что мы собираемся рассматри - вать конструктивно истинные относительно T высказывания в L как коды определенных суждений о системе формальных выводов в T .Вопрос о том, какая именно и почему система T интересна для нас, мы оставляем в стороне, заметив лишь, что он решается всякий раз конкретно, в зависимости от целей исследования, философских предубеждений, технико-математических удобств, вкусов и т.д. Во всяком случае, мы не исключаем, что формулы L имеют какую-то другую семантику, отличную от рассматриваемой, и эта-то другая семантика как раз и связана с выбором данного исчисления T.

К сказанному нужно добавить, что и при обычных конструктивных интерпретациях высказывания в L высказываются в конечном счете о некоей (неявно подразумеваемой или указанной явно, формали -

зованной частично или формализованной с достаточной полнотой) системе средств убеждения ("канонические доказательства", "реализации" и т.д.). Так что коренное отличие предлагаемого подхода заключается не в самом факте относительности конструктивных смыслов формул, а в способе, каким эти конструктивные смыслы образуют суждения о T. Наш способ, как это следует из определений I,2, нарушает у конструктивных значений сложных формул их редукцию к конструктивным значениям их конституентов.

Имеет место следующая очевидная

ТЕОРЕМА I. Если формальное исчисление T противоречиво, то любая формула в L T-истинна.

Пусть, далее, τ - произвольный (непустой) класс формальных исчислений в языке L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $L(\tau)$ всех тех и только тех формул из L, каждая из которых конструктивно истинна относительно каждого T из τ, называется конструктивной логикой класса τ, или, короче, τ-логикой (в L).

Отсюда видно, что

$$L(\tau) = \bigcap_{T \in \tau} C(T). \qquad (1)$$

Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если $\tau \subseteq \tau'$, то $L(\tau') \subseteq L(\tau)$.

Кроме того, из теоремы I и (I) вытекает

ТЕОРЕМА 3. Если T - противоречивое формальное исчисление в L и $\tau' = \tau \cup \{T\}$, то $L(\tau) = L(\tau')$.

Ясно, что τ-логики как множества (формул) частично упорядочены по включению $\subseteq$. Из теоремы I следует, что этот порядок имеет наибольший элемент, и им является множество $F(L)$, совпадающее, в силу теоремы 3, с любой τ_{inc}-логикой, где τ_{inc} - произвольный класс, состоящий только из противоречивых исчислений. Из теоремы 2 вытекает существование наименьшего элемента в рассматриваемом порядке. Этим наименьшим элементом является τ_{all}-логика, где τ_{all} - класс всех формальных исчислений в языке L. Если обозначить через τ_{con} класс всех формальных исчислений в L, не являющихся противоречивыми, и через τ_{con^*} - класс всех непротиворечивых исчислений в L, то в силу теорем 2,3 имеем $L(\tau_{all}) =$

$= L(\tau_{con}) \subseteq L(\tau_{con^*})$. Таким образом, в семействе всех возможных τ-логик в фиксированном языке L, упорядоченных по включению $\subseteq$, наименьшим элементом является конструктивная логика класса τ_{con} (или τ_{all}), а наибольшим - множество $F(L)$ всех формул в L ; τ_{con^*}-логика занимает промежуточное положение. Исчерпывающую информацию на этот счет дают две нижеследующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F_0(L)$ - множество, состоящее точно из всех формул L вида $(\varphi \supset \varphi)$. Тогда $L(\tau_{con}) = F_0(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $F_0(L) \subseteq L(\tau_{con})$ очевидно. Докажем обратное включение

$$L(\tau_{con}) \subseteq F_0(L). \tag{2}$$

Допустим противное. Тогда найдется формула φ в L такая, что

$$\varphi \in L(\tau_{con}) \tag{3}$$

и

$$\varphi \notin F_0(L). \tag{4}$$

Если выполняется (4), то имеют место следующие случаи:

а) $\varphi = (\varphi_1 \supset \varphi_2)$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$[ж)];

или

б) $\varphi = \forall x \ \varphi_1(x)$;

или

в) $\varphi = \exists x \ \varphi_1(x)$;

или

г) $\varphi = (\varphi_1 \ \& \ \varphi_2)$;

или

д) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$;

или

е) φ - атомная.

ж) Запись $\varphi_1 = \varphi_2$ ($\varphi_1 \neq \varphi_2$) - сокращение для " φ_1 есть (не есть) формула φ_2 ".

Случай "а". Рассмотрим исчисление T_{φ_1} с пустым множеством правил вывода и единственной аксиомой φ_1. Ясно, что $T_{\varphi_1} \in \tau_{con}$. Но относительно T_{φ_1} формула φ вида "а" не конструктивно истинна. Следовательно, $\varphi \notin L(\tau_{con})$. Это противоречит (3). Следовательно, случай "а" невозможен.

Случай "б". Рассмотрим любое исчисление T_{φ_2}, имеющее пустое множество правил вывода и единственную аксиому φ_2 такую, что $\varphi_2 \neq \varphi_1$. Снова $T_{\varphi_2} \in \tau_{con}$, но относительно T_{φ_2} формула φ вида "б" не конструктивно истинна. Следовательно, $\varphi \notin L(\tau_{con})$, что ведет к противоречию с (3). Следовательно, случай "б" тоже невозможен.

Аналогичным образом доказывается, что и все остальные случаи "в"-"е" невозможны. Поэтому неверно, что выполняется (4). Противоречие.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $F_1(L)$ - множество, состоящее точно из всех формул L вида $(\varphi \supset \varphi)$ и всех формул вида $(\perp \supset \varphi)$. Тогда $L(\tau_{con^*}) = F_1(L)$.

Мы не приводим доказательства этой теоремы, так как оно получается из предыдущего почти дословным повторением.

Классы $F_0(L)$, $F_1(L)$ выглядят слишком бедными, а класс $F(L)$ - чересчур богатым, поэтому естественно предположить, что τ-логики, представляющие хоть какой-либо практический интерес, все лежат строго между $F_1(L)$ и $F(L)$. Особо отметим одну из таких логик.

Пусть $|\sigma|$ - множество сигнатурных символов языка L. И пусть g - произвольная перестановка на $|\sigma|$ такая, что она каждый предикатный символ переводит в предикатный, а каждый функциональный - в функциональный, причем местности символов обоих видов сохраняются. Очевидно, что каждая такая перестановка g на $|\sigma|$ индуцирует перестановку g' на $F(L)$. Очевидно также, что множества всех перестановок g и всех перестановок g' образуют группы $G(L)$ и $G'(L)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть T - исчисление в L. Будем называть группой (сигнатурных) симметрий T подгруппу $H(T)$ группы $G(L)$ такую, что индуцируемая ею подгруппа $H'(T)$ группы $G'(L)$ состоит в точности из всех перестановок g', переводящих аксиомы T в аксиомы T , а правила вывода T - в правила[ж)] вывода T . Если H(T) не единична, то исчисление T будем называть (с и г н а т у р н о) с и м м е т р и ч н ы м.

Пусть Sym - какая-то эффективно перечислимая подгруппа группы G(L) . Тогда через τ_{Sym} будем обозначать класс всех непротиворечивых формальных исчислений T в L таких, что H(T) = Sym . Очевидно, что для любой Sym класс τ_{Sym} непуст. Ему, например, принадлежит исчисление $T_{Sym\,\varphi}$, имеющее пустое множество правил вывода и эффективно перечислимое множество аксиом $Sym(\varphi) = \{g'\varphi \mid g \in Sym\}$, где φ - произвольная формула L , отличная от $\perp$. Имеет место

ТЕОРЕМА 6. Д л я л ю б о й э ф ф е к т и в н о п е р е ч и с л и м о й п о д г р у п п ы Sym г р у п п ы G(L) л о г и к а $L(\tau_{Sym})$ с о с т о и т в т о ч н о с т и и з в с е х ф о р м у л в и д а $(\perp \supset \varphi)$ и в с е х ф о р м у л в и д а $(\varphi \supset g'\varphi)$, $g \in Sym$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что все формулы указанных видов принадлежат $L(\tau_{Sym})$. Покажем, что $L(\tau_{Sym})$ принадлежат только они. Допустим обратное. Тогда найдется формула ψ в L такая, что

$$\psi \in L(\tau_{Sym}); \tag{5}$$

$$\psi \notin \{(\perp \supset \varphi) \mid \varphi \in F(L)\}; \tag{6}$$

$$\psi \notin \{(\varphi_1 \supset \varphi_2) \mid \varphi_1 \in F(L),\ \varphi_2 \in Sym(\varphi_1)\}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

а) $\psi = (\varphi_1 \supset \varphi_2)$, $\varphi_1 \neq \perp$, $\varphi_2 \notin Sym(\varphi_1)$;

или

б) $\psi = \forall x \ \ \varphi(x)$;

ж) Мы говорим, что перестановка g' на F(L) переводит правило вывода $\dfrac{\varphi_0,\ldots,\varphi_n}{f(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)}$ в правило вывода $\dfrac{\varphi'_0,\ldots,\varphi'_n}{f'(\varphi'_0,\ldots,\varphi'_n)}$, если для всех $\varphi_0,\ldots,\varphi_n,\varphi'_0,\ldots,\varphi'_n \in F(L)$ выполняется равенство $f'(\varphi'_0,\ldots,\varphi'_n) = g'f(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)$ всякий раз, когда $\varphi'_0 = g'\varphi'_0,\ldots,\varphi'_n = g'\varphi_n$.

или

в) $\phi = \exists x \quad \varphi(x)$;

или

г) $\phi = (\varphi_1 \& \varphi_2)$;

или

д) $\phi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$;

или

е) ϕ – атомная.

Случай "а". Рассмотрим исчисление $T_{sym\,\varphi_1}$. С одной стороны, $T_{sym\,\varphi_1} \in \tau_{sym}$; с другой – формула ϕ вида "а" не $T_{sym\,\varphi_1}$-истинна. Следовательно, в рассматриваемом случае $\phi \notin L(\tau_{sym})$. Это противоречит (5). Следовательно, случай "а" не может иметь места.

Случай "б". Рассмотрим исчисление $T_{sym\,\varphi_1}$, где $\varphi_1 \neq \varphi$, $\varphi_1 \neq \perp$. Снова $T_{sym\,\varphi_1} \in \tau_{sym}$, но формула ϕ вида "б" не $T_{sym\,\varphi_1}$-истинна. Следовательно, $\phi \notin L(\tau_{sym})$, что противоречит (5). Следовательно, случай "б" не может иметь места.

Аналогичным образом доказывается, что все остальные случаи также невозможны. Следовательно, неверно, что выполняются (6) и (7). Противоречие с допущением.

Из этой теоремы видно, что $F_1(L) \subseteq L(\tau_{sym}) \subset F(L)$, причем равенство $L(\tau_{sym}) = F_1(L)$ достигается всякий раз, когда Sym – единичная подгруппа группы $C(L)$.

У читателя может возникнуть вопрос: что оправдывает наш специальный интерес к τ_{sym}-логикам? В качестве намека на ответ заметим, что, например, физика часто имеет дело с вещами (левое – правое, частица – античастица и т.д.), характеристики которых симметрично входят в физические теории.

До сих пор мы исследовали конструктивные логики весьма широких классов исчислений. Перейдем теперь к изучению конструктивных логик наименьших возможных классов – единичных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть T_1 и T_2 – произвольные формальные исчисления в L. Будем говорить, что T_2 б о л ь ш е T_1 (писать $T_1 \leq T_2$), если и только если все аксиомы T_1 являются аксиомами T_2 и все правила вывода T_1 являются правилами вывода T_2.

Отношение "больше" не следует путать с отношением "логически (дедуктивно) сильнее". В самом деле, если $T_1 \leq T_2$, то $Thm(T_1) \subseteq \subseteq Thm(T_2)$, но обратное, вообще говоря, неверно: легко указать примеры таких исчислений T_1 и T_2, что $Thm(T_1) \subseteq Thm(T_2)$, но не $T_1 \leq T_2$.

Далее, это отношение - частичный порядок на τ_{all} (и, следовательно, на τ_{con}). Поэтому правомерен вопрос о монотонности $\{T\}$-логик (логик единичных классов $\{T\}$ исчислений T) относительно $\leq$. Нетрудно показать, что $\{T\}$-логики, вообще говоря, не монотонны, а именно: справедлива

ТЕОРЕМА 7. Для данного L, если $G(L)$ имеет неединичную эффективно перечислимую подгруппу Sym, то существуют такие T_1 и T_2, принадлежащие классу τ_{con} (в L), что $T_1 \leq T_2$, но не $L(\{T_1\}) \subseteq \subseteq L(\{T_2\})$ и не $L(\{T_2\}) \subseteq L(\{T_1\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве T_1 исчисление $T_{sym\,\varphi_1}$, имеющее пустое множество правил вывода и множество аксиом

$$Sym(\varphi_1) = \{g'\varphi_1 \mid g \in Sym\}, \tag{8}$$

где φ_1 - произвольная формула L такая, что для некоторой перестановки $g_0 \in Sym$ (Sym не единична)

$$\varphi_1 \neq g_0'\varphi_1 = \varphi_2 . \tag{9}$$

В условиях теоремы $T_{sym\,\varphi_1}$ симметрично, формально и принадлежит τ_{con}.

Пусть

$$\varphi_3 = (\varphi_1 \,\&\, \varphi_2). \tag{10}$$

Тогда, учитывая (8)-(10), имеем:

$$\varphi_3 \notin Sym(\varphi_1) = Thm(T_1); \tag{11}$$

$$g_0'\varphi_3 \notin Sym(\varphi_1); \tag{12}$$

$$g_0'\varphi_3 \neq \varphi_3 . \tag{13}$$

Выберем в качестве T_2 исчисление $T_{sym\,\varphi_1 + \varphi_3}$, имеющее пустое множество правил вывода и множество аксиом

$$\mathrm{Sym}(\varphi_1) + \varphi_3 = \mathrm{Sym}(\varphi_1) \cup \{\varphi_3\}. \qquad (14)$$

Очевидно, что T_2 формально и также принадлежит классу τ_{con} .

Рассмотрим формулу $\varphi_4 = (\varphi_3 \& \varphi_1)$. В силу (II) очевидно, что φ_4 не T_1-истинна, поэтому

$$\varphi_4 \notin L(\{T_1\}). \qquad (15)$$

С другой стороны, φ_4 конструктивно истинна относительно T_2, так как φ_3 и φ_1 обе принадлежат $\mathrm{Thm}(T_2)$ в силу (I4).

Поэтому

$$\varphi_4 \in L(\{T_2\}) . \qquad (16)$$

Из (I5) и (I6) следует, что

$$L(\{T_2\}) \not\subseteq L(\{T_1\}). \qquad (17)$$

Рассмотрим формулу $\varphi_5 = (\varphi_3 \supset g_0^! \varphi_3)$. Из (II), (I2) следует, что φ_5 конструктивно истинна относительно T_1. Поэтому

$$\varphi_5 \in L(\{T_1\}). \qquad (18)$$

В силу (I3) формула $g_0^! \varphi_3 \notin \mathrm{Thm}(T_2)$, а в силу (I4) формула $\varphi_3 \in \mathrm{Thm}(T_2)$. Поэтому формула φ_5 не конструктивно истинна относительно T_2. Отсюда

$$\varphi_5 \notin L(\{T_2\}). \qquad (19)$$

Из (I8) и (I9) вытекает

$$L(\{T_1\}) \not\subseteq L(\{T_2\}). \qquad (20)$$

Наконец, прямо из определений T_1 и T_2 следует, что

$$T_1 \leq T_2 . \qquad (21)$$

В силу (I7),(20), (2I) теорема доказана.

2. Представления τ-логик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Если $L(\tau)$ – конструктивная логика класса τ и $K \subseteq L(\tau)$, то K называется ф р а г м е н т о м τ-л о г и к и $L(\tau)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Если формальное исчисление T в L таково, что множество его теорем является фрагментом конструктивной логики (является конструктивной логикой) класса τ , то T называется (т о т а л ь н ы м) ф о р м а л ь н ы м п р е д с т а в л е н и е м τ-л о г и к и.

ТЕОРЕМА 8. Существуют тотальные формальные представления τ_{all}-, τ_{inc}-, τ_{con}-, τ_{con*}-логик. Если Sym - эффективно перечислимая подгруппа группы $G(L)$, то существует тотальное формальное представление τ_{sym}-логики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_X означает исчисление в L, имеющее пустое множество правил вывода и множество аксиом X. Пусть $F(L)$, $F_0(L)$, $F_1(L)$ - ранее определенные множества формул. И пусть $F_{sym}(L)$ - множество всех формул вида $(\bot \supset \varphi)$ и всех формул вида $(\varphi \supset g'\varphi)$, $g \in Sym$. Тогда из теорем I,3,4 непосредственно следует, что $T_{F(L)}$ является тотальным формальным представлением любой τ_{inc}-логики, а $T_{F_0(L)}$ - тотальным формальным представлением как для τ_{all}-логики, так и для τ_{con}-логики. Теорема 5 говорит о том, что тотальное формальное представление τ_{con*}-логики есть исчисление $T_{F_1(L)}$. Теорема 6 утверждает, что $T_{F_{sym}(L)}$ есть тотальное формальное представление для τ_{sym}-логики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Если формальное исчисление T в L является формальным представлением $\{T\}$-логики, то T называется авто - конструктивной (или просто конструктивной) системой. Конструктивная система T точна, если T - тотальное формальное представление $\{T\}$-логики.

Очевидно, например, что исчисление $T_{F(L)}$ есть точная конструктивная система. В то же время классическое исчисление предикатов или, скажем, арифметика Пеано, вообще не являются, как показывают две нижеследующие теоремы, конструктивными системами.

ТЕОРЕМА 9. Исчисление $CPC(L)$ (классическое исчисление предикатов в L) - не конструктивная система.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим формулу φ вида $(\varphi_1 \vee (\varphi_1 \supset \bot))$, где φ_1 - атомная формула в L, отличная от $\bot$ и от аксиом равенства. Имеем: $CPC(L) \nvdash \varphi_1$, $CPC(L) \nvdash (\varphi_1 \supset \bot)$.

Следовательно, φ не конструктивно истинна относительно $CPC(L)$. С другой стороны, $CPC(L) \vdash \varphi$.

ТЕОРЕМА 10. Исчисление P (первопорядковая арифметика Пеано) - не конструктивная система.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы точно такое же, как и предыдущей, только в качестве φ_1 нужно взять любую неразрешимую в P формулу.

Мы видим, что употребительные в математической практике не-конструктивные с обычной точки зрения системы неконструктивны и в нашем смысле. Это наполовину свидетельствует о том, что развиваемый здесь подход не является чрезмерно вычурным и может быть практически полезен. Дополнительно подтверждают это следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА II. Исчисление HPC(L) (исчисление предикатов Гейтинга в языке L) - конструктивная система и если G(L) - неединичная группа, то HPC(L) заведомо не точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение теоремы. Допустим, имеет место обратное: φ доказуема в HPC(L), но не конструктивно истинна относительно HPC(L). Рассмотрим возможные при этом случаи:

а) φ - атомарная формула в L. Тогда φ конструктивно истинна относительно HPC(L) по определению, ибо мы предположили, что HPC(L) $\vdash \varphi$. Противоречие.

б) $\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)$. С одной стороны, HPC(L) $\vdash (\varphi_1 \& \varphi_2)$ тогда и только тогда, когда HPC(L) $\vdash \varphi_1$ и HPC(L) $\vdash \varphi_2$. С другой стороны, если φ не конструктивно истинна относительно HPC(L), то либо HPC(L) $\nvdash \varphi_1$, либо HPC(L) $\nvdash \varphi_2$. Противоречие.

в) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. По свойству дизъюнктивности, HPC(L) $\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, если и только если HPC(L) $\vdash \varphi_1$ или HPC(L) $\vdash \varphi_2$. С другой стороны, если φ не конструктивно истинна относительно HPC(L), то HPC(L) $\nvdash \varphi_1$ и HPC(L) $\nvdash \varphi_2$. Противоречие.

г) $\varphi = \forall x \ \varphi_1(x)$. Для исчисления Гейтинга, если HPC(L) $\vdash \forall x \ \varphi_1(x)$, то для любого терма t имеет место HPC(L) $\vdash \varphi_1(t)$. С другой стороны, если φ не HPC(L)-истинна, то для некоторого терма t имеет место HPC(L) $\nvdash \varphi_1(t)$. Противоречие.

д) $\varphi = \exists x \ \varphi_1(x)$. По свойству экзистенциальности, HPC(L) $\vdash \exists x \ \varphi_1(x)$, если и только если HPC(L) $\vdash \varphi_1(t)$ для некоторого терма t. Это означает, что $\exists x \ \varphi_1(x)$ конструктивно истинна относительно HPC(L). Противоречие.

е) $\varphi = (\varphi_1 \supset \varphi_2)$. Если φ не конструктивно истинна относительно HPC(L), то I) HPC(L) $\vdash \varphi_1$ и 2) HPC(L) $\nvdash \varphi_2$. Из I) по modus ponens имеем HPC(L) $\vdash \varphi_2$, что противоречит 2). Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Ясно, что HPC(L) симметрично, если G(L) - неединичная группа. Но тогда найдется такая формула φ

и такая перестановка $g \in G(L)$, что формула $(\varphi \supset g'\varphi)$ будет конструктивно истинной относительно $HPC(L)$ (по теореме 6), но не выводимой в $HPC(L)$.

ТЕОРЕМА 12. (i) НА (арифметика Гейтинга) – конструктивная система; (ii) НА – не точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) доказывается аналогично доказательству первого утверждения предыдущей теоремы; (ii) следует из существования гёделевского высказывания для НА вида $\forall x\ \varphi(x)$ такого, что для любого замкнутого терма t $HA \vdash \varphi(t)$, но не $HA \vdash \forall x\ \varphi(x)$.

Если предварительно условиться, что аксиома – это правило вывода с пустым множеством посылок, а допустимость в Т правил вывода понимается обычным образом, то для точных конструктивных систем справедлива следующая

ТЕОРЕМА 13. Если Т (в L) – точная конструктивная система, то в Т допустимы все аксиомы и правила вывода минимального исчисления высказываний Йогансона. Если, дополнительно, Т – непротиворечивое исчисление, то в Т допустимы все аксиомы и правила вывода интуиционистского исчисления высказываний Гейтинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Т в L – точная конструктивная система. Если Т к тому же противоречиво, то все аксиомы и правила вывода минимального исчисления тривиальным образом допустимы в Т. Поэтому допустим, что Т не является противоречивым исчислением (напоминаем читателю, что Т может быть одновременно ни противоречивым, ни непротиворечивым). Покажем допустимость в таком Т аксиом и правил вывода минимального исчисления.

Рассмотрим какую-нибудь аксиому минимального исчисления вида:

$$(\varphi \supset (\psi \supset \varphi)). \tag{22}$$

Предположим, что аксиома (22) недопустима относительно Т, т.е. что

$$T \nvdash (\varphi \supset (\psi \supset \varphi)). \tag{23}$$

Так как Т – точная система, то из (23) следует, что $(\varphi \supset (\psi \supset \varphi))$ не Т-истинна. Это означает, в силу (iv) определения I, что

$$T \vdash \varphi \tag{24}$$

и

$$T \nvdash (\psi \supset \varphi). \tag{25}$$

Подобным же образом, из (25) следует, что $T \vdash \psi$, и

$$T \nvdash \varphi . \tag{26}$$

Соотношения (24) и (26) противоречивы. Следовательно, любая формула вида (22) допустима в T .

Рассмотрим теперь аксиому минимального исчисления вида:

$$((\varphi \supset \psi) \supset ((\varphi \supset (\psi \supset \gamma)) \supset (\varphi \supset \gamma))) . \tag{27}$$

Недопустимость (27) означает

$$T \nvdash ((\varphi \supset \psi) \supset ((\varphi \supset (\psi \supset \gamma)) \supset (\varphi \supset \gamma))). \tag{28}$$

Как и выше, доказываем, что (28) влечет

$$T \vdash (\varphi \supset \psi) \tag{29}$$

и

$$T \nvdash ((\varphi \supset (\psi \supset \gamma)) \supset (\varphi \supset \gamma)). \tag{30}$$

Вновь, как и выше, устанавливаем, что (30) влечет

$$T \vdash (\varphi \supset (\psi \supset \gamma)) \tag{31}$$

и

$$T \nvdash (\varphi \supset \gamma). \tag{32}$$

Из (32) следует

$$T \vdash \varphi \tag{33}$$

и

$$T \nvdash \gamma. \tag{34}$$

Соотношение (29) и точность T дают T-истинность $(\varphi \supset \psi)$. А это, учитывая (33), означает, что

$$T \vdash \psi . \tag{35}$$

Точность T , (31), (33) и (35) дают:

$$T \vdash \gamma . \tag{36}$$

Соотношение (36) противоречит (34). Следовательно, любая формула вида (27) допустима в T .

Рассмотрим правило вывода modus ponens :

$$\frac{A, (A \supset B)}{B} . \tag{37}$$

Предположим, что оно недопустимо в T , т.е. для каких-то φ, ψ из L имеем:

$$T \vdash \varphi , \tag{38}$$

$$T \vdash (\varphi \supset \psi), \tag{39}$$

$$T \nvdash \psi . \tag{40}$$

Точность T , (38) и (39) дают: $T \vdash \psi$, что противоречит (40). Следовательно, правило (37) допустимо в T .

Продолжим рассмотрение аксиом минимального исчисления. Рассмотрим аксиому вида

$$(\varphi \supset (\psi \supset (\varphi \& \psi))) \quad . \tag{41}$$

Если (4I) недопустима, то, как и выше,

$$T \vdash \varphi \tag{42}$$

и

$$T \nvdash (\psi \supset (\varphi \& \psi)) \quad . \tag{43}$$

Повторяя рассуждения, имеем из соотношения (43):

$$T \vdash \psi \tag{44}$$

и

$$T \nvdash (\varphi \& \psi) . \tag{45}$$

Точность T , (42) и (45) дают: $T \nvdash \psi$, что противоречит (44). Следовательно, аксиомы вида (4I) допустимы в T .

Аналогичным образом доказывается допустимость аксиом, имеющих вид:

$$((\varphi \& \psi) \supset \varphi); \tag{46}$$

$$((\varphi \& \psi) \supset \psi); \tag{47}$$

$$(\varphi \supset (\varphi \vee \psi)); \tag{48}$$

$$(\psi \supset (\varphi \vee \psi)); \tag{49}$$

$$((\varphi \supset \gamma) \supset ((\psi \supset \gamma) \supset ((\varphi \vee \psi) \supset \gamma))); \tag{50}$$

$$((\varphi \supset \psi) \supset ((\varphi \supset (\psi \supset \perp)) \supset (\varphi \supset \perp))) . \tag{51}$$

Аксиомы видов (22), (27), (4I), (46)-(5I) и правило вывода (37) составляют минимальное исчисление высказываний. Следовательно, мы доказали первое утверждение теоремы.

Допустим теперь, что T непротиворечиво:

$$T \nvdash \perp \quad . \tag{52}$$

Рассмотрим формулу вида

$$((\varphi \supset \perp) \supset (\varphi \supset \psi)) . \tag{53}$$

Предположим, она недопустима в T , т.е. предположим, что

$$T \nvdash ((\varphi \supset \perp) \supset (\varphi \supset \psi)) \quad . \tag{54}$$

Подобно тому, как это мы делали выше, находим, используя точность T, что (54) означает:

$$T \vdash (\varphi \supset \perp) \tag{55}$$

и

$$T \nvdash (\varphi \supset \psi) \quad . \tag{56}$$

Точность T, (52), (55) дают:

$$T \nvdash \varphi \quad . \tag{57}$$

С другой стороны, в силу точности T из (56) следует:

$$T \vdash \varphi . \tag{58}$$

Соотношения (57) и (58) образуют противоречие. Следовательно, аксиома вида (53) допустима относительно непротиворечивого T .Таким образом, доказано второе утверждение теоремы.

Литература

I. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. -М.: Наука, 1979. - 320 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 декабря 1987 года