МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 1

УДК 519.4+681.142 /155

ЗАКОНОМЕРНОСТИ СТРУКТУРЫ НАУЧНЫХ ТЕОРИЙ

М.С.Бургин, В.И.Кузнецов

Введение

Изучение любых объектов или процессов предполагает поиск и выявление связанных с ними закономерностей (структурных, динамических и т.п.). В настоящей работе объектом исследования выступает научная (математическая, физическая, биологическая и т.п.) теория. При этом она рассматривается как сложное полисистемное образование, обладающее иерархическим строением. Согласно структурно-номинативному подходу [3] в теории выделяются пять подсистем.

Логико-лингвистическая подсистема обеспечивает функционирование теории как концептуально-дескриптивного средства представления и организации знания. Ее различные уровни иерархии образуют: 1) понятия, представляемые различными связанными с ними структурами; 2) термины, являющиеся именами понятий; 3) алфавиты и словари языков теории, которые строятся из системы терминов и ряда вспомогательных элементов; 4) правила построения выражений; 5) семейства языков теории; 6) правила вывода (в основном дедуктивные) одних выражений из других; 7) аксиомы (законы) теории; 8) логические исчисления, построенные из исходных аксиом с помощью правил вывода.

Модельно-репрезентативная подсистема служит для концептуального представления в теории внешней по отношению к ней реальности. Различные уровни иерархии этой подсистемы составляют: 1) экспериментальные модели объектов из предметной области теории; 2) полные модели объектов, при построении которых используется концептуальный аппарат данной теории; 3) области возможных применений теории; 4) модели объектов, для которых выполняются законы теории; 5) законы первого и более высоких уровней ("обычные" законы, ограничения, вероятностные законы, принципы и т.п.), представленные определенными множествами моделей объектов, множествами таких множеств и т.д.

Проблемно-эвристическая подсистема обеспечивает постановку и решение с помощью теории самых различных познавательных и практических задач. В качестве ее основных элементов выступают задачи, проблемы, вопросы, задания, гипотезы.

Прагматико-процедурная подсистема раскрывает научную теорию как совокупность концептуальных действий (выводов, процессов интерпретаций и решений задач, различных математических преобразований и т.п.). Главную роль в ней играют понятия операции, процедуры, алгоритма, а также различные оценки (истинность, эффективность, робастность и т.д.).

Система связей отражает факт целостности теории, состоящей в том, что обычно ее подсистемы имеют общие элементы и объединяющие их компоненты.

Последние три подсистемы, как и первые две, также обладают иерархическим строением. Выбор перечисленных подсистем осуществлялся таким образом, чтобы каждая из них могла в определенной мере представлять какую-либо сторону теории в целом. Рассмотрение меньших подсистем не дает такой возможности.

Полисистемная природа научной теории служит объективным основанием для выдвижения самых различных образов теории. Дей -

ствительно, стандартный подход [17] понимает научную теорию как некоторое ассерторическое формальное (дедуктивное) исчисление, т.е. как формальную теорию. Тем самым он отражает ряд аспектов логико-лингвистической подсистемы, хотя и не исчерпывает ее полностью. Аналогично обстоит дело и с другим развитым методологическим подходом к реконструкции научной теории - структуралистским [13,16]. В нем теория рассматривается как разветвленная система моделей объектов из предметной области теории. Таким образом, и структуралистский подход полностью укладывается в модельно-репрезентативную подсистему структурно-номинативной модели научной теории.

Предложенный Ю.Л.Ершовым и К.Ф.Самохваловым [5] новый подход к строгому представлению научной (математической) теории рассматривает теорию со стороны ее проблемно-эвристической подсистемы. Разработка Н.Г.Загоруйко, К.Ф.Самохваловым и Д.И.Свириденко [6] математических моделей эмпирических теорий показывает, что более полное представление научных теорий требует выхода за границы одной подсистемы структурно-номинативной модели. А именно каноническое представление эмпирической теории h имеет вид (v, obs^{v}, T^{v}), а аксиоматическое - вид (v, obs^{v}, S^{Ω}), где v - множество предикатных символов (имен); obs^{v} - инструкции о том, как и чем проводить наблюдения, чтобы они относились к теории h; T^{v} - тестовый алгоритм; S^{Ω} - аксиоматическая система сигнатуры Ω. Последняя включает v и состоит из терминов теории h. В силу всего этого компоненты v и S^{Ω} эмпирической теории относятся к ее логико-лингвистической, а компоненты obs^{v} и T^{v} - к ее прагматико-процедурной подсистемам.

В целом структурно-номинативная модель позволяет не только объединить эти и другие образы теории в единое целое, указав одновременно те стороны теории, которые отражаются различными образами. Она, во-первых, существенно развивает каждый из них, и, во-вторых, устанавливает между ними глубокие связи, не подвергавшиеся до сих пор строгому анализу. Это дает в совокупности более адекватную и вместе с тем точную картину того, чем же являются реальные научные теории, и позволяет вскрыть многие закономерности их строения и развития.

1. Основные конструкции и результаты теории именованных множеств

Возможности для точного и строго анализа научной теории, ее подсистем, компонентов и элементов дает теория именованных множеств [2]. В ее рамках исследуются самые общие и универсальные свойства отношения именования, а также развивается аппарат для выражения конкретных свойств именования в каждом отдельном случае. Применение теории именованных множеств к анализу научных теорий основывается на том, что "понятийную основу любой науки составляет сложная сеть имен вещей, имен идей и имен имен. Она эволюционирует сама и меняется ее проекция на реальность" [9, с.15]. Поскольку все элементы теории: понятия, модели, законы, задачи, алгоритмы, оценки и т.д. - имеют структуру именованного множества, то теория именованных множеств позволяет анализировать как сами эти элементы, так и связи между ними, как статические, так и динамические их аспекты. При этом важно подчеркнуть, что имя здесь понимается весьма широко, например, как некоторая знаковая конструкция, являющаяся символом, обозначением, названием, описанием, определением или моделью объекта материальной или идеальной природы. С этой точки зрения понятие именованного множества фиксирует то, что в познании имена самого различного вида используются не сами по себе, а как имена самых различных сущностей, связываемых с познанием и представленных элементами носителя соответствующего именованного множества. В качестве таких сущностей выступают познаваемые объекты, формы и способы их представления в знании, когнитивные и практические действия с объектами,преобразования понятий,моделей и т.д. и т.п.Именем может выступать не только некоторый концептуальный знак или комбинация таких знаков, но и чувственный образ объекта, результат выполненных над объектом количественных измерений, качественные и количественные модели объекта и прочее. Причем определенные элементы теории в одних отношениях могут выступать в качестве имен, а в других - быть объектами, которые именуются с помощью других имен.

Для введения понятия именованного множества зафиксируем три категории множеств (или классов) и их отображений (отношений) $\mathbf{Ens}$, $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Col}$, для которых выполняется: 1) $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Ens}$, $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Set} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathbf{Col}$; 2) $\mathrm{Mor}\,\mathbf{Ens}, \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set} \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathbf{Col}$. В $\mathbf{Col}$ выделим некоторый подкласс $M \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathbf{Col}$. При помощи различных условий на класс M можно определять конструкции, необходимые в каждом конкретном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Именованным (по классу M) (N_M-множеством) множеством называется тройка $X = (X, \alpha, I)$, где $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Ens}$; $I \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$, $\alpha: X \to I$ $(\alpha \subseteq X \times I)$ и $\alpha \in M$.

Множество X называется носителем и обозначается $S(X)$; множество I называется множеством имен и обозначается $N(X)$; множество $N_f(X) = \{a \in I \mid \exists x \in S(X) \& ((x,a) \in \alpha)\}$ называется множеством непустых (фактических) имен; отображение (отношение) α называется отображением (отношением) именования и обозначается $n(X)$; элемент $\alpha(x) \in I$ (для однозначного отображения α) и множество $\alpha(x) = \{a \in I \mid (x,a) \in \alpha\}$ (для отношения $\alpha \subseteq X \times I$) называется полным именем элемента $x \in X$ в N-множестве X . Элемент $a \in \alpha(x)$ называется частным именем x в X . Если полное имя элемента x состоит только из одного элемента, то этот элемент называется именем x в X .

Примерами этой конструкции может служить совокупность всех N -множеств (классов) в аксиоматике Цермело-Френкеля (Бернай -

са-Гёделя), где $\mathbf{M} = \mathbf{Mor\ Col}$ состоит из всех отображений множеств (классов).

Еще один пример [4] класса именованных множеств дают нумерации, т.е. отображения некоторого подмножества натурального ряда $\mathbf{N}$ на исследуемый класс конструктивных объектов (формул, слов, матриц и т.п.). В этом случае $\mathbf{Ens}$ состоит из $\mathbf{N}$ и всех его подмножеств в качестве объектов, а также всех отображений между этими объектами; $\mathbf{Set}$ состоит из произвольных классов конструктивных объектов; $\mathbf{M}$ содержит все частичные функции со значениями в классах конструктивных объектов и определенных на натуральных числах. Получающаяся категория $\mathbf{N}$-множеств в точности совпадает с изучавшейся в [4] категорией нумерованных множеств $\mathfrak{N}$, если морфизмами в категории $\mathbf{Ens}$ будут все общерекурсивные функции. Важную подкатегорию при этом образуют вычислимые нумерации [4]. В них $\mathbf{M}$ состоит только из вычислимых частичных функций на $\mathbf{N}$, а объектами в $\mathbf{Ens}$ являются только перечислимые множества.

Понятие именованного множества при своей дальнейшей спецификации охватывает известные нестандартные понятия множеств. Так, мультимножество является математическим объектом, вполне аналогичным множеству, но отличающимся от него тем, что содержит повторяющиеся элементы, кратность вхождения которых в мультимножество оказывается существенной [8, с.498]. Мультимножества в смысле этого неформального определения получаются, если к определению $\mathbf{N}$-множества добавить аксиому, требующую, чтобы элементы носителя $\mathbf{X}$ были различимы тогда и только тогда, когда их образы в множестве имен $\mathbf{I}$ при отображении именования α различны. При этом во всех трех семействах $\mathbf{Ens}, \mathbf{Set}$ и $\mathbf{Col}$ морфизмами будут только отображения. Согласно [1] мультимножество на множестве $\mathbf{S}$ - это множество $\mathbf{S}$ вместе с функцией $\mathbf{r}: \mathbf{S} \to \mathbf{N}_0$, задающей кратность элементов $\mathbf{S}$, где $\mathbf{N}_0 = 0, 1, 2, \ldots$ Мультимножества в этом смысле получаются, когда в качестве объектов семейства $\mathbf{Ens}$ берутся произвольные множества, а семейство $\mathbf{Set}$ содержит только один объект - множество $\mathbf{N}_0$ всех целых неотрицательных чисел. Мультимножества в смысле [15] получаются, если в качестве объектов семейства $\mathbf{Ens}$ берутся произвольные множества, а семейство $\mathbf{Set}$ содержит в качестве объектов произвольные множества кардинальных чисел. Морфизмами в $\mathbf{Ens}$ будут произвольные отображения, а в $\mathbf{Set}$ - произвольные отношения.

Согласно [18] нечеткое подмножество универсального множества U является парой $[A, \mu_A]$, где $\mu_A: U \to [0,1]$ - функция принадлежности. Нечеткое подмножество A может быть представлено в виде множества пар $\{(u, \mu_A(u)) \mid u \in U\}$. Нечеткие множества в этом смысле получаются, если семейство $\mathbf{Ens}$ состоит из произвольных множеств и их отображений, а семейство $\mathbf{Set}$ - из одного объекта (отрезка $[0,1]$) и произвольных бинарных отношений на этом отрезке в качестве морфизмов. Если в определении нечеткого множества вместо отрезка $[0,1]$ взять произвольную решетку, то получим $\mathbf{L}$-нечеткое подмножество множества U. Если U не фиксировано, а произвольно, то получаем нечеткие или $\mathbf{L}$-нечеткие множества [11, 14]. Последние получаются как частный случай $\mathbf{N}$-множеств, если семейство $\mathbf{Ens}$ состоит из произвольных множеств и их отображений, семейство $\mathbf{Set}$ - из одного объекта (решетки $\mathbf{L}$) и произвольных бинарных отношений на $\mathbf{L}$ в качестве морфизмов. В примерах, связанных с нестандартными понятиями множеств, класс $\mathbf{M}$ состоит из всех отображений объектов семейства $\mathbf{Ens}$ в объекты семейства $\mathbf{Set}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $\mathbf{N}$-множество X называется: а) нормализованным, если выполняется равенство $N(X) = N_I(X)$, т.е. если отношение именования $n(X)$ отображает все X на все I; б) однозначно именованным, если отношение именования $n(X)$ является отображением; в) одноименованным, если для любых двух элементов x и $y \in S(X)$ выполняется равенство $\alpha(x)=\alpha(y)$ и $\alpha = n(X)$ является отображением; г) индивидуализированным, если разные элементы из $S(X)$ имеют разные полные имена в X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. N-множество $Y = (y, \beta, \mathcal{J})$ называется именованным подмножеством (слабым именованным подмножеством) N-множества $X = (X, \alpha, I)$, если $y \subseteq X$, $\mathcal{J} \subseteq I$ и $\beta = \alpha|_{(y, \mathcal{J})}$ - ограничение отношения α на y и $\mathcal{J}$ (и $\beta \subseteq \alpha \cap \cap (y \times \mathcal{J})$). Такое отношение между N-множествами X и Y называется включением (слабым включением) и обозначается $Y \subseteq X$ ($Y \subseteq^W X$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Морфизмом N-множества $X = (X, \alpha, I)$ в N-множество $Y = (y, \beta, \mathcal{J})$ называется пара $\Phi = (f, g)$, где f - морфизм в $\mathbf{Ens}$ из X в y, g - морфизм в $\mathbf{Set}$ из I в $\mathcal{J}$ и в $\mathbf{Col}$ выполняется равенство $\alpha g = f \beta$, т.е. коммутативна диаграмма (1)

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "g"] & \mathcal{J} \\ X \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f"] & y \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Если $\Phi = (f, g): X \to Y$ и $F = (h, l): Y \to Z$ являются морфизмами N-множеств, то их произведение определяется естественным образом: $\Phi F = (fh, gl): X \to Z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\beta : I \to \mathcal{J}$, $\gamma: Z \to X$ - некоторые морфизмы (сюръекции). Тогда левым (консервативным) γ-расширением N-множества $X = (X, \alpha, I)$ называется N-множество $Z = (Z, \gamma\alpha, I)$, а правым (консервативным) β-расширением - N-множество $Y = (X, \alpha\beta, \mathcal{J})$.

Пусть X - произвольное именованное множество.

ЛЕММА. а) Каждому подмножеству $y \subseteq S(X)$ однозначно соответствует нормализованное N-множество $Y \subseteq X$, для которого $S(Y) = y$; б) каждому подмножеству $\mathfrak{J} \subseteq N(X)$ однозначно соответствует нормализованное N-множество $Y \subseteq X$, для которого $N(Y) = \mathfrak{J}$; в) если при этом N-множество X является функциональным (одноименованным, индивидуализированным), то этим же свойством обладает и Y.

С помощью этой леммы устанавливается следующая

ТЕОРЕМА 1. а) Если X^{σ} (X_{τ}) - правое (левое) расширение и $Y \subseteq X$, то существует единственное минимальное правое (левое) расширение Y^{λ} (Y_{ε}) N-множества Y, для которого выполняется включение $Y^{\lambda} \subseteq X^{\sigma}$ $(Y_{\varepsilon} \subseteq X_{\tau})$; б) если X^{σ} (X_{τ}) - консервативное расширение, то и Y^{λ} (Y_{ε}) является консервативным расширением.

Отметим, что консервативность правого расширения неформально означает, что при расширении не появляется новых пустых имен. Консервативность левого расширения неформально означает, что при расширении не появляется новых элементов в носителе, не имеющих имени.

Для доказательства первой части теоремы в качестве λ берем ограничение морфизма σ на множества $\mathfrak{J}$ и L (которое является полным образом $\mathfrak{J}_{\beta} = \beta(Y)$ относительно σ, т.е. $L = \{k \in K \mid \exists j \in \mathfrak{J}_{\beta} = \beta(Y)\ (j \sigma k)\}$), а в качестве δ - вложение L в K. В случае левого расширения X_{τ} в качестве ε берем ограничение морфизма τ на множества $\mathcal{Y}$ и V (которое является полным прообразом $\mathcal{Y}_{\beta}$ относительно τ, т.е. $V = \{z \in Z \mid \exists y \in Y_{\beta} = \beta^{-1}(\mathfrak{J})\ (z \tau y)\}$). Минимальность расширений Y^{λ} и Y_{ε} относительно включения N-множеств и второе утверждение теоремы устанавливаются непосредственной проверкой (см. диаграмму (2))

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[dd, bend right, dashed, "\rho"'] & & & W \arrow[dll, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[dd, bend left, dashed] \\
L \arrow[u, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & \mathcal{J} \arrow[ul, dashed, "\gamma"'] \arrow[l, dashed, "\lambda"'] \arrow[d, "\mu"] & Y \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "\nu"] & V \arrow[l, dashed] \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed, "\zeta"] \\
K & I \arrow[l, "\sigma"] & X \arrow[l, "\alpha"] & Z \arrow[l, "\tau"]
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

Действительно, пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{Y}, \beta\gamma, H)$ - правое расширение N-множества Y, для которого выполняется включение $\mathcal{H} \subseteq X^{\sigma}$. Это означает существование морфизма $\rho: H \to K$, для которого $\beta\gamma\rho = \nu\alpha\sigma$ и который является вложением, т.е. H является подмножеством K. Покажем, что любой элемент $l \in L$ принадлежит H. По построению L для l существует элемент $j \in \mathcal{J}_{\beta}$, для которого имеет место $j(\mu\sigma)l$. Значит, существует $y \in Y$, для которого справедливо $y\beta j$ и тем самым $y(\beta\mu\sigma)l$. Тогда из определения N-подмножества $\beta\mu = \nu\alpha$, из чего имеем $y(\nu\alpha\sigma)l$. Но по предположению $\nu\alpha\sigma = \beta\gamma\rho$, т.е. получаем $y(\beta\gamma\rho)l$. Так как ρ - вложение, то любой элемент из K, находящийся в отношении $(\beta\gamma\rho)$ с некоторым элементом из $\mathcal{Y}$, принадлежит H.

В силу произвольности выбора элемента l получаем, что $L \subseteq H$, т.е. существует вложение $\pi: L \to H$, для которого $\delta = \pi\rho$. Так как δ - мономорфизм, т.е. на него можно сокращать справа, то получаем и равенство $\gamma = \lambda\pi$. Тем самым доказана коммутативность верхней части диаграммы (2).

Консервативность расширения Y^{λ} следует из того, что в L по построению вообще нет пустых имен.

Рассмотрение нижней части диаграммы (2) проводится аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве неявно использовались предположения, что все морфизмы множеств в рассматриваемых категориях определяются своими графиками, категории $\mathbf{Ens}$ и $\mathbf{Set}$ замкнуты относительно подобъектов, а класс $\mathbf{M}$ - относительно произведений и ограничений.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в диаграмме (2) σ - отображение (инъекция), то и λ - отображение (инъекция).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X^{σ} (X_{τ}) - однозначное (индивидуализированное) $\mathbf{N}$-множество, то таким же будет и Y^{λ} (Y_{ε}) .

Возможности для продолжения расширения $\mathbf{N}$-подмножества до расширения всего именованного множества дает следующая

ТЕОРЕМА 2. а) Правому расширению Y^{λ} $\mathbf{N}$-множества $Y \subseteq X$ соответствует правое (консервативное) расширение X^{σ} $\mathbf{N}$-множества X, содержащее Y^{λ} тогда и только тогда, когда диаграмма (3) в категории $\mathbf{Set}$ вкладывается в коммутативную диаграмму (4), где δ - инъекция (и δ - проекция)

$$\begin{tikzcd} L \\ \mathfrak{J} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\mu"'] & I \end{tikzcd}, \quad (3) \qquad\qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\delta"] & K \\ \mathfrak{J} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\mu"'] & I \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}. \quad (4)$$

Расширение X^{σ} минимально, если (4) - универсальный квадрат [12];

б) левому расширению Y_{ε} именованного множества $Y \subseteq X$ соответствует левое (консервативное) расширение X_τ $\mathbf{N}$-множества X, содержащее Y_ε тогда и только тогда, когда диаграмма (5) в категории **Set** вкладывается в коммутативную диаграмму (6), где ζ-инъекция (и τ-проекция)

$$
\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "\nu"'] \\
 & V \arrow[u, "\varepsilon"']
\end{tikzcd}
\quad , \quad (5)
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "\nu"'] \\
Z \arrow[u, "\tau"] & V \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[l, "\zeta"]
\end{tikzcd}
\quad . \quad (6)
$$

Расширение X_τ минимально, если квадрат (6) универсален снизу, т.е. для любого коммутативного квадрата $\varepsilon\nu = \psi\pi$ существует морфизм φ, для которого $\varphi\pi = \tau$ и $\zeta\varphi = \psi$ (см.диаграмму (7))

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, dash dot] & & & & & H \\
 & Z \arrow[ul, dashed] \arrow[r, dashed, "\tau"'] & X \arrow[r, "\alpha"'] & I \arrow[urr, dash dot] & K \arrow[l, dashed, "\sigma"'] \arrow[ur, dashed] & \\
 & V \arrow[uul, dash dot] \arrow[u, "\zeta"'] \arrow[r, "\varepsilon"'] & Y \arrow[u, "\nu"'] \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{Y} \arrow[u, "\mu"'] \arrow[r, "\lambda"'] & L \arrow[u, "\delta"] \arrow[uur, dash dot] &
\end{tikzcd}
\qquad (7)
$$

Между свойствами $\mathbf{N}$-множеств и их расширений существуют определенные связи, часть из которых приводится ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если левое консервативное расширение X_γ $\mathbf{N}$-множества X

является индивидуализированным (одноименованным, нормализованным), то тем же свойством обладает и само X .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если X -индивидуализированное (одноименованное, нормализованное) N-множество, то тем же свойством обладает любое его консервативное расширение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Без требования консервативности эти результаты уже могут быть неверны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие второй части теоремы 2 выполняется,если категория $\mathbf{Ens}$ замкнута относительно разности и объединения множеств.В этом случае можно в качестве носителя Z взять множество $(X\setminus Y)\cup V$ и положить $\tau|_V=\varepsilon$ и $\tau|_{X\setminus Y} = I_X$.

2. Некоторые закономерности развития арифметики

Взяв в качестве научной теории арифметику, применим рассмотренные конструкции и результаты к анализу ряда исторических ситуаций ее развития. Осознаваемое в плане противопоставления "истории развития" и "логики развития" точное и строгое описание этих ситуаций фактически означает вскрытие ряда сторон и закономерностей того, что можно назвать действительной логикой развития арифметики как части математики. Другими словами, уже сама возможность и тем более реализация такого описания делает несостоятельными выводы о "нелогичности" развития математики [7].

Прежде всего отметим, что,начиная с Евклида, любое математическое понятие фактически выступает (как правило, неявным образом) в виде именованного множества. Действительно, математическому понятию дается некоторое имя, а затем его содержание раскрывается в определении, которое является ничем иным, как описанием множества элементов,образующих носитель соответствующего $\mathbf{N}$-множества. Это хорошо видно из данного Евклидом определения понятия целого числа: "Единица есть (то), через что каждое из существующих считается единым; число же - множество, составленное из единиц" [10]. Иначе говоря, число представляется в виде некоторой совокупности единиц, которая имеет определенное обозначение (имя) из выделенного класса слов - так называемых "числительных" (например, "два", "три" и т.д.).

Совокупность всех чисел, каждому из которых отвечает свое именованное множество, также предстает в виде $\mathbf{N}$-множества. Его носителем являются совокупности единиц, а элементами множества имен - названия (имена) чисел. В свою очередь, и это $\mathbf{N}$-множество имеет свое имя - "натуральный ряд". Следует отметить, что в данном случае, как это реально и происходит на практике, название числа с помощью числительных (например, "три") выступает одновременно и как имя совокупности единиц и как имя $\mathbf{N}$-множества, соответствующего данному числу.

Современное представление натуральных чисел в теоретико-множественной математике также имеет структуру $\mathbf{N}$-множества. Только при этом имя числа может быть задано как на естественном языке ("числительное"), так и на математическом языке (в некоторой системе счисления). Носителем при таком представлении понятия числа является класс эквивалентных друг другу конечных множеств. Как и раньше,названия чисел выступают одновременно как имена классов эквивалентных множеств и как имена тех $\mathbf{N}$-множеств, которые соответствуют этим числам. При этом у каждого числа имеется много имен на разных языках, в качестве которых, кроме естественных языков, выступают различные системы счисления.

Перевод чисел из одной в другую систему счисления является морфизмом $\mathbf{N}$-множеств. Примером служит диаграмма (8), в которой слева стоит $\mathbf{N}$-множество, соответствующее десятичному представлению числа "3", а справа - его двоичному представлению

$$
\begin{tikzcd}
\{3\} \arrow[rr] & & \{11\} \\
\{\{a,a,a\},\{в,в,в\},\{а,в,в\},\ldots\} \arrow[u] \arrow[rr] & & \{\{a,a,a\},\{в,в,в\},\{а,в,в\},\ldots\} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad (8)
$$

Этот же переход можно рассматривать как расширение **N**-множества, представляющего данное число в исходной системе счисления.

Как известно, определение числа, данное Евклидом, полностью удовлетворяло математиков до тех пор, пока они не столкнулись с проблемой, оказавшейся непреодолимой для античной науки. Было обнаружено, что вполне естественные отношения между геометрическими объектами (например, между длинами гипотенузы и катета равнобедренного прямоугольного треугольника) непредставимы в виде отношений между целыми числами. Между тем в силу того, что в первый период развития античной математики понятие числа отождествлялось с понятием величины, то предполагалось, что любая величина может быть представлена либо некоторым числом, либо отношением чисел. Когда же оказалось, что между геометрическими объектами (отрезками прямой и т.д.) существуют отношения, которые хотя естественно и включаются в понятие величины, но при этом непредставимы отношениями между числами, то возник определенный кризис. По сути его разрешение потребовало перехода от численных представлений величин к их геометрическим представлениям. Закономерность этого перехода выражается с помощью диаграммы (9):

$$
\begin{tikzcd}
 & \{\text{величины}\}_1 \arrow[rr] & & \{\text{величины}\}_2 \\
\{\text{числа}\} \arrow[r] & \{\text{числа и пропорции}\} \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[rr, dashed] & & \{\text{геометрические объекты}\} \arrow[u, dashed] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[u] \arrow[rr, dashed] & & Z \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad (9)
$$

Действительно, в начале рассматриваемого периода имелось множество названий, которые трактовались как величины и образовывали множество $\{величины\}_1$, т.е. множество имен соответствующего именованного множества. Это множество с помощью биекции ε отождествлялось с множеством $\{числа и пропорции\}$, состоявшим из названий чисел и названий отношений между числами. Затем оказалось, что множество $\{величины\}_1$ включено в большее множество $\{величины\}_2$ и при этом в большем множестве существуют пустые имена, т.е. названия таких величин, которым ничего не соответствует в носителе $\mathfrak{Y}$ $\mathbf{N}$-множества величин, понимаемых как числа и пропорции. Примерами пустых имен являлись "число, квадрат которого равен 2" или "длина окружности с радиусом 2". Таким образом, если раньше $\mathbf{N}$-множество ($\mathfrak{Y}, \sigma$, $\{величины\}_1$) было нормализованным, то теперь условие нормализованности оказалось нарушенным. Именно это и вызвало определенный кризис, преодоление которого было получено на пути замены носителя $\mathfrak{Y}$ в $\mathbf{N}$-множестве величин. Носитель $\mathfrak{Y}$, состоящий из чисел и отношений между ними, был заменен на носитель $\mathfrak{Z}$, состоящий из геометрических объектов (отрезков, треугольников, окружностей и т.п.). В результате $\mathbf{N}$-множество ($\mathfrak{Z}, \tau$, $\{величины\}_2$) снова стало нормализованным и кризис в какой-то степени удалось преодолеть.

По другому пути пошли индийские и вслед за ними арабские математики. Они для нормализации именованного множества величин не стали строить носитель из объектов, достаточно близко примыкающих к миру чувственного восприятия, а ограничились построением носителя из абстрактных выражений. Эти математики "использовали целые числа и дроби, но они, не колеблясь, оперировали и иррациональными числами. Именно они ввели новые, верные правила сложения, вычитания, умножения и деления иррациональных чисел. Как же индийцам и арабам удалось придумать правила, лишенные логического обоснования и тем не менее оказавшиеся верными? Загадка решается довольно просто: индийцы и арабы рассуждали по аналогии. Так, правило $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ они считали верным для любых чисел a и b, поскольку оно выполнялось, например, в случае $\sqrt{36} = \sqrt{4}\sqrt{9}$" [7, с. 130].

Тем не менее и за использованием индийскими и арабскими математиками иррациональностей простейшего вида также скрывается определенная закономерность, которую можно представить следующей схемой. В течение длительного времени существовала и была общепризнанной операция умножения рациональных чисел (при этом вряд ли можно говорить о ее логическом обосновании в античной математике, как это предполагает М.Клайн). Этой операции можно поставить в соответствие $\mathbf{N}$-множество $X = (Q^2, \cdot, Q)$. С появлением простейших иррациональностей, имевших вид корня из натурального числа, для них также потребовалось определить операцию умножения. Если множество таких иррациональных и всех рациональных чисел обозначить через R_1 и учесть, что оно содержится в множестве всех действительных чисел R, то задача заключалась в построении $\mathbf{N}$-множества $X_1 = (R_1^2, \cdot_1, R_1)$, аналогичного $\mathbf{N}$-множеству X и содержащего его в качестве $\mathbf{N}$-подмножества. Его наличие означало, что, например, произведение $\sqrt{36}\cdot\sqrt{4}$ должно было равняться $\sqrt{36\cdot 4}$. С другой стороны, так как $\sqrt{36} = 6$ и $\sqrt{4} = 2$, то это произведение в силу включения $X \subseteq X_1$ должно быть равным $6\cdot 2$. Таким образом, определение по аналогии оказывалось верным, т.е, имело место включение $\mathbf{N}$-множеств, что и давало возможность распространения этой операции и на другие иррациональные числа из R_1.

Строгая реконструкция этих и других ситуаций показывает, что любой этап развития арифметики как научной теории реализовался, как правило, через взаимосвязанные изменения во всех ее подсистемах. В логико-лингвистической подсистеме это выражалось, по крайней мере, во введении новых понятий и языков, в модельно-репрезентативной подсистеме - в появлении новых моделей понятия числа, в прагматико-процедурной подсистеме - в разработке новых операций и расширении действия старых операций на новые объекты, в проблемно-эвристической подсистеме - в постановке и решении новых задач и т.д. Структурно-номинативное описание таких изменений позволяет в каждом конкретном случае выявить и строго проанализировать соответствующие им закономерности.

Покажем еще на одном содержательном примере, как изменения в подсистеме влияют на изменения в объемлющей системе, в качестве которой возьмем всю математику на определенном этапе ее развития. Представим ее именованным множеством вида (X_t, α_t, I_t), где X_t - множество математических объектов, I_t - множество наименований этих объектов, α_t - отношение именования на некотором историческом этапе развития математики. В этом $\mathbf{N}$-множестве с помощью леммы естественным образом выделяется $\mathbf{N}$-подмножество, соответствующее арифметике и имеющее вид $(Y_t, \beta_t, \mathfrak{Z}_t)$, где Y_t - множество всех чисел, используемых в математике на этапе t, $\mathfrak{Z}_t$ - множество именований этих чисел, β_t является ограничением α_t.

Как свидетельствует история математики, расширения понятия числа вначале происходили только на уровне имен, т.е. множество $\mathfrak{Z}_t$ вкладывалось в более широкое множество H. Примерами для $\mathfrak{Z}$ могут служить названия натуральных чисел, а для H - названия целых чисел. Расширение множества именований чисел приводило к расширению совокупности наименований математических объектов. Однако использование нового математического понятия на уровне только имен соответствующего этому понятию $\mathbf{N}$-множества признавалось неудовлетворительным, что ставило задачу построения отвечающих новым именам математических объектов. Иначе говоря, необходимо было построение всего $\mathbf{N}$-множества для данного математического понятия. Таким образом, если вернуться к рассматриваемому примеру с числами, $\mathbf{N}$-множество чисел $\mathbf{Y}$ вкладывалось в большее $\mathbf{N}$-множество $(\mathbf{W}, \gamma, \mathbf{H})$. Это оказывало влияние на всю математику в целом и имело результатом расширение $\mathbf{N}$-множества $\mathbf{X}$ до большего $\mathbf{N}$-множества $(\mathbf{V}, \delta, \mathbf{K})$, $\mathbf{N}$-подмножеством которого является $\mathbf{N}$-множество $(\mathbf{W}, \gamma, \mathbf{Z})$. Эти процессы изображаются диаграммой (10), в которой сплошные стрелки описывают связи, существующие на этапе t, а прерывистые - отражают процессы развития

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{Z}=\mathbf{H} \arrow[rr, dashed] & & \mathbf{K} \\
\mathbf{N}=\gamma \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{I} \arrow[ur, dashed] & \\
& \mathbf{W} \arrow[uu] \arrow[rr, dashed] & & \mathbf{V} \arrow[uu, dashed] \\
\mathbf{Y} \arrow[uu] \arrow[ur, dashed] \arrow[rr] & & \mathbf{X} \arrow[uu] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}
\tag{10}
$$

Отметим, что верхняя грань естественно ассоциируется с процессами, происходившими в логико-лингвистической подсистеме. Нижняя грань отражает тот же аспект для модельно-репрезентативной подсистемы. Боковые ребра устанавливают взаимосвязи между этими подсистемами и тем самым входят в систему связей. С другой стороны, эти ребра представляют отношения, полученные с помощью операций, входящих в прагматико-процедурную подсистему. Место и роль проблемно-эвристической подсистемы заключается в том, что, прежде чем получить окончательный на данном этапе вариант математических понятий, создавался и испытывался целый ряд предварительных вариантов. Каждому из таких вариантов соответствует своя диаграмма вида (10), отдельные компоненты которой носили гипотетический характер. Примерами могут служить различные гипотезы об интерпретации отрицательных чисел.

В заключение покажем на конкретной математической конструкции, как из свойств расширений можно получать свойства исходных $\mathbf{N}$-множеств. Общее рассмотрение этой ситуации дают приведенные выше результаты теории именованных множеств. Возьмем

$\mathbf{N}$-множество, представляющее натуральный ряд $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \delta, D)$, где $\mathbb{N}$ - это само множество натуральных чисел (его можно понимать в соответствии с рассматриваемым периодом развития математики либо как совокупности единиц, либо как классы эквивалентных друг другу конечных множеств); D - представление натуральных чисел в десятичной системе, т.е. наборы десятичных цифр; δ - отображение, которое каждому числу ставит в соответствие его имя - его десятичную запись. Естественным условием здесь является однозначность отображения δ, т.е. индивидуализированность $\mathbf{N}$-множества $\mathbf{N}$. Для доказательства этого используется правое расширение $\mathbf{N}_+ = (\mathbb{N}, \gamma, B)$ $\mathbf{N}$-множества $\mathbf{N}$. В $\mathbf{N}_+$ имеем $B = \{ \sum_{k=1}^{p} 10^k \cdot n_k ; n_k$ - десятичные цифры, $p \in \mathbb{N}\}$; $\gamma = \delta\sigma$, $\sigma: D \to B$, для $n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0$, где n_k - десятичные цифры $0, \ldots, 9$; $\sigma(n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0) = \sum_{k=0}^{p} 10^k \cdot n_k$:

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, dashed, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \sum\limits_{k=0}^{p} 10^k \cdot n_k \\
& n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0 \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Доказательство индивидуализированности $\mathbf{N}_+$ проводится обычными методами формальной или неформальной арифметики. После этого на основании предложения приходим к выводу, что $\mathbf{N}$ также является индивидуализированным $\mathbf{N}$-множеством. Иначе говоря, любое натуральное число, как известно, представляется в десятичной системе счисления, и это представление единственно.

Заключение

Структурно-номинативная модель научной теории позволяет выделить и строго описать закономерности развития в таких ситуациях, которые обычно считаются алогичными и случайно возникшими в ходе исторического процесса зарождения и эволюции научных теорий. Создавая многогранный образ теории, эта модель предоставляет более широкие возможности для всестороннего анализа строения и динамики научных теорий, а также позволяет объединить в единое целое различные направления точной реконструкции науки.

Литература

1. АЙГНЕР М. Комбинаторная теория. - М.: Мир, 1982.-558 с.

2. БУРГИН М.С. Именованные множества и представление информации //УП Всесоюзная конференция по математической логике. - Новосибирск, 1984. - С. 25.

3. БУРГИН М.С., КУЗНЕЦОВ В.И. Системный анализ научной теории на основе концепции именованных множеств //Системные исследования. Ежегодник, 1985. -М., 1986. - С. 136-160.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. -М.: Наука,1977. - 416 с.

5. ЕРШОВ Ю.Л., САМОХВАЛОВ К.Ф. О новом подходе к философии математики //Структурный анализ символьных последовательностей. - Новосибирск, 1984. - Вып. 101: Вычислительные системы. - С. 141-148.

6. ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф., СВИРИДЕНКО Д.И. Логика эмпирических исследований. -Новосибирск, 1978. - 66 с.

7. КЛАЙН М. Математика. Утрата определенности.-М.: Мир, 1984. - 434 с.

8. КНУТ Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.2. Получисленные алгоритмы. - М.: Мир, 1977. - 724 с.

9. МАНИН Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. -М.: Сов.радио, 1979. - 168 с.

10. Начала Евклида (Книги УП-Х). - М.-Л.: Гостехиздат,1948. - 511 с.

11. САЛИЙ В.Н. Бинарные L -отношения //Изв. вузов. Математика. - 1965. -№1. - С. 133-145.

12. ЦАЛЕНКО М.С., ШУЛЬГЕЙФЕР Е.Г. Основания теории категорий. - М.: Наука, 1974. - 226 с.

13. BALZER W. Empirische Theorien: Modelle, Strukturen,Beispille. -Braunsweig: Vieweg, 1982. - 326 S.

14. GOGUEN J.A. L-fuzzy sets //J.math, anal. and appl. - 1967. - Vol. 18. - P. 145-174.

15. HICKMAN J.L. A note of the concept of multiset //Bull. Austral. Math. Soc. - 1980. -Vol. 22. - P. 211-217.

16. SNEED J.D. The logical structure of mathematical physics. -Dordrecht: Reidel, 1979. - 311 p. (2nd ed. rev.).

17. The structure of scientific theories. - Urbana: University of Illinois Press, 1974. - 682 p.

18. ZADEN L.A. Fuzzy sets //Inform. and control.- 1965.- Vol. 8. - P. 338-353.

Поступила в ред.-изд.отд.

30 марта 1988 года