МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 125

УДК 517.948: 530.1: 539.12

БИСПИНОРЫ И ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (3,3)

Ю.С.Владимиров

Введение

В течение многих лет Ю.И.Кулаков и его ученики развивают оригинальный подход к описанию физической картины мира на основе предложенной Кулаковым теории физических структур. Идеи этой теории и ее математический аппарат подробно изложены в [1,2]. Следует лишь напомнить, что в основе этой теории лежат представления об одном или двух однородных множествах, элементы которых вступают в отношения, принадлежащие полю вещественных (или комплексных) чисел. Полагается, что из исходных множеств можно произвольно выбирать конечные равномощные подмножества элементов (n в случае одного или $n+m$ в случае двух множеств) такие, что отношения между элементами для всех таких подмножеств удовлетворяют некоторому фундаментальному для данной структуры соотношению (закону, структуре), что означает наличие некоторой симметрии между элементами, названной феноменологической. Ю.И.Кулаков и Г.Г.Михайличенко [1,2] решили принципиальную задачу - показать, какие вообще существуют структуры (ранга (n) на одном множестве и рангов (n,m) на двух множествах). Ю.И.Кулаков [1,2], Г.Г.Михайличенко [3] и В.Х.Лев [4] исследовали конкретные физические структуры для ряда начальных рангов. Кулаков [1,2] показал, что физические структуры наименьших рангов соответствуют основным законам механики (2-му закону Ньютона), электродинамики (закону Ома), термодинамики. Он также показал, что евклидовы геометрии различной размерности, а также геометрии пространств постоянной кривизны (Лобачевского, Римана) и пространство-время Минковского описываются физическими структурами соответствующих рангов на множестве элементов одного сорта.

Важно отметить, что во всех рассмотренных случаях из первичного, экспериментально проверяемого факта феноменологической симметрии (того или иного ранга) на множествах физических элементов вытекает возможность выведения в качестве вторичных таких свойств этих элементов, которые в других теориях принимаются за исходные (как бы "самоочевидные").

Например, при рассмотрении механики Ньютона, когда множествами физических элементов служат множество тел и множество ускорителей, а отношения между телами и ускорителями задаются величиной ускорения, принцип феноменологической инвариантности состоит в существовании между четырьмя ускорениями универсального соотношения, вид которого не зависит от выбора двух тел и двух ускорителей. При этом основные физические величины - масса и сила - здесь возникают как своеобразные феноменологические инварианты, следующие из самого факта существования феноменологической симметрии.

Имеются веские основания утверждать, что указанными выше областями применения далеко не исчерпываются возможности теории физических структур Кулакова. Весьма заманчиво применить эту теорию для анализа ряда принципиальных проблем фундаментальной теоретической физики, а именно: обоснования 3-мерности классического пространства, развития нового подхода к описанию электромагнитного, гравитационного и иных взаимодействий, а также их объединения, выяснения сути скрытых размерностей пространства-времени, формулировки нового взгляда на спинорные свойства элементарных частиц, других проблем. Для решения указан -

ных проблем в данной статье показывается, что широко используемые в современной физике спиноры (точнее, биспиноры) можно интерпретировать на языке физических структур Кулакова как структуры ранга (3,3) на множествах из двух типов элементов.

Основным мотивом, приведшим к написанию этой статьи, послужили неоднократные высказывания о том, что классические пространственно-временные отношения не являются первичными, а сами вытекают из более элементарных отношений, опирающихся на закономерности микромира, такие как, например, свойства электро - магнитных взаимодействий и наличие двух видов электрически заряженных частиц (положительных и отрицательных). Известно, что все пробные макрообъекты, между которыми справедливы классические геометрические отношения, состоят из электрически заряженных микрочастиц. Возникает вопрос: можно ли прийти к пространственным отношениям, положив в основу этот эмпирический факт?

Если такая задача имеет решение, то в качестве исходной следует взять физическую структуру на двух множествах (ранга (n, m)). Затем в рамках такой структуры нужно выделить специальным образом связанные элементы из противоположных множеств, грубо говоря, нейтральные электрические диполи, между которыми должны формироваться классические геометрические отношения. В данной статье сделан шаг в направлении решения этой задачи.

§1. Параметры структуры ранга (3,3) и компоненты спинора

Исходя из вышерассмотренной идеологии, изложим основные требования, предъявляемые к искомой структуре ранга (n,m).

1) Поскольку в конечном счете объекты должны получаться нейтральными, то оба исходных множества зарядов должны выступать симметрично, т.е. искомая структура имеет ранг (n,n) .

2) Как показали Кулаков и Михайличенко, структур ранга (n,n) имеется счетное множество. Естественно полагать, что физическая реальность описывается минимальным рангом структур, удовлетворяющих перечисляемым здесь требованиям.

3) Можно предположить, что отношения между нейтральными образованиями (диполями), соответствующие каким-то классическим понятиям, имеют такую же природу (в виде определителей), что и закон искомой структуры. Такое отношение заведомо отлично от нуля и содержит как минимум 2 x 2 = 4 элементов. Следовательно, искомая структура должна иметь ранг (3,3).

Структуры ранга (3,3) исследовались в работах [4,5] безотносительно к какой-либо физической задаче. Закон для структуры ранга (3,3) выражается в виде равенства нулю определителя, построенного из отношений между двумя тройками элементов (α,β,γ) и (i,k,j) из двух множеств :

$$\begin{vmatrix} u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha j} \\ u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta j} \\ u_{\gamma i} & u_{\gamma k} & u_{\gamma j} \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Здесь и далее греческие индексы нумеруют частицы одного сорта, а латинские - другого. Полагая, что парные отношения u между элементами из двух множеств описываются вещественными числами, автор [1] показал*) , что они должны представляться в виде:

$$u_{\alpha i} = \psi_1(i)\varphi_1(\alpha) + \psi_2(i)\varphi_2(\alpha) \quad , \qquad (2)$$

где $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ и $\psi_1(i)$ $\psi_2(i)$ - пары параметров, сопоставляемые элементам соответственно двух множеств. Можно видеть, что закон (1) будет выполняться и в том случае, если па-

*) Строго говоря, имеется еще один возможный вид $u'_{\alpha i} = \psi_1(i)\varphi_1(\alpha) + \psi_2(i) + \varphi_2(\alpha)$, однако для наших целей он не подходит.

раметры ψ_s и φ_s, $s = 1,2$ являются комплексными числа - ми. В дальнейшем эти параметры будем полагать комплексными.

Назовем фундаментальным отношением между двумя парами элементов (α, β) и (i, k) значение определителя, образованного из четырех парных отношений между выбранными элементами. Подставляя в него вид отношений из (2), легко показать, что

$$\begin{vmatrix} u_{\alpha i} & u_{\alpha k} \\ u_{\beta i} & u_{\beta k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1(i) & \psi_1(k) \\ \psi_2(i) & \psi_2(k) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha) & \varphi_1(\beta) \\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_2(\beta) \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

т.е. фундаментальное отношение определяется произведением специальных отношений (определителей) между парами элементов в каждом из множеств.

Рассмотрим линейные преобразования параметров структуры:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(i)' &= \alpha\psi_1(i) + \beta\psi_2(i); \\ \psi_2(i)' &= \gamma\psi_1(i) + \delta\psi_2(i); \\ \varphi_1(\alpha)' &= \alpha'\varphi_1(\alpha) + \beta'\varphi_2(\alpha); \\ \varphi_2(\alpha)' &= \gamma'\varphi_1(\alpha) + \delta'\varphi_2(\alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ - некоторые комплексные параметры преобразований. Ограничимся преобразованиями, ос - тавляющими инвариантными отдельные определители в (3) справа. Это налагает ограничения на значения параметров:

$$\alpha\beta - \beta\gamma = 1; \qquad \alpha'\beta' - \beta'\gamma' = 1 . \qquad (5)$$

Очевидно, что при этом сохранится как (1), так и останется инвариантным фундаментальное отношение (3).

Возникшие здесь понятия напоминают имеющиеся в стандарт - ной теории спиноров. Чтобы их сопоставить, напомним необходимые элементы из алгебры спиноров и спинтензоров, придерживаясь обозначений из книги Ю.Б.Румера [6]. Компоненты спинтензоров $a_{1\dot{1}}, \dots, a_{2\dot{2}}$ определяются через компоненты спиноров ξ_1, ξ_2 и η_1, η_2 и компоненты сопряженных им спиноров $\xi_{\dot{1}}$, $\xi_{\dot{2}}$ и $\eta_{\dot{1}}$, $\eta_{\dot{2}}$ в виде

$$a_{1\dot{1}} = \xi_1 \xi_{\dot{1}} + \eta_1 \eta_{\dot{1}}; \dots ; a_{2\dot{2}} = \xi_2 \xi_{\dot{2}} + \eta_2 \eta_{\dot{2}}. \quad (6)$$

Спинтензорный инвариант, сопоставляемый квадрату вектора (это может быть квадрат импульса или квадрат интервала), представляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{1\dot{1}} & a_{1\dot{2}} \\ a_{2\dot{1}} & a_{2\dot{2}} \end{vmatrix} = (a_{1\dot{1}} a_{2\dot{2}} - a_{2\dot{1}} a_{1\dot{2}}) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \xi_{\dot{1}} & \eta_{\dot{1}} \\ \xi_{\dot{2}} & \eta_{\dot{2}} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Отдельные определители справа являются инвариантными (соответственно в пространстве спиноров и сопряженных спиноров) относительно преобразований:

$$\left.\begin{array}{ll|ll} \xi_1' = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2; & & \xi_{\dot{1}}' = \alpha^*\xi_{\dot{1}} + \beta^*\xi_{\dot{2}}; \\ \xi_2' = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2; & & \xi_{\dot{2}}' = \gamma^*\xi_{\dot{1}} + \delta^*\xi_{\dot{2}}, \end{array}\right\} \quad (8)$$

где комплексно сопряженные друг с другом коэффициенты преобразований удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1; \qquad \alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* = 1. \quad (9)$$

Из изложенного видно, что между параметрами структуры ранга (3,3) и компонентами спиноров (и сопряженных спиноров) может быть установлено соответствие:

$$\left.\begin{array}{l|l} \phi_1(i) \to \xi_1; \ \phi_1(k) \to \eta_1; & \varphi_1(\alpha) \to \xi_{\dot{1}}; \ \varphi_1(\beta) \to \eta_{\dot{1}}; \\ \phi_2(i) \to \xi_2; \ \phi_2(k) \to \eta_2; & \varphi_2(\alpha) \to \xi_{\dot{2}}; \ \varphi_2(\beta) \to \eta_{\dot{2}}. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Следующий принципиальный момент перехода от структур ранга (3,3) к спинорам состоит в интерпретации условия комплексного сопряжения $\psi_s(i)$ и $\varphi_s(\alpha)$. Это связано с тем, что классические геометрические отношения устанавливаются не между любыми двумя парами разноименно заряженных частиц, а только между связанными в атомы и молекулы частицами. Очевидно, что факт связанности должен как-то отражаться в теории структур. Будем полагать, что условие нахождения в паре двух противоположно заряженных частиц состоит в комплексной сопряженности параметров. Свяжем частицы парами (α,i) и (β,k), тогда

$$\varphi_s(\alpha) = \psi_s^*(i); \quad \varphi_s(\beta) = \psi_s^*(k), \tag{11}$$

кроме того, будем полагать, что в (4) и (5)

$$\alpha' = \alpha^*; \quad \beta' = \beta^*; \quad \gamma' = \gamma^*; \quad \delta' = \delta^*. \tag{12}$$

Следует подчеркнуть, что при отождествлении величин в (10) отдельные слагаемые в определителях (3) и (7) слева не совпадают, тогда как результирующие выражения тождественны. Это видно из явной записи отношений u согласно отождествлениям (10):

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha i} &= \xi_1 \xi_{\dot 1} + \xi_2 \xi_{\dot 2}; & u_{\alpha k} &= \eta_1 \xi_{\dot 1} + \eta_2 \xi_{\dot 2}; \\ u_{\beta i} &= \xi_1 \eta_{\dot 1} + \xi_2 \eta_{\dot 2}; & u_{\beta k} &= \eta_1 \eta_{\dot 1} + \eta_2 \eta_{\dot 2}; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

т.е. эти выражения не являются компонентами спинтензора. Характерно также, что шпуры матриц (3) и (7) совпадают.

§2. Биспиноры и параметры структуры ранга (3,3)

Поскольку параметры структуры ранга (3,3) удалось отождествить с компонентами 4-мерных спиноров, то при сделанных выше предположениях можно утверждать, что эта структура соответствует неким отношениям в 4-мерном многообразии. Используя известные формулы перехода от спиноров к тензорам и соответствие (10), легко проинтерпретировать через параметры структуры ранга (3,3) все 4-мерные векторные и тензорные величины.

Как известно, из комплексных компонент спинтензора можно построить компоненты вещественного 4-вектора. Обозначим его через β_μ, тогда в согласии с [6] имеем:

$$\left.\begin{aligned}
B_0 &= \frac{1}{2}(a_{1\dot{1}} + a_{2\dot{2}}) = \frac{1}{2}(\xi_1\xi_{\dot{1}} + \xi_2\xi_{\dot{2}} + \eta_1\eta_{\dot{1}} + \eta_2\eta_{\dot{2}});\\
B_3 &= \frac{1}{2}(a_{1\dot{1}} - a_{2\dot{2}}) = \frac{1}{2}(\xi_1\xi_{\dot{1}} - \xi_2\xi_{\dot{2}} + \eta_1\eta_{\dot{1}} + \eta_2\eta_{\dot{2}});\\
B_2 &= \frac{1}{2}(a_{1\dot{2}} + a_{2\dot{1}}) = \frac{1}{2}(\xi_1\xi_{\dot{2}} + \xi_2\xi_{\dot{1}} + \eta_1\eta_{\dot{1}} + \eta_2\eta_{\dot{1}});\\
B_2 &= \frac{i}{2}(a_{1\dot{2}} - a_{2\dot{1}}) = \frac{i}{2}(\xi_1\xi_{\dot{2}} - \xi_2\xi_{\dot{1}} + \eta_1\eta_{\dot{2}} - \eta_2\eta_{\dot{1}}).
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Квадрат вектора $\beta_\mu\beta^\mu$ должен совпадать со спинтензорным инвариантом (7) (или (3)), что имеет место лишь при сигнатуре 4-мерного многообразия (+ - - -). Следовательно,характер структуры ранга (3,3) соответствует сигнатуре классического прост - ранства-времени.

Известно также, что к выражениям (14) можно прийти, по - строив 4-компонентный биспинор и подобрав к нему соответствующее представление γ-матриц. Определим биспинор, руководст - вуясь следующими соображениями.

1) 4-компонентный столбец Ψ строится из двух компонент спинора и двух компонент сопряженного спинора (как это обычно и делается).

2) Сопряженный спинор в Ψ берется таким, чтобы он не был комплексно сопряженный выбранному спинору. На языке структур это означает, что две вторые компоненты описывают частицу другого сорта, не находящуюся в паре с верхней частицей.

3) Инвариант $\bar{\Psi}\Psi = \Psi^{+}\gamma_0\Psi$ с точностью до знака должен совпадать с суммой (или разностью) отдельных спинорных инвариантов справа в (3) и (7).

4) Матрица γ_0 должна быть временно-подобной, т.е. $\gamma_0^2 = 1$.

Перечисленным условиям удовлетворяет следующее определение биспинора:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_{\dot 2} \\ -\eta_{\dot 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(i) \\ \psi_2(i) \\ \varphi_2(\beta) \\ -\varphi_1(\beta) \end{pmatrix}; \qquad (15)$$

$$\Psi^{+} = (\xi_{\dot 1}, \xi_{\dot 2}, \eta_2, -\eta_1) = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \psi_2(k), -\psi_1(k)).$$

Ему соответствует конкретное представление матрицы

$$\gamma_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Здесь выбор знака несущественен; он скажется лишь при определении пространственно-подобных матриц γ_i. Тогда легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi = \Psi^{+}\gamma_0\Psi &= -(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) - (\xi_{\dot 1}\eta_{\dot 2} - \xi_{\dot 2}\eta_{\dot 1}) = \\ &= -[\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)\varphi_1(\beta)] - \\ &- [\psi_1(i)\psi_2(k) - \psi_2(i)\psi_1(k)]. \end{aligned} \qquad (17)$$

Нетрудно показать, что компоненты вектора (14) получаются с помощью матрицы γ_0 и трех пространственно-подобных матриц

Дирака в стандартном представлении

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad (18)$$

Тогда все компоненты вектора (14) легко проиллюстрировать на языке параметров структуры ранга (3,3):

$$\left.\begin{aligned} 2B_0 &= \bar{\Psi}\gamma_0\Psi = \phi_1(i)\varphi_1(\alpha) + \phi_2(i)\varphi_2(\alpha) + \\ &\qquad + \phi_1(k)\varphi_1(\beta) + \phi_2(k)\varphi_2(\beta); \\ 2B_3 &= \bar{\Psi}\gamma_3\Psi = \phi_1(i)\varphi_1(\alpha) - \phi_2(i)\varphi_2(\alpha) + \\ &\qquad + \phi_1(k)\varphi_1(\beta) - \phi_2(k)\varphi_2(\beta); \\ 2B_1 &= \bar{\Psi}\gamma_1\Psi = \phi_1(i)\varphi_2(\alpha) + \phi_2(i)\varphi_1(\alpha) + \\ &\qquad + \phi_1(k)\varphi_2(\beta) + \phi_2(k)\varphi_1(\beta); \\ 2B_2 &= \bar{\Psi}\gamma_2\Psi = i[\phi_1(i)\varphi_2(\alpha) - \phi_2(i)\varphi_1(\alpha) + \\ &\qquad + \phi_1(k)\varphi_2(\beta) - \phi_2(k)\varphi_1(\beta)]. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Обычным образом введем пятую матрицу Дирака

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Она пространственно-подобна: $\gamma_5^2 = -1$; тогда пятая компонента вектора вещественна и имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\gamma_5\Psi = \Psi^{+}\gamma_0\gamma_5\Psi = -i[(\xi_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}} - \xi_{\dot{2}}\eta_{\dot{1}}) - \\ - (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)] = i[(\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)\varphi_1(\beta) - \\ - (\phi_1(i)\phi_2(k) - \phi_2(i)\phi_1(k))]. \end{aligned} \qquad (21)$$

Следовательно, условие обращения в нуль 5-й компоненты вектора B_5 (если оно используется) означает равенство двух инвариантов.

Для четырех компонент псевдовектора имеем выражения, аналогичные (19), но с некоторыми измененными знаками:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi &= i(-\eta_2\eta_{\dot{2}} - \eta_1\eta_{\dot{1}} + \xi_1\xi_{\dot{1}} + \xi_2\xi_{\dot{2}}) = \\
&= i(-\psi_2(k)\varphi_2(\beta) - \psi_1(k)\varphi_1(\beta) + \\
&\quad + \psi_1(i)\varphi_1(\alpha) + \psi_2(i)\varphi_2(\alpha))\,; \\
\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi &= -i(\eta_2\eta_{\dot{1}} + \eta_1\eta_{\dot{2}} - \xi_2\xi_{\dot{1}} - \xi_1\xi_{\dot{2}}) = \\
&= -i(\psi_2(k)\varphi_1(\beta) + \psi_1(k)\varphi_2(\beta) - \\
&\quad - \psi_2(i)\varphi_1(\alpha) - \psi_1(i)\varphi_2(\alpha))\,; \\
\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi &= -\eta_2\eta_{\dot{1}} + \eta_1\eta_{\dot{2}} + \xi_2\xi_{\dot{1}} - \xi_1\xi_{\dot{2}} = \\
&= -\psi_2(k)\varphi_1(\beta) + \psi_1(k)\varphi_2(\beta) + \\
&\quad + \psi_2(i)\varphi_1(\alpha) - \psi_1(i)\varphi_2(\alpha)\,; \\
\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi &= -i(-\eta_2\eta_{\dot{2}} + \eta_1\eta_{\dot{1}} - \xi_1\xi_{\dot{1}} + \xi_2\xi_{\dot{2}}) = \\
&= -i(-\psi_2(k)\varphi_2(\beta) + \psi_1(k)\varphi_1(\beta) - \\
&\quad - \psi_1(i)\varphi_1(\alpha) + \psi_2(i)\varphi_2(\alpha))\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Оставшиеся 6 возможных комбинаций - компоненты 4-мерного тензора ранга 2 имеют вид:

$$\bar{\Psi}\gamma_0\gamma_1\Psi = -(\eta_2\xi_2 - \eta_1\xi_1 + \xi_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} - \xi_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}}) =$$

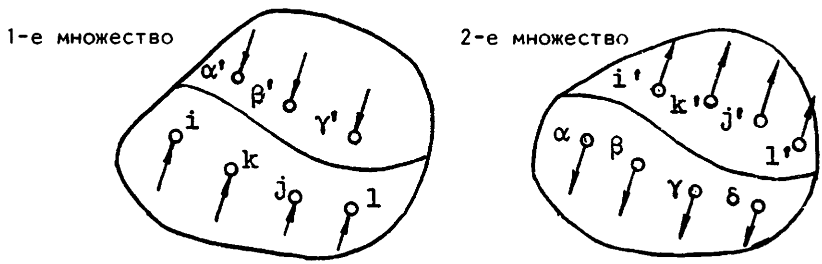
$$
\left.\begin{aligned}
&= -(\psi_2(i)\psi_2(k) - \psi_1(i)\psi_1(k) + \\
&+ \varphi_1(\alpha)\varphi_1(\beta) - \varphi_2(\alpha)\varphi_2(\beta)); \\
\bar{\Psi}\gamma_0\gamma_2\Psi &= i(\eta_2\xi_2 + \eta_1\xi_1 + \xi_{\dot 1}\eta_{\dot 1} + \xi_{\dot 2}\eta_{\dot 2}) = \\
&= i(\psi_2(i)\psi_2(k) + \psi_1(i)\psi_1(k) + \\
&+ \varphi_1(\alpha)\varphi_1(\beta) + \varphi_2(\alpha)\varphi_2(\beta)); \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\bar{\Psi}\gamma_2\gamma_3\Psi &= i(\eta_2\xi_2 - \eta_1\xi_1 - \xi_{\dot 1}\eta_{\dot 1} + \xi_{\dot 2}\eta_{\dot 2}) = \\
&= i(\psi_2(i)\psi_2(k) - \psi_1(i)\psi_1(k) - \\
&- \varphi_1(\alpha)\varphi_1(\beta) + \varphi_2(\alpha)\varphi_2(\beta)),
\end{aligned}\right\} \quad (23)
$$

т.е. записываются через парные комбинации элементов одного сорта.

§3. Структура ранга (3,3) в релятивистской электродинамике

До сих пор излагалась формальная интерпретация спиноров и биспиноров через понятия физической структуры на двух множествах. Однако известно, что биспиноры широко используются в современной теории поля, в частности в релятивистской электродинамике для описания волновых функций частиц и античастиц спина 1/2 (электронов и позитронов). Следовательно, понятия физической структуры ранга (3,3) могут непосредственно быть сопоставлены с терминами и выражениями релятивистской электродинамики. Приступим к этой задаче.

Прежде всего уточним физический смысл элементов двух множеств структуры ранга (3,3) в приложении к данной задаче. Известно, что в релятивистской электродинамике рассматриваются, вопервых, частицы двух сортов (частицы и античастицы) и, во-вторых, их состояния в два момента времени: начальные и конечные. При этом имеет место специфическое обстоятельство - рождение частицы в некотором смысле эквивалентно уничтожению античастицы, и наоборот. Воспользуемся этим и положим, что в первое множество физической структуры ранга (3,3) попадают волновые функции начальных состояний частиц (обозначены латинскими индексами) и волновые функции конечных состояний античастиц (обозначены греческими индексами со штрихом). Тогда во второе множество физической структуры входят волновые функции начальных состояний античастиц (обозначены греческими индексами без штрихов) и волновые функции конечных состояний частиц (обозначены латинскими индексами со штрихом). На рисунке названные элементы двух множеств обозначены стрелками с направлениями в будущее



(вверх) или в прошлое (вниз), как это принято изображать в диаграммной технике квантовой электродинамики.

Имея в виду описание отношения двух частиц (двух пар величин) в начальном и конечном состояниях, доопределим для данной задачи понятие комплексного сопряжения компонентов спиноров. В разделе 1 это означало факт нахождения элементов двух множеств "в паре" друг с другом. Здесь смысл аналогичен, только понятие "в паре" означает либо начальное и конечное состояния одной и той же частицы, либо функции (параметры) аннигилирующей пары: частица-античастица.

В согласии со сказанным произведем следующую интерпрета - цию компонент биспинора через параметры физической структуры (и соответственно волновые функции частиц и античастиц):

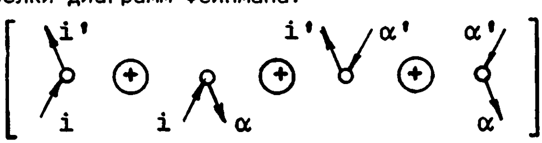
$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \psi_1(i) + \psi_1(\alpha'); & \xi_{\dot 1} &= \varphi_1(i') + \varphi_1(\alpha);\\
\xi_2 &= \psi_2(i) + \psi_2(\alpha'); & \xi_{\dot 2} &= \varphi_2(i') + \varphi_2(\alpha);\\
\eta_1 &= \psi_1(k) + \psi_1(\beta'); & \eta_{\dot 1} &= \varphi_1(k') + \varphi_1(\beta);\\
\eta_2 &= \psi_2(k) + \psi_2(\beta'); & \eta_{\dot 2} &= \varphi_2(k') + \varphi_2(\beta).
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

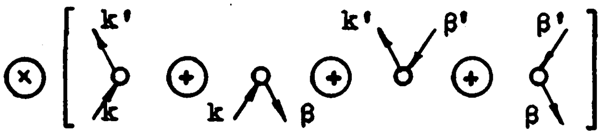
В соответствии с этим и определением биспинора (15) имеем ин - терпретацию 4-компонентной Ψ-функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_{\dot 2} \\ -\eta_{\dot 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(i) + \psi_1(\alpha') \\ \psi_2(i) + \psi_2(\alpha') \\ \varphi_2(k') + \varphi_2(\beta) \\ -\varphi_1(k') - \varphi_2(\beta) \end{pmatrix} \qquad (25)$$

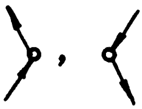
и аналогичное выражение для сопряженных компонент Ψ^+. Оче - видно, что пары параметров ψ_s и φ_s физической структуры ранга (3,3) соответствуют двум возможным проекциям спина фер- мионов.

Фундаментальное отношение $\bar\Psi\gamma_\mu\Psi\cdot\bar\Psi\gamma^\mu\Psi$, соответствую- щее спинтензорному инварианту (3) или (7), легко записать, под- ставив отождествления (24) и (25) в правую часть (7). Однако мы ограничимся лишь графическим выражением результата через уже упоминавшиеся стрелки диаграмм Фейнмана:

$\bar\Psi\gamma_\mu\Psi\cdot\bar\Psi\gamma^\mu\Psi \Rightarrow$  $\otimes$

 (26)

В этой символической записи отдельные диаграммы имеют смысл:

 - соответственно переход частицы и античастицы из начальных в конечные состояния;

 - процесс рождения пары: частицы и античастицы;

 - процесс аннигиляции частицы и античастицы.

Обратим особое внимание на то, что в изображенных диаграммах отсутствуют фотонные линии и что вообще между частицами нет взаимодействия (сравните с фейнмановскими диаграммами в [7]). Это отражает характерную черту теории физических структур - она описывает некие "сложившиеся", идеализированные отношения типа соотношений между равновесными системами в термодинамике, евклидовых пространственных отношений или геометрий постоянной кривизны. Все это отношения с симметриями. Взаимодействия должны проявляться в виде нарушений этих симметрий. Именно такую смысловую нагрузку в релятивистской электродинамике несут фотоны как переносчики электромагнитного взаимодействия, одновременно нарушающие феноменологическую симметрию (физическую структуру ранга (3,3)) для самих частиц.

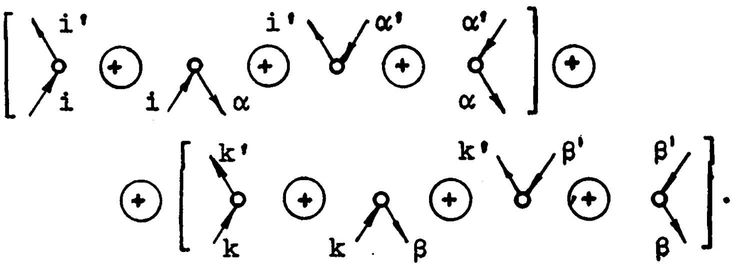
Представляет интерес интерпретация компонент 4-мерного вектора $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$. Ее легко получить, подставив (24) в выражения для отдельных компонент вектора в (14). Они все однотипны, поэтому ограничимся лишь одной компонентой:

$$2B_0 = \bar{\Psi}\gamma_0\Psi = \sum_{s=1}^{2}[\psi_s(i)\varphi_s(i') + \psi_s(i)\varphi_s(\alpha) +$$

$$+ \psi_s(\alpha')\varphi_s(i') + \psi_s(\alpha')\varphi_s(\alpha)] + \sum_{s=1}^{2}[\psi_s(k)\varphi_s(k') +$$

$$+ \psi_s(k)\varphi_s(\beta) + \psi_s(\beta')\varphi_s(k') + \psi_s(\beta')\varphi_s(\beta)]. \qquad (27)$$

Эти выражения изображаются совокупностью диаграмм:



(28)

Заметим, что при построении квадрата вектора из компонент вида (28) остаются только перекрестные слагаемые (из двух квадратных скобок), тогда как квадратичные слагаемые сокращаются.

Следует подчеркнуть, что здесь не учитывались соображения о тождественности частиц. Очевидно также, что соотношение (1), соответствующее феноменологической симметрии ранга (3,3), будет выполняться независимо от интерпретации компонент спиноров и соображений о смысле комплексного сопряжения,так как оно опирается лишь на определение (2).

§4. Заключительные замечания

1) Таким образом, в данной работе показано, что от структур ранга (3,3) можно перейти к теории спиноров и биспиноров,в частности, продемонстрировано, что фундаментальное отношение между двумя парами разноименных элементов соответствует спин - тензорному инварианту в теории спиноров. Более того, в работе

дана физическая интерпретация элементов двух множеств структуры при применении ее (через используемые биспиноры) в релятивистской электродинамике. Примечательно, что в данном подходе постулат о двух электрических зарядах диктует спинорность частиц.

2) Следует еще раз подчеркнуть, что фундаментальное отношение структуры ранга (3,3) (спинтензорный инвариант) имеет смысл квадрата вектора в 4-мерном многообразии с сигнатурой (+ - - -), такой же, как и у классического пространства-времени. Однако это еще не означает решения сформулированной во введении задачи - получения классических пространственно-временных отношений из структуры ранга (3,3). Пока ниоткуда не следует, что полученный инвариант имеет смысл интервала между событиями. Интерпретация в случае релятивистской электродинамики свидетельствует, что введенные компоненты 4-вектора имеют смысл компонент 4-тока частиц. Тем не менее можно надеяться, что данный результат может послужить основой для перехода в дальнейшем от структур ранга (3,3) к классическим пространственно-временным отношениям.

3) В изложенной интерпретации релятивистской электродинамики нашло отражение принципиальное свойство физических структур (феноменологических симметрий) - отсутствие взаимодействий. Это не удивительно ввиду ряда результатов Г.Г.Михайличенко [8] и В.Х.Льва [9], показавших для некоторых конкретных случаев соответствие между физическими структурами и группами Ли. Переход от теории физических структур к теории, описывающей взаимодействия (в частности, электромагнитное), следует искать в духе широко используемого сейчас калибровочного подхода к описанию взаимодействий. Как известно, в калибровочных теориях исходными являются симметрии - наличие неких групп Ли с соответствующими параметрами. Затем производится локализация групп, т.е. задается зависимость параметров групп от координат. Для сохранения симметрий вводятся поля, описывающие соответствующие взаимо-

действия. Предстоит найти аналогичную процедуру локализации в терминах теории физических структур. В том,что это возможно, убеждают упомянутые выше результаты Михайличенко и Льва об эквивалентности ряда структур и групп Ли.

4) Несмотря на отмеченное отсутствие взаимодействий в рамках теории физических структур, в изложенном выше можно усмотреть специфическую ситуацию, содержащую в себе элементы взаимодействия частиц. Здесь имеется в виду упоминавшиеся в разделах 1 и 3 условия о так называемом нахождении частиц (элементов) "в паре". Напомним, оно состояло в комплексной сопряженности параметров структуры. Оно приводит к парному отношению

$$u_{\alpha i} = \psi_1(i)\varphi_1(\alpha) + \psi_2(i)\varphi_2(\alpha) = \xi_1\xi_{\dot{1}} + \xi_2\xi_{\dot{2}} \quad . \qquad (29)$$

Подставляя сюда выражения $\xi_1 = x_1 + ix_2$ и $\xi_2 = x_3 + ix_4$, где $x_1, \ldots, x_4$ - вещественные числа, находим

$$u_{\alpha i} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad . \qquad (30)$$

Если предположить некоторое фиксированное значение для парного отношения $u_{\alpha i}$ (связанной пары), то оно будет характеризоваться точкой на поверхности 3-мерной сферы в 4-мерном евклидовом пространстве. Можно усмотреть связь между (30) и известным результатом В.А.Фока [10] об (0)4-симметрии в квантово-механической задаче водородоподобного атома. Напомним, что суть результата Фока состоит в возможности перехода (с помощью процедуры стереографического проектирования) от уравнения Лапласа на поверхности гиперсферы в 4-мерном импульсном пространстве к уравнению Шрёдингера в координатном представлении для задачи водородоподобного атома. Последнее автоматически оказывается содержащим кулоновский потенциал электромагнитного поля $A_0 \sim q/r$.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.-Новосибирск, 1968.(Новосиб. госуниверситет).

2. КУЛАКОВ Ю.И. О теории физических структур //Записки научных семинаров ЛОМИ. Т.127. - Л., 1983. - С. 103-151.

3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии //Докл. АН СССР. - 1981. - Т.260, №4. - С. 803-805.

4. ЛЕВ В.Х. Бинарная структура ранга (3,3) //Структурный анализ символьных последовательностей. -Новосибирск. - 1984. - Вып. 101: Вычислительные системы. -С. 91-113.

5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Групповые свойства физической структуры ранга (3,3) /МГУ. -М.,1987.-20 с. -Деп. в ВИНИТИ 29.05.87, № 3855-В87.

6. РУМЕР Ю.Б. Спинорный анализ. -М.-Л., 1936.

7. ФЕЙНМАН Р. Квантовая электродинамика.-М.: Мир, 1964.

8. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии //Докл. АН СССР. - 1983. -Т. 269, № 2. -С. 284-288.

9. ЛЕВ В.Х. Алгебры Ли в теории физических систем //Моделирование в пленочной электромеханике. -Новосибирск, 1985. -Вып. 110: Вычислительные системы. -С. 89-94.

10. ФОК В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия //Изв. АН СССР. - 1935. - Т.2. - С.169-184.

Поступила в ред.-изд.отд.

20 октября 1987 года