МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 125
УДК 519

О ЛОГИКЕ МЕДИЦИНСКИХ ДИАГНОЗОВ

А.А. Дерибас

Нет нужды специально доказывать, что для врачебной практики было бы полезным исследовать вопрос: по каким правилам должны комбинироваться диагнозы, чтобы получаемые комбинации заведомо имели смысл, и как истинность или ложность одних диагнозов зависит от истинности или ложности других? Цель работы - дать вариант точной постановки этого вопроса и дать, хотя бы частично, точный ответ на него. Этим, собственно, и оправдывается название статьи.

1. Предварительные замечания. Чтобы был понятен медицинский смысл излагаемого ниже (начиная с раздела 2) математического аппарата, необходимо иметь в виду следующее.

а) Чем бы ни была врачебная практика, она во всяком случае состоит из медицинских процедур (понимаемых, если надо, очень широко) и ситуаций, в которых эти процедуры применяются с положительным или отрицательным эффектом. При этом не исключено, что некоторые процедуры могут быть взаимозаменяемы (равноэффективны) хотя бы в одной ситуации, а некоторые - ни в одной. Взаимозаменяемость в конкретной ситуации - отношение эквивалентности на множестве S подразумеваемых процедур. Пусть $\alpha \in [0,1]$. Мы говорим, что p-функция на процедурах a и b из S равна α (сокращенно $p(a,b) = \alpha$), если и только если ситуации, в которых процедуры a и b взаимозаменяемы, составляют 100α процентов от всех возможных в подразумеваемом варианте врачебной практики. Без ограничения общности мы можем полагать, что число всех мыслимых ситуаций в любом варианте врачебной практики необозримо велико, но конечно. Поэтому $p(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда процедура a не взаимозаменяема с процедурой b ни в одной из рассматриваемых ситуаций. А поскольку нет нужды различать между собою процедуры, взаимозаменяемые в каждой ситуации из числа подразумеваемых, то мы считаем, что $p(a,b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a = b$. Так как отношение взаимозаменяемости процедур в конкретной ситуации есть эквивалентность (своя для каждой ситуации), то выполняются условия:

1) для любых двух процедур $a, b \in S$, $p(a,b) = p(b,a)$;

2) для любых трех процедур $a, b, c \in S$, если $p(a,b) = 0$, то $p(c,a) + p(c,b) \leq 1$.

Справедливость первого условия очевидна. Следовательно,

$$p(c,a) + p(c,b) = p(a,c) + p(c,b).$$

Если бы сумма $p(c,a) + p(c,b)$ была больше единицы, то это означало бы, что есть по меньшей мере одна ситуация, в которой одновременно a взаимозаменяема с c, c взаимозаменяема с b, и, следовательно (по транзитивности эквивалентности), a взаимозаменяема с b. Но последнее невозможно, если $p(a,b) = 0$. Таким образом, справедливость условия 2) установлена. Легко также понять, что если $p(c,a) + p(c,b) = 1$ и $p(a,b) = 0$, то процедура c на части ситуаций взаимозаменяема с процедурой a, а на оставшейся части ситуаций - с процедурой b. В этом смысле процедура c "составлена из" процедур a и b, или "есть смесь" процедур a и b. В самом общем случае говорят, что процедура c составлена из (есть смесь) R-процедур, если и только если:

(i) R есть множество (конечное или бесконечное) процедур;

(ii) для любых различных r_i, r_j из R имеет место $p(r_i, r_j) = 0$;

(iii) $\sum_{r\in R} p(c,r) = 1$, где $\sum_{r\in R} p(c,r)$ обозначает точную верхнюю грань для всех конечных сумм вида $\sum_{i=1}^{n} p(c,r_i)$, $r_i \in R$, $r_j \neq r_i$ при $i \neq j$.

б) Обычно под диагнозом понимают указание состояния,в котором предположительно,находится пациент. В определенных отношениях это правильное понимание.Однако следует все-таки подчеркнуть, что практически интересны только процедурно значимые смыслы диагнозов, ибо если смысл диагноза никак не связан с установлением подходящих для лечения диагностируемой болезни медицинских процедур, то, спрашивается,зачем такой диагноз вообще нужен врачу. С практической точки зрения мы ничего не теряем, если ограничиваем диагнозы заявлениями только следующего вида: пациент болен такой болезнью, что для ее лечения рекомендуются процедуры из такого-то и такого-то подмножества множества S. Иными словами,мы склонны просто отождествлять диагнозы с некоторыми подмножествами множества S всех известных на момент диагноза медицинских процедур.Точную формулировку нашего понятия диагноза мы даем в разделе 3.

в) В дополнение к тому, что сказано о диагнозах выше,можно заметить, что имеется аналогия между измерениями в квантовой физике и установлением диагнозов в медицине: в обоих случаях объекты исследования подвергаются неустранимому воздействию со стороны исследователя в самом акте "информационного соприкосновения" с ними. Возникает догадка, что связи между различными диагнозами должны иметь нечто общее со связями между различными высказываниями об измерениях в квантовой механике. Эта догадка мотивирует поиски подходящего для описания структуры медицинских диагнозов математического аппарата среди работ по квантовой физике. Читатель может убедиться, что в этом отношении удобна работа [1],из которой мы заимствуем часть излагаемых ниже математических фактов.

2. Пространство процедур *). Приступаем к систематическому изложению нашего подхода к изучению логики медицинских диагнозов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Предпространство - это пара (S,p), где S - непустое множество; p - отображение из $S \times S$ в отрезок $[0,1]$ такое, что для любых $a,b \in S$ $p(a,b) = p(b,a)$ и $p(a,b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Согласно этому определению, множество S медицинских процедур и p-функция, как они описаны в замечании "а" раздела 1, образуют предпространство, которое мы будем в этом случае называть предпространством (медицинских) процедур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элементы $a,b \in S$ ортогональны (в предпространстве (S,p)), если $p(a,b) = 0$.

Из этого определения следует, что процедуры, не взаимозаменяемые ни в одной ситуации, как об этом говорилось в разделе 1, п."а", ортогональны в предпространстве медицинских процедур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если (S,p) - предпространство, то подмножество R множества S называется ортогональной системой (в (S,p)), если любые два различных элемента R ортогональны (в (S,p)). Далее, R называется максимальной ортогональной системой (в (S,p)), или базисом (в (S,p)), если R - ортогональная система и она не содержится ни в какой более широкой ортогональной системе $R' \subseteq S$.

Основываясь на лемме Цорна, можно доказать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для любого предпространства (S,p) существует хотя бы один базис в (S,p).*

Следовательно, всегда существует базис и для предпространства медицинских процедур.

---

*) Термин взят из [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Предпространство (S,p) называется пространством, если для каждого базиса R в (S,p) и каждого элемента $a \in S$ имеет место соотношение

$$\sum_{r \in R} p(a,r) = 1 \,. \qquad (1)$$

(Сумма в левой части (1) обозначает точную верхнюю грань для всех конечных сумм вида $\sum_{i=1}^{n} p(a,r_i)$, где $r_i \in R$, $i = 1,\ldots$ $\ldots, n$, и $r_i \neq r_j$, если $i \neq j$.)

Имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 2*). Пусть R_1 и R_2 - два базиса в пространстве (S, p). Тогда мощности множеств R_1 и R_2 равны: $\bar{\bar{R}}_1 = \bar{\bar{R}}_2$.

В силу этой теоремы мощность произвольного базиса в пространстве не зависит от базиса и поэтому характеризует само пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если R - базис в пространстве (S, p), то кардинальное число $\bar{\bar{R}}$ называется размерностью (пространства) (S, p).

Теперь мы в состоянии точно сформулировать, что же мы предполагаем относительно структуры врачебной деятельности, направлять которую призваны диагнозы.

ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Какова бы ни была рассматриваемая врачебная практика, соответствующее ей предпространство медицинских процедур является пространством конечной размерности.

Иными словами, мы предполагаем, что любая медицинская процедура - смесь (в смысле п."а" раздела 1) наперед заданных

*) См. [1, теорема 1].

"базисных" медицинских процедур. Такое предположение не выглядит слишком рискованным, так как трудно понять, как вообще может быть иначе? Как можно практически осуществить какую-либо медицинскую (или не медицинскую) процедуру, если она не состоит в применении процедур (в порядке, зависящем от ситуаций и не учитываемом в данном контексте) из конечного числа заранее указанных в качестве осуществимых? Ортогональностью базисных процедур гарантируется существенность каждой из них на фоне остальных и тем самым гарантируется минимальность их числа в наборе, достаточном для использования в любой подразумеваемой ситуации врачебной практики. Заметим при этом, что конечность базиса в пространстве процедур вовсе не означает конечность самого этого пространства.

Само собою разумеется, что врач по своему желанию может из всей мыслимой своей практики выделить те или иные относительно самостоятельные ее подразделы. В наших терминах этому соответствует возможность выделять в пространстве процедур различные его подпространства в согласии со следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть (S, p) - пространство, $S' \subseteq S$, p' - ограничение p на $S' \times S'$. Тогда (S', p') - подпространство (пространства (S, p)), если (S', p') - пространство.

Тривиальный пример подпространства - произвольная ортогональная система в (S, p). Очевидно также, что размерность любого подпространства не больше размерности всего пространства.

3. Диагнозы. Как уже сказано в разделе 1, п."б", мы склонны отождествлять диагнозы с некоторыми специальными подмножествами множества всех подразумеваемых в данной врачебной практике медицинских процедур. Если говорить точно, то мы принимаем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть (S,p) - пространство (медицинских процедур), $D \subseteq S$, p_D - ограничение p на $D \times D$. Тогда D - диагноз (в (S,p)), если предпространство (D,p_D) в точности содержит вместе с каждой ортогональной системой R в (D,p_D) всякую смесь R-процедур.

Из определений 6 и 7 немедленно вытекает, что если (S',p') - подпространство пространства (S,p), то S', вообще говоря, не является диагнозом в (S,p).

Обратное также справедливо: не для всякого диагноза D в (S,p) предпространство (D,p_D) является подпространством пространства (S,p). Чтобы диагнозы в (S,p) совпадали с подпространствами (S',p'), нужно наложить на пространство (S,p) специальные ограничения. Какого рода должны быть эти ограничения? - открытый вопрос, исследование которого выходит за пределы настоящей статьи. Но в любом случае (для любого пространства (S,p)) диагнозы существуют. Для произвольного пространства (S,p) диагнозом является, например, само множество S (наибольший в (S,p) диагноз) или любое его единичное подмножество (атомный в (S,p) диагноз).

Когда диагноз D как подмножество множества S в (S,p) сформулирован, его медицинский смысл задается соглашением: провозгласить D - значит принять предположение, что диагностируемую болезнь следует лечить применением какой-то (неизвестно, какой именно) процедуры из D. Диагноз истинен, если и только если эта рекомендация ведет к успешному лечению.

Удобно расширить понятие диагноза, введя в рассмотрение пустое подмножество множества всех подразумеваемых процедур: если $D = \emptyset$, то мы называем D наименьшим, или пустым диагнозом в (S,p). Впредь мы будем обозначать его через 0. Заметим, что провозглашение пустого диагноза означает принятие предположения, что пациент не поддается излечению в рамках рассматриваемой врачебной практики (к нему не следует применять никаких медицинских процедур из числа подразумеваемых). В этом смысле пустой диагноз максимально конкретен. Напротив, наибольший в (S,p) диагноз (впредь мы будем обозначать его через 1) соответствует самой бедной (неопределенной) информации о болезни: согласие с ним означает не более конкретное предположение, чем то, что пациент излечим средствами всей рассматриваемой врачебной практики. Все остальные диагнозы в (S,p) - конкретизации (сужения) диагноза 1.

4. Логика диагнозов. Итак, по каким правилам допустимо комбинировать диагнозы, чтобы получаемые комбинации заведомо имели смысл? Точнее говоря, применением каких операций над исходными диагнозами мы будем получать конструкции, заведомо являющиеся также диагнозами? Пусть $\Delta(S)$ - множество всех возможных диагнозов в (S, p), включая наименьший и наибольший. Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если $D_1 \in \Delta(S)$ и $D_2 \in \Delta(S)$, то $D_1 \cap D_2 \in \Delta(S)$.

В самом деле, пусть R - какая-то ортогональная система в $(D_1 \cap D_2, p_{D_1 \cap D_2})$ и пусть d - какая-то смесь R-процедур. Поскольку R ортогональна как в (D_1, p_{D_1}), так и в (D_2, p_{D_2}), то по определению 7 процедура d принадлежит как D_1, так и D_2. Следовательно, $d \in D_1 \cap D_2$. С другой стороны, пусть $d \in D_1 \cap D_2$. Подмножество $\{d\}$ - ортогональная система в $(D_1 \cap D_2, p_{D_1 \cap D_2})$, причем d есть смесь $\{d\}$-процедур. Следовательно, $D_1 \cap D_2$ не содержит никакой **процедуры**, которая не была бы смесью $\{d\}$-процедур для подходящей ортогональной системы $\{d\}$

в $(D_1 \cap D_2, p_{D_1 \cap D_2})$. Остается добавить, что если $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то утверждение 4 очевидно.

Так как множество $D_1 \cap D_2$ однозначно определено для данных D_1 и D_2, то из утверждения 4 вытекает существование двуместной тотальной операции $\wedge$ на $\Delta(S)$, удовлетворяющей условию: для любых $D_1, D_2 \in \Delta(S)$

$$D_1 \wedge D_2 = D_1 \cap D_2. \tag{2}$$

Пусть теперь $\rho(X)$ - совокупность всех ортогональных систем в (X, p_X). Для всякой ортогональной системы R из $\rho(X)$ обозначим через $S(R)$ подмножество всех тех процедур из S, которые суть смеси R-процедур. Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если $D_1 \in \Delta(S)$ и $D_2 \in \Delta(S)$, то

$$\bigcup_{R \in \rho(D_1 \cup D_2)} S(R) \in \Delta(S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения мы приводим с некоторыми легко восстановимыми пропусками. Сначала заметим, что так как (S, p) - пространство конечной размерности, то любая ортогональная система, целиком принадлежащая множеству $\bigcup_{R \in \rho(D_1 \cup D_2)} S(R)$, конечна. Пусть $\{r_1, \ldots, r_n\}$ - такая ортогональная система. Докажем, что любая процедура d, являющаяся смесью $\{r_1, \ldots, r_n\}$-процедур, принадлежит $\bigcup_{R \in \rho(D_1 \cup D_2)} S(R)$. Предположим противное. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} p(d, r_i) = 1 \tag{3}$$

и для всякой $R \in \rho(D_1 \cup D_2)$ выполняется неравенство

$$\sum_{r\in R} p(d,r) < 1 . \qquad (4)$$

Кроме того, для всякой процедуры r_i из $\{r_1,\ldots,r_n\}$ найдется такая система $R^{(i)}$ из $\rho(D_1 \cup D_2)$, что

$$\sum_{r\in R^{(i)}} p(r_i,r) = 1. \qquad (5)$$

Оставляем читателю убедиться, что условия (3)-(5) несовместны при нашем истолковании (раздел 1, п."а") функции p. Следовательно, множеству $\bigcup_{R\in\rho(D_1\cup D_2)} S(R)$ принадлежит вместе с каждой ортогональной системой $\{r_1,\ldots,r_n\}$ любая смесь $\{r_1,\ldots,r_n\}$ -процедур. Осталось показать, что если $d\in \bigcup_{R\in\rho(D_1\cup D_2)} S(R)$, то найдется такая ортогональная система R_0 из $\bigcup_{R\in\rho(D_1\cup D_2)} S(R)$, что d есть смесь R_0-процедур. Это делается точно так же, как и в доказательстве утверждения 4.

Так как для данных D_1, D_2 множество $\bigcup_{R\in\rho(D_1\cup D_2)} S(R)$ определено однозначно, то из утверждения 5 вытекает существование двуместной тотальной операции $\vee$ на $\Delta(S)$, удовлетворяющей условию: для любых $D_1, D_2 \in \Delta(S)$

$$D_1 \vee D_2 = \bigcup_{R\in\rho(D_1\cup D_2)} S(R) . \qquad (6)$$

Пусть Z - произвольное подмножество множества S. Тогда через $Z^{\perp}$ мы обозначим множество всех элементов из S, ортогональных всем элементам Z. Мы опускаем доказательство следующей теоремы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если $D \in \Delta(S)$, то $D^{\perp} \in \Delta(S)$.

В силу этой теоремы на $\Delta(S)$ существует тотальная одноместная операция $^{\perp}$.

Частичный ответ на вопрос в начале настоящего раздела таков: конструкции из исходных диагнозов, получаемые суперпозициями операций $\wedge$, $\vee$, $^{\perp}$, заведомо являются диагнозами.

Определим на $\Delta(S)$ двуместное отношение $\leq$ условием: $D_1 \leq D_2$, если и только если $D_1 = D_1 \wedge D_2$. Стандартными рассуждениями можно установить, что:

(A1) $D_1 \vee D_2 = D_2 \vee D_1$ для всех $D_1, D_2 \in \Delta(S)$;

(A2) $D_1 \wedge D_2 = D_2 \wedge D_1$ для всех $D_1, D_2 \in \Delta(S)$;

(A3) $D_1 \vee (D_2 \vee D_3) = (D_1 \vee D_2) \vee D_3$ для всех $D_1, D_2, D_3 \in \Delta(S)$;

(A4) $D_1 \wedge (D_2 \wedge D_3) = (D_1 \wedge D_2) \wedge D_3$ для всех $D_1, D_2, D_3 \in \Delta(S)$;

(A5) $D_1 \vee (D_1 \wedge D_2) = D_1$ для всех $D_1, D_2 \in \Delta(S)$;

(A6) $D_1 \wedge (D_1 \vee D_2) = D_1$ для всех $D_1, D_2 \in \Delta(S)$;

(A7) $\mathbf{0} \vee D = D$ для всех $D \in \Delta(S)$;

(A8) $\mathbf{1} \wedge D = D$ для всех $D \in \Delta(S)$;

(A9) $D = (D^{\perp})^{\perp}$ для всех $D \in \Delta(S)$;

(A10) если $D_1 \leq D_2$, то $D_2^{\perp} \leq D_1^{\perp}$;

(A11) $D \wedge D^{\perp} = \mathbf{0}$ для всех $D \in \Delta(S)$;

(A12) $D \vee D^{\perp} = \mathbf{1}$ для всех $D \in \Delta(S)$;

(A13) если $D_1 \leq D_2$, то $D_2 = D_1 \vee (D_2 \wedge D_1^{\perp})$.

Читатель легко узнает в (A1) - (A6) аксиомы для решеток, в (A1) - (A12) - аксиомы для решеток с ортодополнениями, в

(A1)-(A13) - аксиомы для ортомодулярных решеток. Иными словами, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Алгебра $(\Delta(S), \wedge, \vee, ^{\perp}, 0,1)$ диагнозов (в пространстве медицинских процедур) (S, p) - ортомодулярная решетка.

Можно добавить к этой теореме, что алгебра диагнозов - ортомодулярная атомная решетка, в которой атомами служат атомные в (S,p) диагнозы. Точно такие решетки определяют связь между высказываниями об измерениях в квантовой механике. Поэтому они носят название "квантовых логик". Слово "логика" здесь призвано напоминать о том, что аксиомы (A1)-(A13) могут быть использованы (очевидным образом) для формулировки ответа (собственно говоря, они сами и служат таким ответом) на вопрос, как истинность или ложность одних диагнозов зависит от истинности или ложности других. Слово "квантовая" подчеркивает, что здесь, в отличие от классической логики высказываний, не всегда выполняется дистрибутивный закон. С медицинской точки зрения это обстоятельство мотивирует особую осторожность при установлении логических связей между диагнозами: не исключено, что сложный диагноз вида $D_1 \wedge (D_2 \vee D_3)$ соответствует совершенно другому заболеванию, чем диагноз вида $(D_1 \wedge D_2) \vee \vee (D_1 \wedge D_3)$, хотя, пользуясь обычной логикой, врач должен был бы считать эти диагнозы эквивалентными. Это замечание следует учитывать при попытках разработать автоматическую систему диагностики.

5. Заключительные замечания. Мы видим, что, как и следовало ожидать, при аккуратном логическом анализе системы медицинских диагнозов обнаруживается серьезная аналогия между измерениями в квантовой физике и измерениями состояний пациентов (диагнозами). Эта аналогия справедлива в некоторых разумных предположениях относительно возможной структуры врачебной прак-

тики. В связи с этим представляют интерес попытки эти предположения подтвердить или опровергнуть. Например, интересно фактически указать такие три диагноза D_1, D_2 и D_3 , чтобы составленные из них сложные диагнозы нарушали дистрибутивность. Если бы это удалось, мы имели бы сильное косвенное подтверждение принятых предположений.

Второе замечание касается дальнейших аспектов аналогии между физикой и медициной. Известно, что в квантовой физике весьма удобным оказался аппарат теории гильбертовых пространств. Можно показать, что при некоторых специальных допущениях пространства медицинских процедур также обнаруживают тесную взаимосвязь с гильбертовыми пространствами. В какой степени эти специальные допущения оправданы медицински?

Читатель может рассматривать эти замечания как намек на возможные направления будущих исследований.

Литература

1. MIELNIK B. Geometry of Quantun States //Commun. math. Phys. - 1968. - N9. -P. 55-80.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 марта 1988 года