ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ И ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 124

УДК 519.9

АЛГЕБРЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НАД РАЗМЕЧЕННЫМИ ДЕРЕВЬЯМИ

Л.П.Лисовик

Основное понятие работы есть понятие полулинейного макропреобразователя, или полулинейного преобразователя над размеченными деревьями, называемого сокращенно ПЛ-преобразователем. Класс полулинейных макропреобразователей выделяется из более общего класса ПЛ'-преобразователей, на котором определен ряд алгебраических операций, инвариантных относительно класса полулинейных макропреобразователей. К таким операциям относятся, в частности, операции суперпозиции, выбора и параллельного соединения. В классе ПЛ'-преобразователей выделяются метаалгебры. Их система операций состоит из операций суперпозиции, пополнения, расслоения и сцепления. Относительно подклассов класса ПЛ'-преобразователей рассматриваются алгоритмические проблемы эквивалентности, слабой эквивалентности, включения, пустоты, σ-пустоты. Доказано, что в каждой метаалгебре из разрешимости проблемы пустоты следует разрешимость проблемы слабой эквивалентности. Класс полулинейных макропреобразователей образует метаалгебру. Кроме того, он образует нормальную метаалгебру, т.е. метаалгебру, замкнутую относительно операций факторизации и закрепления. Показано, что в каждой нормальной метаалгебре из разрешимости проблемы σ-пустоты следует разрешимость проблемы эквивалентности. Из приведенных в данной статье доказательств наиболее сложным является доказательство разрешимости проблемы σ-пустоты в классе полулинейных макропреобразователей. Оно использует "технику недетерминированных скачков", которая кратко объяснялась в работе [1]. Эта техника позволяет свести проблему σ-пустоты для полулинейных макропреобразователей к проблеме пустоты для ΣТС-преобразователей и затем к проблеме пустоты пересечения полулинейных множеств. Ниже ПЛ'-преобразователи и полулинейные макропреобразователи определяются так, что они осуществляют обработку входных размеченных полных n-арных (или счетно-арных) деревьев. Основное значение (так же,как,например, в [2]) имеет рассмотрение случая обработки размеченных полных бинарных деревьев. Заметим,что из перечисленных выше основных результатов следует, в частности, разрешимость проблемы эквивалентности для металинейных схем с засылками констант, а также разрешимость некоторых других проблем, указанных в [I]. Это связано с тем обстоятельством, что эквивалентность произвольных (стандартных,рекурсивных и т.д. [3]) схем R и S равносильна их эквивалентности на классе свободных (эрбрановых) интерпретаций [3,4],а схема над последними есть преобразователь над размеченными полными n-арными деревьями.

Введем необходимые определения и обозначения. Пусть $N = \{0, I, \dots\}$, $N^+ = N\setminus\{0\}$, $N_k = \{0,1,\dots,k\}$, $k \in N$. Пусть Δ^* - множество всех слов в алфавите Δ, $|x|$ - длина слова x. Слово длины 0 называется пустым и обозначается в виде ε. Пусть Z_0 - специальный символ (маркер). Для любых множеств Σ,Δ назовем (Σ,Δ)-раз - меткой (или размеченным (Σ,Δ)-деревом) произвольную функцию μ: $\Delta^* \to \Sigma$ такую, что $\mu(x) = Z_0 \leftrightarrow x = \varepsilon$ при $Z_0 \in \Sigma$. Класс ПЛ'-преобразователей включается в класс АПЛ-преобразователей.

Далее введем понятие АПЛ-преобразователя. Вначале на содер - жательном уровне дадим приближенное представление об этом понятии. Любой АПЛ-преобразователь A состоит из управляющей головки с конечной памятью, дополнительной счетной памяти в виде абстрактного резервуара, не имеющего структуры, и полного бесконечного разме - ченного дерева. Работа АПЛ-преобразователя A состоит в последовательном выполнении команд. Выполнение команды (σ, q, a, p, Y) можно понимать так: если управляющая головка находится в состоянии q и обозревает вершину входного дерева, помеченную меткой σ, а резервуар имеет значение γ и $a = \alpha(\gamma)$, где α - конечнозначная функция на множестве значений резервуара, то управляющая головка переходит из состояния q в состояние p и выполняется Y-действие, подразумевающее следующие преобразования:

а) изменение метки обозреваемой вершины дерева;

б) сдвиг управляющей головки по дереву на одну из ближайших вершин;

в) скачок управляющей головки вверх по дереву;

г) изменение значения резервуара.

АПЛ-преобразователь начинает работу при начальном состоянии q_0 управляющей головки, начальном значении резервуара θ и произвольных исходных обозреваемой вершине u и (Σ,Δ)-разметке μ. Работа АПЛ-преобразователя заканчивается в момент попадания управляющей головки в заключительное состояние. Далее дадим строгое определение АПЛ-преобразователя A и определим задаваемые им отображения $O(A)$, $O_1(A)$, а также распознаваемые множества $L(A)$, $L_1(A)$.

Назовем АПЛ-преобразователем упорядоченную десятку $A = (K,U,\Sigma,\Delta,\alpha,\varphi,\psi, h,q_0,q^*)$, где K - конечное множество (множество состояний); U - счетное множество (множество значений резервуара); Σ - конечное или счетное множество (множество меток), $Z_0 \in \Sigma$; $\Delta \in \{N_k \mid k \in N\} \cup \{N\}$; α - функция, определенная на U с конечной областью значений V; φ: $\Sigma \times K \times V \times U \to U$ - функция формирования; ψ: $\Sigma \times K \times V \times U \to \Delta^*$ - функция скачков; h: $\Sigma \times (K\setminus\{q^*\}) \times V \to K \times \Sigma \times \Omega$ - функция переходов, где $\Omega = \{R_*\} \cup \{R_i \mid i \in \{-1\} \cup \Delta\}$, причем $h(Z_0,q,b) \in K \times \{Z_0\} \times (\Omega\setminus\{R_{-1}\})$ для любых $q \in K\setminus\{q^*\}$, $b \in V$; $q_0 \in K$ (начальное состояние); $q^* \in K$ (заключительное состояние).

Во множестве U выделяется также начальный элемент θ, который считается равным ε, если не оговорено противное. Пусть M - множество всех (Σ,Δ)-разметок. Элементы множества $\Delta^* \times K \times U \times M$ называются конфигурациями АПЛ-преобразователя A. На множестве $\Delta^* \times K \times U \times M$ определяются бинарные отношения $\underset{A}{\vdash}$, $\underset{A}{\models}$, $\underset{A}{\mapsto}$, $\underset{A}{\overset{o}{\mapsto}}$, следующим образом: $(u,p,\gamma,\mu) \vdash (v,q,\gamma',\mu')$, если $h(\mu(u),p,\alpha(\gamma)) = (q,\sigma,T)$, $\gamma' = \varphi(\mu(u),p,\alpha(\gamma),\gamma)$, $\mu'(u) = \sigma$, $\mu'(x) = \mu(x)$, если $x \neq u$, $u \in v\Delta$ при $T = R_{-1}$ и

$$v = \begin{cases} u\,\psi(\mu(u),p,\alpha(\gamma),\gamma) & \text{при } T = R_*, \\ u & \text{при } T = R_0, \\ u(i-1) & \text{при } T = R_i,\ i \in N^+; \end{cases}$$

отношение $\underset{A}{\models}$ есть рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\underset{A}{\vdash}$. Отношение $\pi \underset{A}{\mapsto} \nu$ означает, что существуют конфигурации $\pi_i = (v_i,q_i,\gamma_i,\mu_i)$, $1 \le i \le m$, такие, что $\pi = \pi_1$, $\nu = \pi_m$, $\pi_i \underset{A}{\vdash} \pi_{i+1}$ и $h(\mu_i(v_i),q_i,\alpha(\gamma_i)) \notin K \times \Sigma \times \{R_*\}$ при $1 \le i \le m$.

Отношение $\pi \overset{o}{\underset{A}{\mapsto}} \eta$ означает, что существует конфигурация $\nu = (v, q, \gamma, \mu)$ такая, что $\pi \underset{A}{\mapsto} \nu$, $\nu \underset{A}{\vdash} \eta$ и $h(\mu(v), q, \alpha(\gamma)) \in K \times \Sigma \times \{R_*\}$. Далее в обозначениях $\underset{A}{\vdash}$, $\underset{A}{\models}$, $\underset{A}{\mapsto}$, $\overset{o}{\underset{A}{\mapsto}}$ будем опускать символ A, если это не ведет к двусмысленности. При выполнении отношения $(u, p, \gamma, \mu) \models (v, q^*, \gamma', \mu')$ будем писать $A(u, p, \gamma, \mu) = (v, q^*, \gamma', \mu')$. Для слова $u \in \Delta^*$ и (Σ, Δ)-разметки μ через $A(u, \mu)$ обозначается такая пара (v, μ'), что $A(u, q_0, \varepsilon, \mu) = (v, q^*, \gamma', \mu')$ для некоторого γ'. Через $L(A)$, $O(A)$, $L_1(A)$, $O_1(A)$ обозначаются множества:

$$L(A) = \{\mu \mid A(\varepsilon, \mu) \text{ определено}\},$$

$$O(A) = \{(\mu, v) \mid \exists \mu' (A(\varepsilon, \mu) = (v, \mu'))\},$$

$$L_1(A) = \{(u, \mu) \mid A(u, \mu) \text{ определено}\},$$

$$O_1(A) = \{(u, \mu, v, \mu') \mid A(u, \mu) = (v, \mu')\}.$$

Для АПЛ-преобразователя A следующее условие называется ОР-условием (условием ограниченного режима): существует число d (режим АПЛ-преобразователя A) такое, что выполняется ОР(d)-условие. Последнее означает, что для любой последовательности конфигураций $\pi_0 \vdash \pi_1 \vdash \ldots \vdash \pi_l$, $\pi_i = (v_i, q_i, \gamma_i, \mu_i)$, $0 \le i \le l$, для любых вершин $u, v \in \Delta^*$, $v \in u\Delta$, существуют не более чем d различных чисел i, $0 \le i < l$, таких, что $\{u, v\} = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Для АПЛ-преобразователя A следующее условие называется КП-условием (условием конечноповоротности относительно дерева $D = \Delta^*$): существует число r (число поворотов АПЛ-преобразователя A относительно дерева D) такое, что выполняется П(r)-условие. Последнее означает, что для любой последовательности конфигураций $\pi_0 \vdash \ldots \vdash \pi_l$, $\pi_i = (v_i, q_i, \gamma_i, \mu_i)$, $0 \le i \le l$, существуют не более чем $r+2$ чисел $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$ таких, что $i_0 = 0$, $|v_{i_{2t}}| < |v_{i_{2t+1}}| > |v_{i_{2t+2}}|$, $0 \le t < \frac{k-1}{2}$.

Очевидно, что из КП-условия вытекает ОР-условие.

Для АПЛ-преобразователя A следующее условие называется КЧС-условием (условием конечности числа скачков): существует число m (число скачков АПЛ-преобразователя A) такое, что выполняется ЧС(m)-условие. Последнее означает, что для любой последовательности конфигураций $\pi_0 \vdash \ldots \vdash \pi_l$, $\pi_i = (v_i, q_i, \gamma_i, \mu_i)$, $0 \le i \le l$, существуют не более чем m различных чисел i, $0 \le i \le l$, таких, что $h(\mu_i(v_i), q_i, \alpha(\gamma_i)) \in K \times \Sigma \times \{R_*\}$.

Назовем ПЛ'-преобразователем АПЛ-преобразователь с конечным множеством меток. Будем тогда считать, что множество Δ конечно и зафиксировано, например, $\Delta = \{0,1\}$. Далее параметр Δ в заданиях ПЛ'-преобразователей опускается. Соответственно вместо термина "(Σ,Δ)-разметка" употребляется термин "Σ-разметка".

Выделим некоторые простейшие ПЛ'-преобразователи и укажем операции на классе ПЛ'-преобразователей. Для любого множества меток Σ, унарной операции δ на множестве Σ, где $\delta(Z_0) = Z_0$ и подмножества $P \subseteq \Sigma$, фиксируем ПЛ'-преобразователи S^i, $i \in \Delta$, I_Σ, $J_{\Sigma,\delta}$, $K_{\Sigma,P}$ так, что для любых слова $u \in \Delta^*$ и Σ-разметки μ выполнены условия $S^i(u,\mu) = (ui,\mu)$, $I_\Sigma(u,\mu) = (Z_0,\mu)$, $J_{\Sigma,\delta}(u,\mu) = (u,\mu')$, где $\mu'(u) = \delta(\mu(u))$, $\mu'(x) = \mu(x)$, в остальных случаях $K_{\Sigma,P}(u,\mu) = (u,\mu)$, если $\mu(u) \in P$, иначе $K_{\Sigma,P}(u,\mu)$ не определено. Возможность формального задания искомых ПЛ'-преобразователей $I_\Sigma, J_{\Sigma,\delta}, K_{\Sigma,P}$ очевидна. Кроме того, для дальнейшего не существенно, каковы именно формальные задания ПЛ'-преобразователей I_Σ, $J_{\Sigma,\delta}$, $K_{\Sigma,P}$, поэтому здесь они не приводятся.

Операция суперпозиции двум ПЛ'-преобразователям А и В, имеющим общее множество меток Σ, ставит в соответствие ПЛ'-преобразователь $C = S(A,B)$, имеющий множество меток Σ так, что для любых слова $u \in \Delta^*$ и Σ-разметки μ выполняется условие $C(u,\mu) = B(A(u,\mu))$. Поскольку формальное задание операции суперпозиции для дальнейшего не существенно, то оно опускается.

Операция пополнения при фиксированном конечном множестве Σ_1 любому ПЛ'-преобразователю $A = (K,U,\Sigma,\alpha,\varphi,\psi,h,q_0,q^*)$ ставит в соответствие ПЛ'-преобразователь $B = (K,U,\Sigma',\alpha,\varphi',\psi',h',Z_0,q_0,q^*)$ так, что $\Sigma' = \Sigma \cup \Sigma_1$, преобразователи А и В действуют одинаково на вершинах с метками из Σ и преобразователь В зацикливается в вершинах с метками из $\Sigma_1 \setminus \Sigma$. Точнее выполняются соотношения $\varphi \subset \varphi'$, $\psi \subset \psi'$, $h \subset h'$, $\varphi'(\sigma,q,a,\gamma) = \psi'(\sigma,q,a,\gamma) = \varepsilon$, $h'(\sigma,q,a) = (q,\sigma,R_0)$ для любых $q \in K \setminus \{q^*\}$, $\gamma \in U$, $\sigma \in \Sigma_1 \setminus \Sigma$, $a = \alpha(\gamma)$.

Операция расслоения любому ПЛ'-преобразователю $A = (K,U,\Sigma,\alpha,\varphi,\psi,h,q_0,q^*)$ ставит в соответствие ПЛ'-преобразователь $B = (K,U,\Sigma',\alpha,\varphi',\psi',h',q_0,q^*)$, где $\Sigma' = \Sigma \cup (\Sigma \setminus \{Z_0\}) \times (\Sigma \setminus \{Z_0\})$, преобразователь В моделирует преобразователь А и при обработке вершин с нерасслоенными метками (из Σ) расслаивает их на две компоненты, беря в качестве первой компоненты первоначальное значение метки и в качестве второй компоненты - новое значение метки вершины, которое выработал бы при этом преобразователь A. При обработке расслоенной метки B моделирует A относительно второй компоненты метки. Точнее выполняются соотношения $\varphi \subseteq \varphi'$, $\psi \subset \psi'$, $\varphi'((\sigma_1,\sigma_2), q,a,\gamma) = \varphi(\sigma_2,q,a,\gamma)$, $\psi'((\sigma_1,\sigma_2),q,a,\gamma) = \psi(\sigma_2,q,a,\gamma)$, $h'(Z_0,q,a) = h(Z_0,q,a)$, $h'(\sigma_1,q,a) = (p,(\sigma_1,\sigma_2),T)$, если $h(\sigma_1,q,a) = (p,\sigma_2,T)$, $h'((\sigma_1,\sigma_2),q,a) = (p,(\sigma_1,\sigma_3),T)$, если $h(\sigma_2,q,a) = (p,\sigma_3,T)$ при любых $q\in K\setminus\{q^*\}$, $\gamma\in U$, $\sigma\in\Sigma\setminus\{Z_0\}$, $a = \alpha(\gamma)$.

Операция сцепления при фиксированном конечном множестве F любому ПЛ'-преобразователю $A = (K,U,\Sigma,\alpha,\varphi,\psi,h,q_0,q^*)$ ставит в соответствие ПЛ'-преобразователь $B = (K,U,\Sigma',\alpha,\varphi',\psi',h',q_0,q^*)$, где $\Sigma' = \Sigma \cup (\Sigma\setminus\{Z_0\})$ F, преобразователь B на нерасслоенных метках моделирует A, а на расслоенных метках моделирует A относительно первой компоненты метки. Точнее имеют место соотношения $\varphi\subset\varphi'$, $\psi\subset\psi'$, $h\subset h'$, $\varphi'((\sigma,\delta),q,a,\gamma) = \varphi(\sigma,q,a,\gamma)$, $\psi'((\sigma,\delta),q,a,\gamma) = \psi(\sigma,q,a,\gamma)$, $h'((\sigma,\delta),q,a) = (p,(\sigma_1,\delta),T)$, если $h(\sigma,q,a) = (p,\sigma_1,T)$ при любых $q\in K\setminus\{q^*\}$, $\gamma\in U$, $\sigma\in\Sigma\setminus\{Z_0\}$, $\delta\in F$, $a=\alpha(\gamma)$.

Назовем ПЛ'-преобразователи

$$A_i = (K_i,U_i,\Sigma_i,\alpha_i,\varphi_i,\psi_i,h_i,q_0^i,q_i^*),\quad i = 1,2,$$

изоморфными между собой, если существуют вычислимые биекции

$$K_1 \xrightarrow{f_1} K_2,\ U_1 \xrightarrow{f_2} U_2,\ \Sigma_1 \xrightarrow{f_3} \Sigma_2,\ \alpha_1(U_1) \xrightarrow{f_4} \alpha_2(U_2)$$

такие, что выполняются условия:

$$\alpha_1(\gamma) = a \leftrightarrow \alpha_2(\gamma') = a',$$

$$\varphi_1(\sigma,q,a,\gamma) = \gamma_1 \leftrightarrow \varphi_2(\sigma',q',a',\gamma') = \gamma_1',$$

$$\psi_1(\sigma,q,a,\gamma) = \delta \leftrightarrow \psi_2(\sigma',q',a',\gamma') = \delta',$$

$$h_1(\sigma,q,a) = (p,\sigma_1,T) \leftrightarrow h_2(\sigma',q',a') = (p',\sigma_1',T),$$

где $f_i(x) = x'$, $1 \le i \le 4$, $(q_0^1)' = q_0^2$, $(q_1^*)' = q_2^*$, $(\varepsilon)' = \varepsilon$, $(Z_0)' = Z_0$, $q\in K_1\setminus\{q_1^*\}$, $\gamma\in U_1$, $a = \alpha_1(\gamma)$, $\sigma\in\Sigma_1$.

В дальнейшем при введении подклассов класса ПЛ'-преобразователей будем использовать такое соглашение. Допустим, определяется некоторый подкласс $\mathcal{X}$ класса ПЛ'-преобразователей. Тогда если классу $\mathcal{X}$ принадлежит согласно определению некоторый ПЛ'-преобразователь А, то по умолчанию считается, что и все ПЛ'-преобразователи, изоморфные А, принадлежат классу $\mathfrak{X}$.

Метаалгеброй называется любая алгебра $\mathfrak{A}$, состоящая из ПЛ'-преобразователей, содержащая все ПЛ'-преобразователи вида S^i, $i \in \Delta$, $I_\Sigma, J_{\Sigma,\delta}, K_{\Sigma,P}$, замкнутая относительно операций суперпозиции, пополнения, расслоения и сцепления.

Далее, говоря о разрешимости какой-либо проблемы для некоторого подкласса $\mathfrak{X}$ класса ПЛ'-преобразователей, будем предполагать, что элементы класса $\mathfrak{X}$ суть финитные объекты. ПЛ'-преобразователь $A = (K, U, \Sigma, \alpha, \varphi, \phi, h, q_0, q^*)$ считается таковым, если есть заданная алгоритмом биекция $N \xrightarrow{f} U$, заданные алгоритмами функции $\alpha' : N \to \alpha(U)$, $\varphi' : \Sigma \times (K \setminus \{q^*\}) \times \alpha'(N) \times N \to N$, $\phi' : \Sigma \times (K \setminus \{q^*\}) \times \alpha'(N) \times N \to \Delta^*$ такие, что $\alpha'(n) = \alpha(f(n))$, $\varphi'(\sigma, q, \alpha'(n), n) = f^{-1}(\varphi(\sigma, q, \alpha(f(n)), f(n)))$, $\phi'(\sigma, q, \alpha'(n), n) = \phi(\sigma, q, \alpha(f(n)), f(n))$ для любых $n \in N$, $q \in K \setminus \{q^*\}$, $\sigma \in \Sigma$.

Пусть M_F - множество всех F-разметок и $D_F = M_F \times \Delta^*$. Проблемы определения по любым ПЛ'-преобразователям А, В и любому конечному множеству F выполнимости условий $L(A) \cap M_F = \emptyset$, $O(A) \cap D_F = O(B) \cap D_F$, $O(A) \cap D_F \subseteq O(B) \cap D_F$, $L(A) \cap M_F \subseteq L(B) \cap M_F$, $\exists \mu, v_1, v_2 (\mu \in M_F \ \& \ (\mu, v_1) \in O(A) \ \& \ (\mu, v_2) \in O(B) \ \& \ v_1 \neq v_2)$ называются соответственно проблемами σ-пустоты, σ-эквивалентности, σ-включения, σ-включения для областей определенности функционалов, слабой σ-эквивалентности. Эти проблемы называются соответственно проблемами пустоты, эквивалентности, включения, включения для областей определенности функционалов, слабой эквивалентности, если всюду в определениях считать, что M_F - универсальное множество.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathfrak{A}$ - метаалгебра, в которой разрешима проблема пустоты. Тогда в ней разрешима и проблема слабой эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любые элементы А и В из метаалгебры $\mathfrak{A}$. Из А и В применением операции пополнения строим ПЛ'-преобразователи А' и В', имеющие одно и то же множество меток Σ. ПЛ'-преобразователи А и В слабо эквивалентны тогда и только тогда, когда слабо эквивалентны ПЛ'-преобразователи А' и В'. Значит, можно считать, что ПЛ'-преобразователи А и В имеют общее множество меток Σ. Пусть $\Sigma' = \Sigma \cup (\Sigma \setminus \{Z_0\}) \times (\Sigma \setminus \{Z_0\})$, $a \notin \Sigma$, $\Sigma'' =$

$= \Sigma \cup (\Sigma \setminus \{Z_0\}) \times \{a\}$ и функция $\delta : \Sigma'' \to \Sigma''$ такова, что $\sigma(Z_0) = Z_0$, $\delta(\sigma) = (\sigma, a)$, $\delta((\sigma, \sigma_1)) = (\sigma, a)$ при $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma'$. Возьмем ПЛ'-преобразователь Q в виде последовательного соединения

$$\boxed{A_1} - \boxed{S^0} - \boxed{I_{\Sigma''\delta}} - \boxed{I_{\Sigma''}} - \boxed{B_1} - \boxed{S^0} - \boxed{K_{\Sigma''\Sigma'}} ,$$

где ПЛ'-преобразователь A_1 имеет множество меток Σ'' и получен последовательным применением операций расслоения и пополнения к ПЛ'-преобразователю A, а ПЛ'-преобразователь B_1 получен операцией сцепления из ПЛ'-преобразователя Б при $F = (\Sigma \setminus \{Z_0\}) \cup \{a\}$. Тогда ПЛ'-преобразователь Q принадлежит метаалгебре $\mathfrak{A}$. Кроме того, условие слабой эквивалентности ПЛ'-преобразователей A и B равносильно условию $O(Q) \neq \emptyset$. Последнее эффективно проверяется по условию теоремы.

ТЕОРЕМА I'. *Пусть $\mathfrak{A}$ - метаалгебра, в которой разрешима проблема σ-пустоты. Тогда в ней разрешима и проблема слабой σ-эквивалентности.*

Эта теорема доказывается аналогично предыдущей. Имеют место также аналоги теорем I и I' для АПЛ-преобразователей.

ПЛ'-преобразователь $A = (K, U, \Sigma, \alpha, \varphi, \psi, h, q_0, q^*)$ назовем МПЛ'-преобразователем, если для него указаны натуральное число s (число магазинов), конечный алфавит $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\}$ и выполняются такие условия:

I) $U = (Z_0 \Gamma^*)^s \times U'$, где U' - счетное множество и $Z_0 \notin \Gamma$;

2) $\alpha(\gamma_1, \dots, \gamma_{s+1}) = (b_1, \dots, b_s)$, если $\gamma_i = \gamma_i' b_i$, $b_i \in \{Z_0\} \cup \Gamma$, $1 \le i \le s$;

3) $\varphi(\sigma, q, \alpha(\gamma_1, \dots, \gamma_{s+1}), (\gamma_1, \dots, \gamma_{s+1})) \in \gamma_1' \Gamma^* \times \dots \times \gamma_s' \Gamma^* \times U'$, где $\gamma_i = \gamma_i' = Z_0$ или $\gamma_i \in \gamma_i' \Gamma$, $1 \le i \le s$;

4) начальный элемент θ множества U равен $(Z_0, \dots, Z_0, \theta')$, где θ' считается равным ε, если не оговорено противное.

Для МПЛ'-преобразователя A следующее условие называется КПМ-условием (условием конечноповоротности магазинов): существует число r (число поворотов МПЛ'-преобразователя A относительно магазинов) такое, что выполняется ПМ(r)-условие. Последнее означает, что для любой последовательности конфигураций $\pi_0 \vdash \pi_1 \vdash \dots \vdash \pi_l$, где $\pi_i = (v_i, q_i, (\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^{s+1}), \mu_i)$, $0 \le i \le l$, для каждого $1 \le j \le s$ существуют не более чем $r+2$ чисел $i_0 < i_1 < \dots < i_k$ таких, что

$$i_0 = 0, \ |\gamma^j_{i_{2t}}| < |\gamma^j_{i_{2t+1}}| > |\gamma^j_{i_{2t+2}}|, \quad 0 \le t \le \frac{k-1}{2} .$$

Назовем МПЛ$'$-преобразователь МПЛ-преобразователем, если для него указано натуральное число m такое, что выполняется

5) конъюнкции ЧС(m)-, КПМ- и КП-условий*).

Пусть для МПЛ$'$-преобразователя A выполняются такие условия: $(u,q,\gamma,\mu) \underset{A}{\vdash} (v,p,\gamma',\mu')$, $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_{s+1})$, $\gamma' = (\gamma'_1,\ldots,\gamma'_{s+1})$, $\gamma_i \preccurlyeq \gamma'_i$, $1 \le i \le s$, $h(\mu(u),q,\alpha(\gamma)) \in K\times\Sigma\times\{R_i \mid i \in \Delta\}$. Тогда переход от конфигурации (u,q,γ,μ) к конфигурации (v,p,γ',μ') назовем нестирающим шагом и будем говорить, что выполняется условие $\Omega(q,\mu(u),\alpha(\gamma))$. Введем операцию на классе МПЛ$'$-преобразователей, связанную с подсчетом числа подряд идущих нестирающих шагов в выводах.

Операция закрепления любому МПЛ$'$-преобразователю $A = (K,U,\Sigma,\alpha,\varphi,\psi,h,q_0,q^*)$ при фиксированном натуральном числе d и фиксированном множестве $V \subseteq \Sigma$ ставит в соответствие МПЛ$'$-преобразователь $B = (K',U,\Sigma,\alpha,\varphi',\psi',h',q'_0,q^*_1)$ так, что $K' = \{q^*_1\} \cup K\times\{0,\ldots,d-1\}$, $q'_0 = (q_0,0)$, $\varphi'(\sigma,(q,i),a,\gamma) = \varphi(\sigma,q,a,\gamma)$, $\psi'(\sigma,(q,i),a,\gamma)) = \psi(\sigma,q,a,\gamma)$, и, далее, если $h(\sigma,q,a) = (p,\sigma_1,T)$, то

$$h'(\sigma,(q,0),a) = \begin{cases} ((p,0),\sigma_1,T) & \text{при } \sigma \notin V, \\ ((p,1),\sigma_1,T) & \text{при } \Omega(q,\sigma,a),\ \sigma \in V; \end{cases}$$

$$h'(\sigma,(q,i),a) = \begin{cases} ((p,0),\sigma_1,T) & \text{при } \neg\Omega(q,\sigma,a), \\ ((p,i+1),\sigma_1,T) & \text{при } \Omega(q,\sigma,a); \end{cases}$$

$\varphi'(\sigma,(q^*,i),a,\gamma) = \psi'(\sigma,(q^*,i),a,\gamma) = \varepsilon$, $h'(\sigma,(q^*,i),a) = ((q^*,0),\sigma,R_0)$, где $1 \le i < d$, $q \in K\setminus\{q^*\}$, $\sigma \in \Sigma$, $\gamma \in U$, $a = \alpha(\gamma)$, а записи вида (p,d) считаются различными обозначениями для q^*_1.

Определим операцию в классе ПЛ$'$-преобразователей, связанную с подсчетом числа скачков в выводах. Для любого натурального числа n операция факторизации (точнее операция n-факторизации) любому ПЛ$'$-преобразователю $A = (K,U,\Sigma,\alpha,\varphi,\psi,h,q_0,q^*)$ ставит в соответствие ПЛ$'$-преобразователь $B = (K',U,\Sigma,\alpha,\varphi',\psi',h',q'_0,q_1)$

*) Далее $x \preccurlyeq y$ означает, что x - левое подслово слова y, а $x \prec y$ означает $x \preccurlyeq y \ \&\ x \ne y$.

так, что $K' = \{q_1^*\} \cup K \times \{0,\dots,n-1\}$, $q_0' = (q_0, 0)$ для любого слова $u \in \Delta^*$ и любой Σ-разметки μ преобразователь B осуществляет поведение $\pi_1 \vdash_A \pi_2 \vdash_A \dots$ преобразователя A, начиная с конфигурации $\pi_1 = (u, q_0, \varepsilon, \mu)$, до тех пор пока будет установлено, что последовательность $\pi_1 \vdash_A \pi_2 \vdash_A \dots \vdash_A \pi_m$, $\pi_i = (v_i, q_i, \gamma_i, \mu_i)$, $1 \le i \le m$, такова, что или $q_m = q^*$, или количество чисел i, $1 \le i \le m$, для которых выполняется условие $h(\mu(v_i), q_i, \alpha(\gamma_i)) \in K \times \Sigma \times R_*$ (количество скачков), стало равно n. Установив вышеуказанное, преобразователь B попадает в заключительное состояние. При обозначениях, принятых в определении операции закрепления, функции φ', ψ' задаются аналогично, h' такова, что

$$h'(\sigma,(q,i),\alpha(\gamma)) = \begin{cases} ((p,i),\sigma_1, T) & \text{при } \neg\Phi, \\ ((p,i+1),\sigma_1,T) & \text{при } \Phi, \end{cases}$$

где Φ – условие совершения скачка, а все записи вида (p,n) и (q^*,i) считаются различными обозначениями для q_1^*.

Каждая метаалгебра, состоящая из МПЛ-преобразователей, замкнутая относительно операций факторизации и закрепления, называется нормальной метаалгеброй. Каждому МПЛ-преобразователю A поставим в соответствие область определенности задаваемого им функционала $L(A) = \{\mu \mid \exists v, \mu' (A(\varepsilon,\mu) = (v,\mu'))\}$.

ЛЕММА I. Пусть $\mathfrak{A}$ - нормальная метаалгебра, в которой разрешима проблема σ-пустоты. Тогда в ней разрешима и проблема σ-включения для областей определенности функционалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся идеей доказательства теоремы I. Возьмем любые элементы A и B из метаалгебры $\mathfrak{A}$. Поскольку операция пополнения содержится в метаалгебре $\mathfrak{A}$, достаточно доказать разрешимость σ-включения $L(A)$ в $L(B)$ для случая, когда МПЛ-преобразователи A и B имеют общее множество меток Σ. Возьмем $a, \Sigma', \Sigma'', A_1, B_1$ те же, что и в доказательстве теоремы I. Пусть m - число скачков МПЛ-преобразователя A, c - число состояний МПЛ-преобразователя B, s - число его магазинов, n - число символов в его алфавите Γ, f_i - операция i-факторизации, $1 \le i \le m+1$.

Возьмем МПЛ-преобразователь R, имеющий множество меток Σ'' и полученный последовательным применением операций расслоения и пополнения к МПЛ-преобразователю I_Σ . Из МПЛ-преобразователя B_1 операцией закрепления при $d = c(n+1)^s$, $V = (\Sigma\setminus\{Z_0\})\times\{a\}$ получим МПЛ-преобразователь B_2 . Возьмем МПЛ-преобразователь Q в виде последовательного соединения

$$\boxed{f_1(A_1)} - \boxed{R} - \cdots - \boxed{f_{s+1}(A)} - \boxed{R} - \boxed{B_2} .$$

Пусть M_F - множество всех F-разметок, где $F \subseteq \Sigma$. Тогда условие $L(A)\cap M_F \subseteq L(B)\cap M_F$ равносильно эффективно проверяемому условию $L(Q)\cap M_F = \emptyset$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *- нормальная метаалгебра, в которой разрешима проблема σ-пустоты. Тогда в ней разрешимы проблемы σ-включения и σ-эквивалентности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых МПЛ-преобразователей А и В метаалгебры $\mathfrak{A}$ выполняются условия: $O(A) \subseteq O(B) \longleftrightarrow L(A) \subseteq L(B)$ & [А слабо эквивалентен В] , $O(A) = O(B) \longleftrightarrow O(A) \subseteq O(B)$ & $O(B) \subseteq O(A)$. Эти эквивалентности переносятся и на σ-отношения. Остается применить теорему I' и лемму I.

СЛЕДСТВИЕ I. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *- нормальная метаалгебра, в которой разрешима проблема σ-пустоты. Тогда в ней разрешимы проблемы слабой эквивалентности, включения и эквивалентности.*

МПЛ'-преобразователь $A = (K,U,\Sigma,\alpha,\varphi,\phi,h,q_0,q^*,s,\Gamma)$ называется СПЛ'-преобразователем, когда $\Gamma = \{a_1\}$ - однобуквенный алфавит. Аналогично МПЛ-преобразователь А называется СПЛ-преобразователем, когда $\Gamma = \{a_1\}$. Учитывая, что магазины СПЛ'-преобразователя А есть фактически счетчики, будем его конфигурации, имеющие вид $(q,u,(Z_0(a_1)^{n_1},\ldots,Z_0(a_1)^{n_s},\gamma_{s+1}),\mu)$, записывать в виде $(q,u,(n_1,\ldots,n_s,\gamma_{s+1}),\mu)$. Соответственно модифицируем параметры СПЛ'-преобразователя А следующим образом:

1) $U = N^s\times U'$;

2) $\alpha(n_1,\ldots,n_s,\gamma_{s+1}) = (sq(n_1),\ldots,sq(n_s))$, где

$$sq(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n > 0; \end{cases}$$

3) $\varphi(\sigma, q, \alpha(n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1}), (n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1})) \in \{(n'_1, \dots$
$\dots, n'_s, \gamma'_{s+1}), n'_i \in N, \ |n'_i - n_i| \le 1, 1 \le i \le s, \ \gamma'_{s+1} \in U'\}$;

4) начальный элемент θ множества U равен $(0, \dots, 0, \theta')$.

Далее используются понятия ΣТС- и ΣТС'-преобразователей [I]. Содержательно ΣТС'-преобразователь А состоит из управляющей головки с конечной памятью, дополнительной памяти в виде конечного числа (s) конечноповоротных счетчиков, полного n-арного дерева D и бесконечной вправо выходной ленты. Работа ΣТС'-преобразователя происходит следующим образом. В начальный момент зафиксирована произвольная Σ-разметка μ (разметка дерева D), управляющая головка ΣТС'-преобразователя А в начальном состоянии q_0 установлена в корне дерева D, все счетчики имеют нулевые значения и выходная лента пуста. Затем происходит выполнение команд из множества H. В текущий момент времени будет выполняться некоторая команда $(\sigma_1, x_1, \dots, x_s, q, p, \sigma_2, y_1, \dots, y_s, \delta, T)$, если управляющая головка находится в состоянии q и обозревает вершину v, помеченную меткой σ, а $x_i = sq(\alpha_i)$, $i = \overline{1,s}$, где $a_1, \dots, a_s$ - значения счетчиков. Согласно этой команде преобразователь выполняет такие действия:

- дописывает справа символ δ к слову на выходной ленте;
- заменяет метку σ_1 вершины v меткой σ_2;
- изменяет значения счетчиков $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ соответственно на $\alpha_1 + y_1, \dots, \alpha_s + y_s$ ($y_i \in \{-1, 0, 1\}$, $1 \le i \le s$);
- переводит управляющую головку в состояние p и сдвигает ее на вершину w, где $v \in w\Delta$ при $T = R_{-1}$, $w = v$ при $T = R_0$, $w = v(i-1)$ при $T = R_i$, $1 \le i \le n$ ($|\Delta| = n+1$).

Множество всех входных Σ-разметок μ, при обработке которых ΣТС'-преобразователь А за конечное число шагов попадает в заключительное состояние q^*, называется множеством, распознаваемым ΣТС'-преобразователем А, и обозначается через $L(A)$.

Следом ΣТС'-преобразователя А на вершине $v \neq \varepsilon$ при поведении ρ над разметкой μ называется последовательность состояний $S(A, v, \mu, \rho)$, в которых управляющая головка преобразователя А при поведении ρ над разметкой μ проходит по ребру, соединяющему слово v с его максимальным собственным левым подсловом. ΣTC'-преобразователь A имеет ограниченный режим d, если при каждом поведении ρ над любой разметкой μ длины его следов не превышают d.

ΣTC-преобразователь есть ΣTC'-преобразователь ограниченного режима. В [I] показано, что проблема пустоты $L(A) = \emptyset$ в классе ΣTC-преобразователей разрешима.

СПЛ -преобразователь $A = (K, U, \Sigma, \alpha, \varphi, \phi, h, q_0, q^*, s)$ называется ОПЛ-преобразователем, если для него указаны натуральные числа d, m, r такие, что для A выполняются П(d)-, ЧС(m)-, ПМ(r)-условия и, кроме того, существует ΣTC-преобразователь $C = (K', \Sigma, \Sigma', H, q_0, q^*, s', r')$ с выделенными состояниями q_0^0, q_0' такой, что для любой Σ-разметки μ и любых вершин $v_0, \ldots, v_l$, $l \le m$, выполняется следующее требование. Пусть имеют место соотношения

$$(v_i, q_i, \gamma_i, \bar{\mu}_i) \underset{A}{\overset{O}{\Rightarrow}} (u_{i+1}, q_{i+1}, \gamma_{i+1}, \bar{\mu}_{i+1}), \quad 0 \le i \le l,$$

где $v_0 = \varepsilon$, $\gamma_0 = \theta$, $\bar{\mu}_0 = \mu$. Тогда должны иметь место соотношения

$$(v_i, q_0^0, \theta, \mu_i') \underset{C}{\models} (\varepsilon, q^*, \theta, \mu'_{i+1}), \quad 0 \le i < l,$$

где $\mu_0' = \bar{\mu}_0$ и вышеуказанными соотношениями единственным образом определяются $\mu_1', \ldots, \mu_l'$. При этом для $1 \le i \le l$ для любого натурального числа t должно выполняться в точности одно из условий

$$(\varepsilon, q_0', \theta, \mu_i') \underset{C}{\models} (\varepsilon, g_k, (t, 0, \ldots, 0), \mu_i'), \quad k \in \Delta \cup \{-1\},$$

и в точности одно из условий

$$(\varepsilon, q_0', (i, 0, \ldots, 0), \mu_i')) \underset{C}{\models} (\varepsilon, g_k, (t, 0, \ldots, 0), \mu_i'), \ k \in \Delta \cup \{-1\}.$$

При $u_i \in \Delta^{t-1} j \Delta^*$, $j \in \Delta$, выполняются условия, соответствующие случаю $k = j$, при $|u_i| < t$ - случаю $k = -1$. Особенность состояний q_0^0, q_0' состоит в следующем. Если ΣTC-преобразователь C начинает работу в состоянии q_0^0, то он действует далее как детерминированный ΣTC-преобразователь. Начиная в состоянии q_0', он действует как недетерминированный ΣTC-преобразователь. Будем говорить, что ΣTC-преобразователь C включен на моделирование, если он начинает в состоянии q_0^0. Будем говорить, что ΣTC-преобразователь C включен на угадывание, если он начинает в состоянии q_0'. Согласно определению ОПЛ-преобразователя, имеется возможность "выемки" (недетерминированным образом) посредством ΣТС-преобразователя С из Σ'-разметки μ'_i информации о t-м символе слова u_i.

Назовем СПЛ'-преобразователь А полулинейным макропреобразователем, или ПЛ-преобразователем, если известно, что А есть ОПЛ-преобразователь, хотя соответствующие числа d,m,r для него явно не указаны. Ниже будет доказано, что по любому ПЛ-преобразователю можно эффективно восстановить подходящие числа d,m,r. Это будет получено как следствие разрешимости проблемы σ-пустоты в классе ОПЛ-преобразователей. Заметим, что под разрешимостью проблемы пустоты в классе ОПЛ-преобразователей подразумевается следующее: существует алгоритм, который по любым ОПЛ-преобразователю А и связанному с ним согласно определению ΣТС-преобразователю С проверяет, пусто ли множество $L(A)$? Будем считать, что приведенная формулировка эквивалентна следующей: существует алгоритм, который по любому явному ПЛ-преобразователю А проверяет, пусто ли множество $L(A)$? Под явным ПЛ-преобразователем понимается ОПЛ-преобразователь А, для которого указан соответствующий ΣТС-преобразователь С. Наличие явно заданной второй компоненты, ΣТС-преобразователя С, будет подразумеваться и в формулировках утверждений о разрешимости других проблем для ПЛ-преобразователей. В некоторых подклассах класса ПЛ-преобразователей, например,в классе МЛ-преобразователей, при формулировке утверждений подразумеваемую компоненту (ΣТС-преобразователь С) можно считать просто отсутствующей, поскольку она может быть эффективно восстановлена по первой компоненте. Это достигается простыми приемами внесения локальной информации о моделируемом процессе вычислений в метки вершин [6].

ТЕОРЕМА 3. Существует алгоритм, который по любому явному ПЛ-преобразователю $A = (K,U,\Sigma',\alpha,\varphi,\psi,h,q_0,q^*,s)$ и любому множеству $\Sigma \subseteq \Sigma'$ определяет, существует ли Σ-разметка в множестве $L(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что в множестве $L(A)$ есть Σ-разметка μ. Пусть ρ - завершенное поведение ПЛ-преобразователя А над μ. Исследуем поведение ρ. Оно характеризуется, во-первых, тремя натуральными числами d,m,r, где d - число поворотов управляющей головки относительно дерева D при поведении ρ, m - число скачков, совершаемых при поведении ρ, r - максимальное число поворотов относительно какого-либо счетчика при поведении ρ. Вовторых, поведение ρ характеризуется натуральными числами $k_1 < \ldots$ $\ldots < k_m \le k_{m+1}$, определяемыми следующим образом. Поведение ρ разбивается на $m+1$ этап, где этап i состоит из участков с номерами $k_{i-1}+1, k_{i-1}+2, \ldots, k_i$, $1 \le i \le m+1$ $(k_0 = 0)$. Этап i заканчивается i-м скачком, $1 \le i \le m$, этап $m+1$ составляет остальную часть поведения ρ. Каждый участок представляет собой пространственно-временную часть движения управляющей головки преобразователя A по дереву D. Это означает, что для каждого $1 \le j \le k_{m+1}$ определены как последовательность вершин дерева D, обозреваемых управляющей головкой преобразователя A на j-м участке, так и соответствующая последовательность моментов времени, в которые обозреваются на j-м участке составляющие его вершины. Каждый $(k_{i-1}+1)$-й участок начинается в вершине ε_i, $1 \le i \le m+1$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon$, а ε_{i+1} есть вершина, в которую попадает управляющая головка преобразователя A при выполнении i-го скачка, $1 \le i \le m$. Определим концевую вершину k_i-го участка, $1 \le i \le m$. Пусть i-й скачок есть переход от конфигурации (u, p, γ, μ) к конфигурации (v, q, γ', μ'). Тогда u есть концевая вершина k_i-го участка. Значит, концевая вершина k_i-го участка, вообще говоря, не совпадает с начальной вершиной (k_i+1)-го участка. В остальных случаях для любого $j \in \{1, \ldots, k_{m+1}\} \setminus \{k_i \mid 1 \le i \le m\}$ концевая вершина j-го участка совпадает с начальной вершиной $(j+1)$-го участка. Разбиение любого i-го этапа на участки определяется сказанным выше и таким требованием: это разбиение должно содержать минимальное число участков, на каждом из которых управляющая головка преобразователя A не совершает поворотов относительно дерева D. Обозначим начальную вершину j-го участка через v'_j, а его концевую вершину – через v''_j, $1 \le j \le k_{m+1}$. Каждый j-й участок состоит из вершин, лежащих на кратчайшем пути из вершины v'_j в вершину v''_j. Различные участки могут частично или полностью накладываться друг на друга. Все поведение ρ имеет вид $\pi_0 \vdash \ldots \vdash \pi_{\bar{k}}$, где $\pi_0 = (\varepsilon, q_0, \theta, \mu)$, $\pi_i = (v_i, q_i, \gamma_i, \mu_i)$, $0 \le i \le \bar{k}$. Считаем, что в i-й момент времени ШЛ-преобразователь A находится в конфигурации π_i. Для $1 \le i \le m+1$ обозначим через t''_i начальный момент i-го этапа, где $t''_1 = 0$. Для любых чисел $1 \le j_1 < j_2 \le k_{m+1}$ обозначим через $\rho(j_1, j_2)$ следующее условие: существуют вершина x участка j_1 и вершина y участка j_2 такие, что $x \ne y$, $|x| = |y|$. Будем говорить, что для поведения ρ имеет место контрольная ситуация $(j_1, j_2, 0)$, если условие $\rho(j_1,j_2)$ выполняется, иначе будем говорить, что имеет место контрольная ситуация $(j_1,j_2,1)$.

Характеристикой поведения ρ назовем последовательность, в которой перечисляются числа d,m,r , числа $k_1,\dots,k_{m+1}$ и тройки вида (j_1,j_2,τ) такие, что имеет место контрольная ситуация (j_1,j_2,τ) , где $1 \le j_1 < j_2 \le k_{m+1}$, $k_1+1 \le j_2$. При этом для любой характеристики выполняются условия $d \le d'$, $m \le m'$, $r \le r'$, $k_{m+1} \le d' + m'$,где d',m',r' таковы, что для A выполнены $\Pi(d')$-, ЧС(m')- и ПМ(r')-условия.

Теперь изменим формулировку доказываемого утверждения. Будем доказывать существование алгоритма, который по любому явному ПЛ-преобразователю $A = (K,U,\Sigma',\alpha,\varphi,\psi,h,q_0,q^*,s)$, любому множеству $\Sigma \subseteq \Sigma'$ и любой характеристике $\mathcal{Y}$ определяет, существует ли Σ-разметка $\mu \in L(A)$, относительно которой поведение ПЛ-преобразователя A имеет характеристику $\mathcal{Y}$. Ясно, что доказав это, получим искомую теорему.

ПЛ-преобразователю A поставим в соответствие детерминированный конечноповоротный ΣТС-преобразователь (КП-преобразователь) B, изоморфный ПЛ-преобразователю $B' = (K,U,\Sigma',\alpha,\varphi',\psi',h,q_0,q^*,s)$, где $\varphi'(\Sigma' \times K \times \alpha(U) \times U) \subseteq N^s \times \{\varepsilon\}$, $\psi'(\Sigma' \times K \times \alpha(U) \times U) = \{\varepsilon\}$.Пусть еще C есть ΣТС-преобразователь, имеющий полное множество меток $\Sigma''(\Sigma \subset \Sigma'')$, s_2 счетчиков, связанный согласно определению с ПЛ-преобразователем A.

Покажем, что по КП-преобразователю B и ΣТС-преобразователю C можно эффективно построить ΣТС-преобразователь G так, что условие $L(G) \ne \emptyset$ равносильно существованию Σ-разметки $\mu' \in L(A)$, относительно которой поведение ПЛ-преобразователя A имеет характеристику $\mathcal{Y}$.

Для характеристики $\mathcal{Y}$ сохраним обозначения, принятые выше при исследовании поведения ρ . Искомый ΣТС-преобразователь G на входной разметке μ работает следующим образом. Он осуществляет три процесса, каждый из которых разбит на $m+1$ этап, а затем осуществляет "контроль характеристики" ($m+2$-й этап). Первый процесс состоит в моделировании КП-преобразователя B со сдвигами, соответствующими скачкам ПЛ-преобразователя A, второй процесс состоит в моделировании ΣТС-преобразователя C, третий процесс заключается в выборе вершин $\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{m+1}$. Осуществляется также промежуточная стыковка этапов этих трех процессов и частичный контроль характеристики.

ΣТС-преобразователь G имеет $s + s_2 + 2$ счетчика: s 1-счетчиков, s_2 2-счетчиков и два вспомогательных счетчика. Процесс моделирования КП-преобразователя B осуществляется только при помощи 1-счетчиков. Процесс моделирования ΣТС-преобразователя C осуществляется только при помощи 2-счетчиков. Полное множество меток ΣТС-преобразователя G имеет вид $\Sigma_1 = \{Z_0\} \cup \Sigma_0 \times \Sigma_0' \times \Sigma_0'' \times \Sigma_0'''$, где $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \{Z_0\}$, $\Sigma_0^{(i)} = \Sigma_0^{(i)} \setminus \{Z_0\}$, $1 \le i \le 3$, $\Sigma_0''' = \{0\} \cup \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_i = (j_i, y_i)$, $0 \le y_i \le 4$, $1 \le i \le n$, $1 \le n \le k_{m+2}$, $1 \le j_1 < \dots < j_n \le k_{m+2}\}$. Каждой Σ_1-разметке ν ставятся в соответствие ее 0-разметка ν^0, 1-разметка ν^1, 2-разметка ν^2, 3-разметка ν^3, где $\nu(x) = (\nu^0(x), \nu^1(x), \nu^2(x), \nu^3(x))$ для всех $x \ne \varepsilon$. Соответственно будем говорить о Σ_1-метке $\nu(x)$ и ее 0-метке $\nu^0(x)$, 1-метке $\nu^1(x)$, 2-метке $\nu^2(x)$, 3-метке $\nu^3(x)$. Моделирование КП-преобразователя B проводится относительно 1-разметки. Моделирование ΣТС-преобразователя C проводится относительно 2-разметки, 3-разметка служит для выделения участков и отдельных вершин (например, вершин ε_i, $2 \le i \le m+1$, v_j', v_j'', $1 \le j \le k_{m+1}$). Входная разметка ΣТС-преобразователя G есть Σ_2-разметка, где $\Sigma_2 = \{Z_0\} \cup \{\sigma, \sigma, \sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma_0\}$. Попасть в заключительное состояние ΣТС-преобразователь G может только выполнив последовательно $m+2$ этапа. При этом должны быть для $1 \le i \le m$ выполнены подэтапы "а"-"в" этапа i и подэтап "а" этапа $m+1$. Ниже описаны подэтапы "а"-"в" i-го этапа, $1 \le i \le m+1$. ΣТС-преобразователь G начинает работу над входной Σ_2-разметкой μ. Считается, что $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $q_1 = q_0$, $\alpha_0^t = 0$, $1 \le t \le s$, $\mu_0 = \mu$, μ_i – Σ_1-разметка, $\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^s$ – значения 1-счетчиков, образованные на этапе i, $1 \le i \le m$.

а) Моделируется работа КП-преобразователя B, начинающего в вершине ε_i в состоянии $q_i \in K$ относительно 1-разметки μ_{i-1}^1 при значениях 1-счетчиков $\alpha_{i-1}^1, \dots, \alpha_{i-1}^s$. Работа КП-преобразователя B моделируется включительно до такта, соответствующего скачку ПЛ-преобразователя B', или до такта, соответствующего попаданию B в заключительное состояние. При попадании КП-преобразователя B в заключительное состояние и успешном окончании частичного контроля характеристики (см.ниже примечание I) ΣТС-преобразователь G переходит к $m+2$-му этапу (см.ниже "контроль характеристики"). Если моделирование КП-преобразователя B доведено до скачка, то определяется состояние q_{i+1}, в которое попадает КП-преобразователь B в результате такта соответствующего скачку, и происходит переход к действию "б" этапа i (см.примечание 2). При выполнении действия "а"

Σ_1 -разметка μ_{i-1} превращается в Σ_1-разметку ν_i, где $\nu_i^0 = \mu_{i-1}^0$, $\nu_i^2 = \mu_{i-1}^2$. Для каждой вершины v, принадлежащей некоторому участку, сформированному при моделировании КП-преобразователя В, 3-метка $\mu_{i-1}^3(v)$ изменяется на 3-метку $\nu_i^3(v)$ следующим образом. В последовательность $\nu_i^3(v)$ вносится пара (j, y), если вершина v принадлежит участку j, причем

$$y = \begin{cases} 0 \text{ при } v = v_j' = v_j'' , \\ 1 \text{ при } v = v_j' , v \neq v_j'' , \\ 2 \text{ при } v \neq v_j' , v = v_j'' , \\ 3 \text{ при } v \neq v_j' , v \neq v_j'' . \end{cases}$$

Понятие участка понимается здесь так же, как и выше для поведения ρ. Если при моделировании КП-преобразователя В сформирован участок j, и он содержит корень дерева ε, то это запоминается управляющей головкой ΣТС-преобразователя G.

б) Осуществляется работа ΣТС-преобразователя С, включенного на моделирование, начинающего в вершине ε_i в состоянии q_0^0 относительно 2-разметки ν_i^2 при нулевых значениях 2-счетчиков. При выполнении действия "б" значения 1-счетчиков не изменяются, разметка ν_i превращается в разметку η_i, где $\nu_i^j = \eta_i^j$ при $j = 2$. После выполнения действия "б" управляющая головка ΣТС-преобразователя G находится в корне дерева, а 2-счетчики все имеют нулевое значение.

в) Моделируется работа ΣТС-преобразователя С, включенного на угадывание, относительно 2-разметки η_i^2 при нулевых значениях 2-счетчиков до тех пор, пока будет промоделирован вывод

$$(\varepsilon, q_0', (0, \ldots, 0), \eta_i^2) \models_C (\varepsilon, g_k, (t, 0, \ldots, 0), \eta_i^2)$$

при $k \in \Delta$. После этого первый из 2-счетчиков опустошается, а число t пересылается в $(s + s_2 + 1)$-й счетчик. Затем моделируется работа ΣТС-преобразователя С, включенного на угадывание, относительно 2-разметки η_i^2 при нулевых значениях 2-счетчиков до тех пор, пока будет промоделирован вывод

$$(\varepsilon, q_0', (0, \ldots, 0), \eta_i^2) \underset{C}{=} (\varepsilon, g_{-1}, (t_1, 0, \ldots, 0), \eta_i^2).$$

Далее последовательно опустошаются первый 2-счетчик и $(s + s_2 + 1)$-й счетчик, причем значение $(s + s_2 + 1)$-го счетчика пересылается в $(s+s_2+2)$-й счетчик и проверяется условие $t_1=t+1$. Если это условие неверно, то ΣТС-преобразователь G зацикливается. Иначе $(s+1)$-й, $(s+s_2+1)$-й счетчики получают значение нуль, а $(s+s_2+2)$-й счетчик получает значение t. Тогда ΣТС-преобразователь G, действуя недетерминированно и не изменяя меток вершин, идет из корня дерева вверх до тех пор, пока он выйдет на концевую вершину v последнего участка, возникшего ранее при моделировании КП-преобразователя Б. Одновременно при движении вверх по дереву ΣТС-преобразователь G последовательно уменьшает значение $(s+s_2+2)$-го счетчика так, что при выходе на вершину v он имеет значение $t-|v|$. Снова двигаясь недетерминированно вверх по дереву от вершины v и последовательно уменьшая значение $(s+s_2+2)$-го счетчика, ΣТС-преобразователь G при нулевом значении $(s+s_2+2)$-го счетчика выходит на (таким образом определенную) вершину ε_{i+1}, где $|\varepsilon_{i+1}|=t$. В результате формируется разметка μ_i, где $\mu_i(x)=\eta_i(x)$ при $x\neq\varepsilon_{i+1}$, $\mu_i^j(\varepsilon_{i+1})=\eta_i^j(\varepsilon_{i+1})$ при $0\leq j\leq 2$. Таким образом, описаны действия ΣТС-преобразователя G на этапе i, $1\leq i\leq m+1$.

<u>Примечание I к п."а"</u>. По ходу осуществления процесса моделирования КП-преобразователя В проводится частичный контроль характеристики посредством изменения состояний управляющей головки ΣТС-преобразователя G. Он состоит в проверке на каждом такте выполнения такого требования: характеристика $\mathscr{Y}$ по параметрам d, m, $r\ k_1,\dots,k_{m+1}$ не противоречит характеристике $\mathscr{Y}_0$ совокупного поведения КП-преобразователя В, промоделированного к моменту проверки на всех предшествующих этапах и на предшествующей части текущего этапа. Это требование означает, что характеристика $\mathscr{Y}_0$ еще может быть потенциально продолжена до характеристики с параметрами $d,m,r,k_1,\dots,k_{m+1}$. ΣТС-преобразователь G зацикливается, как только он обнаружит нарушение этого требования. Совокупное поведение КП-преобразователя В потенциально состоит из $m+1$ состыкованных этапов, причем переход к следующему этапу означает моделирование очередного скачка ПИ-преобразователя А.

<u>Примечание 2 к п."а"</u>. Пусть управляющая головка ΣТС-преобразователя G находится в вершине v и ее следует перевести в вершину ε_i. Для этого она опускается вниз к корню дерева и оттуда недетерминированно поднимается вверх по дереву до тех пор, пока выйдет на вершину ε_i. Последняя особым образом отмечена, что и позволяет ее найти. При выполнении этих действий метки обозреваемых вершин не изменяются.

Следующие определения используются на $m+2$-м этапе. Для любого числа $1 \le j \le k_{m+1}$ и любой вершины x участка y введем множество $V_j(x)$, называемое множеством относительных значений вершины x участка j. Множества вида $V_j(x)$ задаются индуктивным образом:

$V_j(x) = \{x\}$ при $1 \le j \le k_1$,

$V_{k_{i-1}+1}(\varepsilon_i) \supseteq \{v\phi(\mu_t(v_t), q_t, \alpha(\gamma_t), \gamma_t) \mid v \in V_{k_{i-1}}(v_t),\ t = t_i'' - 1\}$,

$V_{k_{i-1}+1}(x) \supseteq (V_{k_{i-1}+1}(\varepsilon_i)) = y$ при $x = \varepsilon_i y$,

$V_{k_{i-1}+1}(x) \supseteq \{v \mid v\Delta^{|y|} \cap V_{k_{i-1}+1}(\varepsilon_i) \ne \emptyset\}$ при $\varepsilon_i = xy$,

$V_j(x) \supseteq V_g(w)y$ при $g < i$, $w \in \{v_g', v_g''\}$, $x = wy$,

$V_j(x) \supseteq \{v \mid v\Delta^{|y|} \cap V_g(w) \ne \emptyset\}$ при $w = xy$, $g < j$, $w \in \{v_g', v_g''\}$.

Других элементов в множествах вида $V_j(x)$ нет.

"Контроль характеристики". Здесь описывается последний $m+2$-й этап работы ΣТС-преобразователя G. Он выполняется при условии, что уже успешно проведен частичный контроль характеристики. Этап $m+2$ разбивается на подэтапы, на каждом из которых осуществляется проверка, соответствующая некоторой одной контрольной ситуации характеристики $\mathcal{Y}$. Опишем один такой подэтап.

"Контроль ситуации (j_1, j_2, k)". Здесь действия ΣТС-преобразователя G выполняются по следующей схеме. Возможны два случая $k = 0$, $k = 1$. Для случая $k = 0$ схема имеет такой вид:

- выбирается наугад и запоминается в счетчиках натуральное число l;

- для $n = 1,2$ движением из корня дерева наугад отыскивается участок j_n, устанавливается, что он содержит вершину длины l, отыскивается и отмечается эта вершина (обозначаемая через x_n);

- проверяется, что $x_1 \ne x_2$ и для вершин $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, где $x_i \in \bar{x}_i\Delta$, $i = 1,2$, выполняется, по крайней мере, одно из условий: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\bar{x}_n$ не принадлежит участку j_n, $n = 1,2$;

- устанавливается, что пересечение $V_{j_1}(x_1) \cap V_{j_2}(x_2)$ пусто (см. примечание 3).

Для случая $k = 1$ схема имеет такой вид:

- строятся в счетчиках числа $|v_{j_1}'|$, $|v_{j_1}''|$, проверяется выполнимость условия $|v_{j_n}'|, |v_{j_n}''| < |v_{j_{n_1}}'|, |v_{j_{n_1}}''|$, $\{n, n_1\} = \{1,2\}$.

Если это условие неверно в каждом случае $\{n,n_1\} = \{1,2\}$, то производится следующее действие:

- проверяется выполнимость условия $\{n,n_1\} = \{1,2\}$, $\{u,v\} = \{v'_n, v''_n\}$, $u \preccurlyeq v$, $\{u',v'\} = \{v'_{n_1}, v''_{n_1}\}$, $u' \preccurlyeq v'$, $u \preccurlyeq u' \preccurlyeq v$, $v' \preccurlyeq v$ или $u \preccurlyeq v'$. Если по каждой контрольной ситуации успешно установлены перечисленные свойства, то ΣТС-преобразователь G попадает в заключительное состояние.

Примечание 3. Все действия схемы контроля ситуации (j_1, j_2, k) реализуются очевидным образом ΣТС-преобразователем G, который для этого использует только $(s + s_2 + 1)$-й и $(s+s_2+2)$-й счетчики. Исключение составляет реализация проверки условия $V_{j_1}(x_1) \cap \cap V_{j_2}(x_2) = \emptyset$. Опишем, как ΣТС-преобразователь G осуществляет проверку этого условия. В множестве $V_{j_n}(x_n)$ содержится конечное число относительных значений вершины x_n участка j_n. Проверка условия $V_{j_1}(x_1) \cap V_{j_2}(x_2) = \emptyset$ состоит в последовательной проверке условий $u_1 \neq u_2$, где u_i – произвольное относительное значение вершины x_i участка j_i. Проверку условия $u_1 \neq u_2$ преобразователь G проводит следующим недетерминированным образом:

- выбирается наугад и запоминается в счетчике натуральное число t ;

- затем недетерминированно проверяется (обнаруживается) выполнимость, по крайней мере, одного из таких свойств: а) $|u_1| \leq \leq t < |u_2|$, б) $|u_2| \leq t < |u_1|$, в) $u_i \in \Delta^{t-1} a_i \Delta^*$, $i = 1,2$, $a_1 \neq a_2$. Для того чтобы, имея в счетчике число t, проверить любое из указанных свойств, ΣТС-преобразователю G необходимо при отмеченной вершине x участка j и указанном способе вычисления ее относительного значения u обнаружить одно из условий $|u| < t$, $u \in \Delta^{t-1} a \Delta^*$, $a \in \Delta$. Опишем, как ΣТС-преобразователь G осуществляет это при помощи ΣТС-преобразователя C. Условие $|u| < t$ равносильно условию $|x| < t$. Пусть управляющая головка ΣТС-преобразователя G находится в корне дерева и t, 0 есть значения $(s+s_2+1)$-го, $(s+s_2+2)$-го счетчиков. Проверка условия $|x| < t$ идет так. Движением управляющей головки из корня дерева недетерминированно вверх отыскивается (ранее особо отмеченная 3-меткой) вершина x. Затем спуск из вершины x в корень дерева сопровождается вычитанием единиц в $(s+s_2+1)$-м счетчике и прибавлением единиц в $(s+s_2+2)$-м счетчике. Если при попадании в корень дерева значение $(s+s_2+1)$-го счетчика положительно, то $|x|<t$, иначе $|x|\geq t$. После этого в счетчиках (обратным перемещением единиц) восстанавливаются исходные значения $t, 0$. Остается при $|x|\geq t$ описать следующую процедуру.

"Процедура поиска t-го символа относительного значения вершины x участка j". Эта процедура задается рекурсивно. В исходный момент в $(s+s_2+1)$-м счетчике содержится число t. Так как $V_j(x)=\{x\}$ при $1\leq j\leq k_1$, то в этом случае процедура заключается в таких действиях: управляющая головка от корня дерева продвигается вверх на t шагов и выходит на вершину v длины t, запоминает символ a($a\in\Delta$, $v=v'a$), движется далее вверх до тех пор, пока не попадет на вершину x. Если удалось успешно завершить указанные действия, то этим искомый символ a обнаружен. Пусть $j>k_1$. Условимся, что $\delta_j(z)$ - произвольное относительное значение вершины z участка j. Возможны следующие случаи:

$\delta_j(x)$ задано в виде $\delta_g(v)y$, где $v\in\{v_g',v_g''\}$, $x=vy$. Тогда при $|v|<t$ на пути из v в x вершиной w, $|w|=t$, определяется t-й символ слова $\delta_j(x)$. При $t\leq|v|$ t-й символ слова $\delta_j(x)$ есть t-й символ слова $\delta_g(v)$;

$\delta_j(x)$ задано в виде левого подслова длины $|x|$ слова $\delta_g(v)$, где $v\in\{v_g',v_g''\}$, $x\preccurlyeq v$. Тогда t-й символ слова $\delta_j(x)$ есть t-й символ слова $\delta_g(v)$;

$j=k_{i-1}+1$, $x=\varepsilon_i$ и $\delta_j(x)$ задано в виде $\delta_{k_{i-1}}(v_b)w$, где $w=\phi(\mu_b(v_b), q_b, \alpha(\gamma_b), \gamma_b)$, $b=t_i''-1$. Тогда при $t\leq|v_b|$ t-й символ слова $\delta_j(x)$ есть t-й символ слова $\delta_{k_{i-1}}(v_b)$. Иначе он обнаруживается посредством ΣТС-преобразователя C, включенного на угадывание с начальной вершиной ε, значениями 2-счетчиков $i, 0, \dots, 0$, относительно 2-разметки μ_m^2, сформированной на первых m этапах. Он обнаруживается согласно определению ОПЛ-преобразователя как t-й символ слова u_i при $l=m$, $v_{\tau-1}=\varepsilon_\tau$, $1\leq\tau\leq m$, $\bar{\mu}_0=\mu^0$, $\mu_1'=\mu_m^2$.

Далее, для ΣТС-преобразователя G необходимо показать, что условие $L(G)\neq\emptyset$ равносильно существованию Σ-разметки $\mu'\in L(A)$, относительно которой поведение ПЛ-преобразователя A имеет характеристику $\mathcal{Y}$. В одну сторону это почти очевидно. Из существования указанной Σ-разметки μ' следует, что $\mu\in L(G)$, где Σ_1-разметка μ такова, что $\mu(x)=(\mu'(x),\mu'(x),\mu'(x),0)$ для всех $x\neq\varepsilon$. Это есть следствие того факта, что, обрабатывая Σ_1-разметку μ, ΣТС-преобразователь G может, в частности, выбрать все $\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{m+1}$ в точности такими, какими они возникают при обработке Σ-разметки μ' ПЛ-преобразователем A, Тогда для любой вершины x каждое ее относительное значение есть снова x. **Отсюда** этап "контроль характеристики" выполняется тривиально, поскольку различные вершины имеют различные относительные значения. Итак, из существования Σ-разметки $\mu' \in L(A)$ следует $L(G) \neq \emptyset$.

Докажем обратное. Пусть μ - Σ_2-разметка, работая над которой ΣТС-преобразователь G выполняет вышеуказанные $m+2$ этапа и попадает в заключительное состояние. Докажем, что для любых вершины x участка j_1 и вершины y участка j_2 имеет место следующее утверждение: если $\mu^0(x) \neq \mu^0(y)$, то $V_{j_1}(x) \cap V_{j_2}(y) = \emptyset$.

Из $\mu^0(x) \neq \mu^0(y)$ следует $x \neq y$. Кроме того, $V_\tau(z) \subseteq \{v \mid v \in \Delta^{|\bar{z}|}\}$ для любых числа $1 \le \tau \le k_{m+1}$ и вершины z участка τ. Все вершины участка τ расположены в дереве D на пути снизу вверх из вершины u в вершину v, где $\{u,v\} = \{v'_\tau, v''_\tau\}$. Значит, можно считать, что $|x| = |y|$, $x \neq y$, $j_1 < j_2$. Возьмем вершины x_1, x_2, где x_n - вершина участка j_n, $n = 1,2$, так, что $|x_1| = |x_2|$, $x_1 \neq x_2$ и для вершин $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ($x_n \in \bar{x}_n\Delta$, $n = 1,2$) выполняется, по крайней мере, одно из условий: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\bar{x}_n$ не принадлежит участку j_n, $n = 1,2$. Вершины x_1, x_2 определяются единственным образом. На этапе "контроль характеристики" было установлено, что $V_{j_1}(x_1) \cap V_{j_2}(x_2) = \emptyset$. Отсюда согласно способу определения множеств относительных значений вершин участков для любых вершин z_1, z_2, где z_n - вершина участка j_n, $x_n \prec z_n$, $n = 1,2$, получаем $V_{j_1}(z_1) \cap V_{j_2}(z_2) = \emptyset$. Следовательно, $V_{j_1}(x) \cap V_{j_2}(y) = \emptyset$.

Теперь по Σ_2-разметке μ и соответствующей ей 0-разметке μ^0 построим Σ-разметку $\mu' \in L(A)$. Она определяется ниже так, что поведение ρ' ПЛ-преобразователя A над Σ-разметкой μ' имеет ту же характеристику, что и поведение ρ_0 КП-преобразователя B, промоделированное при работе ΣТС-преобразователя G над Σ_2-разметкой μ. Для любого участка j, $1 \le j \le k_{m+1}$, сохраняются значение условия $v'_j \preccurlyeq v''_j$ и слово γ, где $u\gamma = v$, $\{u,v\} = \{v'_j, v''_j\}$. Отличие может состоять только в выборе вершин вида ε_i, каждая из которых в случае поведения ρ' будет выбрана из множества относительных значений $V_{k_{i-1}+1}(\varepsilon_i)$, образованного при поведении ρ_0.

В целом каждый участок j поведения ρ получается сдвигом участка j поведения ρ_0 так, что если x – вершина участка j поведения ρ', то $x \in V_j(y)$, где y – вершина участка j поведения ρ_0, $|y| = |x|$. При таком перемещении участков никакие вершина x участка j_1 и вершина y участка j_2 при $\mu^0(x) \neq \mu^0(y)$ не могут сместиться в одну и ту же вершину, поскольку $V_{j_1}(x) \cap V_{j_2}(y) = \emptyset$ согласно доказанному выше утверждению. Прежде чем определить Σ-разметку μ', каждой вершине x участка j поведения ρ_0, $1 \le j \le k_{m+1}$, поставим в соответствие вершину $f(x,j)$ следующим образом:

$$f(x,j) = x \quad \text{при} \quad 1 \le j \le k_1 ,$$

$$f(\varepsilon_i, k_{i-1}+1) = f(v_t, k_{i-1}) \phi(\mu_t(v_t), q_t, \alpha(\gamma_t), \gamma_t),$$

$$\text{где} \quad t = t_i'' - 1,$$

$$f(x,j) = f(\varepsilon_i, k_{i-1}+1)y \quad \text{при} \quad x = \varepsilon_i y,\ k_{i-1}+1 \le j \le k_i ,$$

$$f(x,j) \prec f(\varepsilon_i, k_{i-1}+1),\ |f(x,j)| = x \quad \text{при} \quad \varepsilon_i = xy,$$

$$k_{i-1}+1 \le j \le k_i,\ 2 \le i \le m+1 .$$

Σ-разметка μ' определяется так. Если $z = f(x,j)$ для некоторой вершины x участка j, то $\mu'(z) = \mu^0(x)$. В остальных случаях $\mu'(z) = \sigma$, где $\sigma \in \Sigma \setminus \{Z_0\}$ – произвольная фиксированная метка.

Тогда $\mu' \in L(A)$ и в силу изложенного выше поведения ПЛ-преобразователя A над Σ-разметкой μ' имеет характеристику $\mathcal{G}$. Итак, условие $L(G) \neq \emptyset$ эквивалентно существованию завершенного поведения ρ' ПЛ-преобразователя A с характеристикой $\mathcal{G}$ над некоторой Σ-разметкой μ'.

Условие $L(G) \neq \emptyset$ эффективно разрешимо [I]. Таким образом, теорема 3 доказана. В ходе доказательства было установлено

СЛЕДСТВИЕ 2. С у щ е с т в у е т а л г о р и т м, к о т о р ы й п о л ю б ы м ПЛ-п р е о б р а з о в а т е л ю A, м н о ж е с т в у Σ и л ю б о й х а р а к т е р и с т и к е $\mathcal{G}$ о п р е д е л я е т, с у щ е с т в у е т л и в м н о ж е с т в е $L(A)$ Σ-р а з м е т к а μ, о т н о с и т е л ь н о к о т о р о й п о в е д е н и е ПЛ-п р е о б р а з о в а т е л я A и м е е т х а р а к т е р и с т и к у $\mathcal{G}$.

Для любого ПЛ-преобразователя А и любых натуральных чисел d,m,r пусть условие $\Phi(A,d,m,r)$ означает, что существует поведение ρ ПЛ-преобразователя А, при котором он совершает не менее d поворотов управляющей головки относительно дерева, не менее m скачков и не менее r поворотов относительно некоторого из счетчиков.

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует алгоритм, который по любому ПЛ-преобразователю А и любым числам d,m,r определяет, имеет ли место условие $\Phi(A,d,m,r)$.

ЛЕММА 2. Существует алгоритм, который по любому ПЛ-преобразователю А определяет числа d,m,r такие, что условие $\Phi(A,d',m',r')$ ложно при всех d',m', r' таких, что выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $d'>d$, $m'>m$, $r'>r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим последовательность множеств M_0, $M_1,\ldots$, состоящих из троек чисел так, что $M_0=\{(0,0,0)\}$, а M_{i+1} задается по M_i следующим образом: $M_{i+1}=\{(n_1,n_2,n_3)\mid$ выполняется условие $\Phi(A,n_1,n_2,n_3)$ и существует тройка $(m_1,m_2,m_3)\in M_i$ такая, что $m_j\le n_j\le m_j+1$, $1\le j\le 3\}$. В силу следствия 3 последовательность множеств $M_0,M_1,\ldots$ конструктивна. Кроме того, начиная с некоторого номера k имеем $M_k=M_{k+i}$, $i\in N$, в силу того, что А есть ПЛ-преобразователь. Тогда d,m,r есть соответственно максимальные значения первой, второй и третьей координаты в тройках из множества M_k.

СЛЕДСТВИЕ 4. Существует алгоритм, который по любому ПЛ-преобразователю А определяет числа d,m,r такие, что для ПЛ-преобразователя А имеют место условия П(d), ЧС(m), ПМ(r).

СЛЕДСТВИЕ 5. В классе ПЛ-преобразователей разрешима проблема σ-пустоты.

ЛЕММА 3. В классе ПЛ-преобразователей разрешимы проблема слабой σ-эквивалентности, проблемы σ-включения и σ-эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс ПЛ-преобразователей образует нормальную метаалгебру, поэтому в силу теорем 2, I' и следствия 5 в классе ПЛ-преобразователей разрешимы указанные проблемы.

ТЕОРЕМА 4. В классе ПЛ-преобразователей разрешимы проблемы слабой эквивалентности, включения, эквивалентности и пустоты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ 6. Существует алгоритм, который по любым ПЛ-преобразователям A и B проверяет выполнимость условия $L_1(A) \subseteq L_1(B)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Существует алгоритм, который по любым ПЛ-преобразователям A и B проверяет выполнимость таких условий:

а) существуют Σ-разметки μ, μ_1, μ_2 и вершины u, v_1, v_2 такие, что $(u, \mu, v_1, \mu_1) \in O_1(A)$, $(u, \mu, v_2, \mu_2) \in O_1(B)$ и $(v_1, \mu_1) \neq (v_2, \mu_2)$;

б) $O_1(A) = O_1(B)$.

СПЛ-преобразователь $A = (K, U, \Sigma, \alpha, \varphi, \phi, h, q_0, q^*, s, m)$ называется МЛ-преобразователем, если (при сохранении обозначений из определения СПЛ-преобразователя) дополнительно выполняются такие условия (условия I-5, см. с.I2I-I22):

6) $U' = \Delta^*$,

7) $\varphi(\sigma, q, \alpha(n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1}), (n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1})) \in \{ (n'_1, \dots$
$\dots, n'_s, \gamma'_{s+1}) \mid n'_i \in N,\ 1 \le i \le s,\ \gamma'_{s+1} \in \{\varepsilon\} \cup \gamma_{s+1}\Delta^* \}$,

8) $\phi(\sigma, q, \alpha(n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1}), (n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1})) = \gamma^R_{s+1}$,

где γ^R_{s+1} - слово, зеркально обращенное к слову γ_{s+1};

9) если $h(\sigma, q, \alpha(n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1})) \in K \times \Sigma \times \{R_*\}$, то $\varphi(\sigma, q, \alpha(n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1}), (n_1, \dots, n_s, \gamma_{s+1})) \in N^s \times \{\varepsilon\}$.

ТЕОРЕМА 5. В классе МЛ-преобразователей разрешимы: а) проблема σ-пустоты, б) проблема слабой эквивалентности, в) проблема включения для областей определенности функционалов, г) проблема включения, д) проблема эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый МЛ-преобразователь является ПЛ-преобразователем, поэтому по следствию 5 в классе МЛ-преобразователей разрешима проблема σ-пустоты. Класс МЛ-преобразователей образует нормальную метаалгебру. Отсюда по теореме I получаем разрешимость проблемы слабой эквивалентности. Далее по лемме I и теореме 2 получаем разрешимость остальных проблем.

Для произвольных элементов v,μ положим, что $(v,\mu)' = v$. Пусть M - множество всех Σ-разметок. Частичным Σ-функционалом назовем любой частичный функционал $\mathcal{F}$: $\Delta^* \times M \to \Delta^* \times M$, где $\mathcal{F}(u,\mu) \in \Delta^* \times \{\mu\}$ для любого слова $u \in \Delta^*$ и любой Σ-разметки μ. На множестве частичных Σ-функционалов определим некоторые операции.

Операция суперпозиции частичным Σ-функционалам G и H ставит в соответствие частичный Σ-функционал Q так, что $Q(u,\mu) = H(G(u,\mu))$.

Операция выбора при фиксированном множестве $F \subseteq \Sigma$ частичным Σ-функционалам G, H и R ставит в соответствие частичный Σ-функционал Q так, что

$$Q(u,\mu) = \begin{cases} G(u,\mu), \text{ если } & \mu((R(u,\mu))') \in F, \\ H(u,\mu), \text{ если } & \mu((R(u,\mu))') \notin F, \\ \text{не определено, если } & R(u,\mu) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Операция выбора является сложной операцией. В ее образовании фактически участвуют две операции системы алгоритмических алгебр В.М.Глушкова [5]: операция α-дизъюнкции и операция левого умножения условия на оператор. Вариант операции выбора, когда R - тождественный функционал, будем называть операцией ветвления.

Σ-функционалы, задаваемые МЛ-преобразователями, назовем МЛ-функционалами. Пусть $\mathcal{A}_1$ - алгебра, множество образующих которой состоит из МЛ-функционалов, а множество операций - из операций суперпозиции и выбора.

СЛЕДСТВИЕ 8. В алгебре $\mathcal{A}_1$ разрешима проблема тождества.

Действительно, операциям суперпозиции и выбора над частичными Σ-функционалами можно сопоставить соответствующие и аналогично называемые операции над ПЛ'-преобразователями. Тогда замыкание класса МЛ-преобразователей относительно операций суперпозиции и выбора есть подкласс класса ПЛ-преобразователей.

Операция параллельного соединения частичным Σ-функционалам G и H ставит в соответствие частичный Σ-функционал Q так, что $Q(u,\mu) = ((G(u,\mu))' \cdot (H(u,\mu))', \mu)$. Сохранив название, перенесем операцию параллельного соединения на класс ПЛ-преобразователей над Σ-разметками (не изменяющих размеченного дерева в результате его обработки). Параллельное соединение двух таких макропреобразователей A и B есть макропреобразователь C, действующий на слове $u \in \Delta^*$ и Σ-разметке μ следующим образом. Вначале макропреобразователь C моделирует A и записывает в свою память $(A(u,\mu))'$. Затем он моделирует B и записывает в свою память $(B(u,\mu))'$. Наконец, он скачком попадает в вершину $(A(u,\mu))' \cdot (B(u,\mu)')$. Следовательно, результат определяется в виде $C(u,\mu) = ((A(u,\mu))' \cdot (B(u,\mu))', \mu)$.

Пусть $\mathcal{A}_2$ - алгебра, множество образующих которой состоит из МЛ-функционалов, а множество операций - из операций суперпозиции, выбора и параллельного соединения.

СЛЕДСТВИЕ 9. В алгебре $\mathcal{A}_2$ разрешима проблема тождества.

В [6] введено понятие LC-схемы, соответствующее понятию линейной унарной рекурсивной схемы с засылками констант. Пусть $\mathcal{A}_3$ - алгебра, множество образующих которой состоит из LC-схем, а множество операций - из операций суперпозиции, выбора и параллельного соединения.

СЛЕДСТВИЕ 10. В алгебре $\mathcal{A}_3$ разрешимы проблемы слабой эквивалентности, включения и эквивалентности.

СЛЕДСТВИЕ 11. Для металинейных унарных рекурсивных схем с засылками констант разрешимы проблемы включения и эквивалентности.

Возникает также вопрос о логическом описании в рамках разрешимых теорий класса множеств, распознаваемых полулинейными макропреобразователями. В этом направлении можно указать теорию S2S, связанную с автоматами над полными бинарными деревьями [2], и универсальную теорию натуральных чисел со сложением и делимостью [7-9], связанную с двусторонними конечными автоматами с одним конечноповоротным счетчиком [10]. В связи с этим возьмем трехсортную модель

$$\mathfrak{M}_{\mathscr{X}} = \langle \mathscr{X}, \Delta^*, N;\ 0, 1, +, |, =, \rho_1, \rho_2^{-1}, \{\rho_2^a\}_{a\in\Delta}, \{A\}_{A\in\mathscr{X}} \rangle ,$$

где $\mathscr{X}$ - некоторый класс преобразователей, задающих частичные функции вида $\Delta^* \to \Delta^*$, Δ^* - множество слов в конечном алфавите Δ, на натуральном ряде N заданы числа 0,1, операция сложения (+), отношения делимости ($|$) и равенства (=), а предикаты $\rho_1 : \Delta^* \times \mathscr{X} \times \Delta^* \to \{И, Л\}$, $\rho_2^a :\ \Delta^*\ N \to \{И, Л\}$, $a \in \{-1\} \cup \Delta$, таковы, что $\rho_1(u, A, v) \leftrightarrow A(u) = v$, $\rho_2^{-1}(u, n) \leftrightarrow |u| < n$, $\rho_2^a(u, n) \leftrightarrow \exists v \exists \gamma (u = va\gamma \ \&\ |u| = n - 1)$.

Пусть в формулах первого порядка модели $\mathfrak{M}_{\mathscr{X}}$ допускаются только словарные и числовые переменные (и константы из класса $\mathscr{X}$). В силу результата Липшица-Бельтюкова-Мартьянова и работы [10] для многих классов $\mathscr{X}$ универсальная теория модели $\mathfrak{M}_{\mathscr{X}}$ будет разрешима. Это верно, например, когда $\mathscr{X}$ - класс машин Тьюринга с выходной лентой, не изменяющих рабочую ленту в процессе вычисления. Заметим, что эквивалентность двух таких машин А и В выражается формулой

$$\forall u \forall v (\rho_1(u, A, v) \leftrightarrow \rho_1(u, B, v)).$$

Литература

1. ЛИСОВИК Л.П. К проблеме эквивалентности для преобразователей над Σ-деревьями с конечноповоротными счетчиками //Кибернетика. - 1984. - №5. - С. 19-24.

2. RABIN M.O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees// Trans.Amer.Math.Soc.- 1969.-Vol.141,N 7. - P.1-35.

3. КОТОВ В.Е. Введение в теорию схем программ. -Новосибирск: Наука, СО, 1978. - 257 с.

4. GARLAND S.J., LUCKHAM D.C. Program schemas, recursion schemas and formal languages.- Report UCLA-ENG-7154.- Los Angeles: Univ.Calif.,1971.- 67 p.

5. ГЛУШКОВ В.М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм //Кибернетика. - 1965. - №5. - С. 1-9.

6. ЛИСОВИК Л.П. Металинейные схемы с засылками констант //Программирование. - 1985. - №2. - С. 29-38.

7. LIPSHITZ L. The diophantine problem for addition and divisibility// Trans.Amer.Math.Soc.- 1978. - Vol. 235, N 1.-P.271-283.

8. БЕЛЬТЮКОВ А.П. Разрешимость универсальной теории натуральных чисел со сложением и делимостью //Зап. науч.семинаров ЛОМИ.- 1976. - Т.60, № 7. - С. 15-28.

9. МАРТЬЯНОВ В.И. Универсальные расширенные теории целых чисел //Алгебра и логика. - 1977. - Т. 16, №5. - С. 588-602.

10. ЛИСОВИК Л.П. О разрешимых проблемах для преобразователей с конечноповоротными счетчиками.//Кибернетика. -1985.-№3. -С.1-8.

Поступила в ред.-изд.отд.
4 апреля 1986 года