МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1988 год Выпуск 125

УДК 519

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ СТЕПЕНИ УБЕДИТЕЛЬНОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ОТ ИХ ДЛИНЫ

К.Ф. Самохвалов

Когда пользователь обращается к помощи компьютера, то он либо знает, чего хочет, либо не знает этого. В первом случае он как минимум понимает свою задачу, во втором - ему не стоит вообще иметь дела с вычислительной машиной. Стало быть, без всякого ущерба для ожидаемой практики построение средств программирования можно ориентировать на предположение, что подвергаться компьютерной обработке будут лишь те задачи, которые понятны заказчику. В этой связи приобретает актуальность вопрос: чем определяется понятность для человека той или иной задачи? Самый общий ответ таков: данный человек понимает беспокоющую его задачу, если и только если любую вещь, предъявленную его вниманию, он в состоянии распознать как утоление или как неутоление упомянутого беспокойства (ср.[1,2]). Нелепо,например, говорить, что некто понял задачу, решил ее, но не знает о том, что он ее решил. Либо он решил чужую (понятную нам, но не ему) задачу, либо он не дорешал свою - ему осталось еще убедиться в том, что найденное решение действительно есть то, которое требуется. Словом, понятная человеку задача не может иметь неубедительных для него решений.

Это заявление выглядит трюизмом, но на самом деле оно чревато серьезными последствиями. Обратимся, например, к так называемым задачам на доказательство. Это - важные задачи, так как к ним сводятся в конечном итоге все проблемы, возникающие в точной научной деятельности и требующие выхода на вычислительные машины[*)]. Решением любой такой задачи является некоторое доказательное рассуждение. Однакс если длина рассуждения велика, то человек может не усмотреть в нем никакой доказательности (не поймет его) именно потому, что оно чрезмерно громоздко. Следовательно, всякое рассуждение, содержащее, например, 10^{100} и более предложений, не может быть решением какой-либо понятной человеку задачи.

Оценка границы допустимых длин убедительных доказательств колоссальным числом 10^{100} мало что дает разработчику программных средств; для него важно уметь находить подобные границы (для различных сообществ людей) как можно более точно. А это означает, что нужно исследовать вопрос о влиянии длины математических выводов на степень убедительности их для человека.

Как мы увидим ниже, изучение такого рода зависимостей сразу же наталкивается на "парадокс кучи", в чем некоторые исследователи находят мотив для радикальной перестройки (ультраинтуиционизм, полумножества, размытые логики и т.д.) привычного концептуального аппарата. Цель статьи - показать, что отмеченная трудность вполне преодолима без каких-либо математических или логических новаций.

1. Интересующая нас ситуация первоначально выглядит так. Для данного человека (сообщества), если язык, аксиомы и правила вывода рассматриваемой математической системы выбраны разумно, то:

(i) доказательства длины 1 (аксиомы) убедительны;

(ii) для любого n, если доказательства длины n убедительны, то доказательства длины $n+1$ также убедительны:

---

*) Напомним, что любое вычисление - разновидность доказательства.

(iii) найдется (можно указать) такое натуральное число M (например, 10^{100}), что доказательства длины $\geq M$ заведомо не убедительны.

Если (i) рассматривать как базис математической индукции, а (ii) - как индукционный шаг, то (i), (ii) противоречат (iii). Между тем все три пункта (i)-(iii) выглядят интуитивно несомненными. В этом - "парадокс кучи".

Есть два пути для попыток его преодолеть. Во-первых, можно пытаться показать, что на самом деле не все три утверждения (i)-(iii) верны, хотя кажутся на первый взгляд несомненно таковыми. Во-вторых, можно подвергнуть с[омн]ению применимость обычных средств рассуждений (например, принципа математической индукции) к "существенно размытым" свойствам (например, к свойству доказательств "быть убедительными"). Ясно, что, пока не установлена ошибо[чнос]ть первого пути, второй выглядит сверхреволюционным излишеством. И тем не менее исторически события развивались в обратном порядке. Сперва А.Есенин-Вольпин [3], а затем П.Вопенка [4]*) исследовали, к чему ведет отказ применять математическую индукцию к размытым свойствам, и лишь потом М.Даммит [5], опираясь на тщательный анализ различных вариантов "парадокса кучи", показал, что индукционный шаг (ii) неверен, и попутно объяснил, почему все же кажется, что это не так.

Суть дела вкратце такова. Единственным основанием для принятия (ii) служит тот факт, что степень убедительности доказательств длины n неотличима в нашем субъективном восприятии от степени убедительности доказательств длины $n+1$. Иными словами, несомненным является всего лишь то, что между доказательствами длины n и доказательствами длины $n+1$ выполняется некоторое бинарное отношение $\approx$ субъективно наблюдаемого

*) Основные положения работы [4] П.Вопенка сформулировал в 1973 году.

(эмпирического) равенства по степени убедительности. Строго говоря, вместо (ii) мы должны были бы записать:

($\widetilde{\text{ii}}$) для любого n доказательства длины n находятся в отношении $\approx$ с доказательствами длины $n+1$.

Обозначим через "убедительно" свойство доказательств находиться в отношении $\approx$ с аксиомами. Тогда утверждение (i) верно, ибо, как показывает опыт, отношение $\approx$ рефлексивно (и симметрично). Конечно, если бы, дополнительно, отношение $\approx$ было эквивалентностью, то мы сумели бы вывести (ii) из ($\widetilde{\text{ii}}$). Но в том-то и дело, что, как и всякое эмпирическое равенство, наше $\approx$ не является эквивалентностью, поскольку оно (и это тоже неоспоримый опытный факт) не транзитивно. Следовательно, ($\widetilde{\text{ii}}$) не влечет (ii), и, стало быть, (ii) не обосновано опытом. Более того, оно просто не верно: из-за нетранзитивности $\approx$ всегда найдется такое натуральное число m ,что цепочка вида

$$x_1 \approx x_2,\ x_2 \approx x_3, \ldots, x_{m-1} \approx x_m,\ x_m \not\approx x_1 \qquad (1)$$

будет состоять из истинных утверждений, если интерпретировать $x_1, x_2, \ldots, x_m$ соответственно как "доказательства длины 1 (аксиомы)", "доказательства длины 2",..., "доказательства длины m"*). Иллюзия, что п. (ii) несомненно истинен, возникает из-за того, что эмпирическое равенство $\approx$ некритически отождествляется с эквивалентностью. Этому отождествлению способствует, конечно, и то обстоятельство, что самая короткая цепочка вида (1) имеет в нашем случае все-таки значительную ($m \gg 3$) длину. Если бы m было равно трем, то вряд ли нетранзитивность отношения $\approx$ оказалась бы столь хорошо замаскированной, чтобы на этой почве мог возникнуть "парадокс кучи".

---

*) Читатель, вероятно, уже заметил, что мы часто вместо корректного оборота "любое доказательство длины α " употребляем вольный, зато стилистически более удобный оборот "доказательства длины α ".

2. Таким образом, нет никаких глубоких логических препятствий к тому, чтобы считать степень убедительности доказательств функцией их длины. Нужно только правильно согласовать возможный вид такой функции с предполагаемыми свойствами отношения $\approx$.

Как уже сказано, мы считаем, что а) отношение $\approx$ рефлексивно, симметрично, но не транзитивно. Кроме того, в разумных случаях оно связано с объемными характеристиками рассматриваемых доказательств таким, как мы предполагаем, образом, что: б) выполняется условие ($\widetilde{ii}$) из раздела 1; в) для каждого доказательства x_{n_1} длины n_1 существует доказательство x_{n_2} длины n_2, $n_2 > n_1$, такое, что $x_{n_1} \not\approx x_{n_2}$; г) если x_{n_1} - произвольное доказательство длины n_1, x_{n_2} - произвольное доказательство длины n_2, $n_2 \geq n_1$, $x_{n_2} \approx x_{n_1}$, то для любого доказательства x_n длины n, $n_1 \leq n \leq n_2$, имеет место $x_{n_1} \approx x_n$. Заметим, что из этих постулатов непосредственно вытекают пп. (i), ($\widetilde{ii}$), (iii) (раздел 1), если словосочетание "x убедительно" интерпретировать как $x \approx x_1$ (п. (ii), конечно, из них не следует).

Чтобы определить вид зависимости степени убедительности доказательств от их длины, нужно прежде всего договориться, опираясь на постулаты "а"-"г", в каких единицах мы собираемся измерять саму эту степень убедительности. Для этого введем (по индукции) следующую систему "баллов убедительности". Мы говорим, что некоторое доказательство x имеет степень убедительности, равную 0 баллов, если и только если $x \approx x_1$, где x_1 - произвольное доказательство длины 1 (произвольная аксиома) из числа рассматриваемых (из данной математической системы). Далее, пусть Z_1 - класс всех доказательств (данной математической системы), имеющих степень убедительности, равную l баллов. И пусть $z \in Z_l$ - произвольное самое короткое доказательство среди всех элементов класса Z_l. Кроме того, пусть y - произвольное самое короткое доказательство такое, что длина y больше длины z и $y \not\approx z$. Тогда некоторое доказательство x имеет степень убедительности, равную $l+1$ баллов, если и только если $x \approx y$ и $x \not\approx z$. Корректность приведенного определения "баллов убедительности" обеспечивается принятыми предположениями "а"-"г", что проверяется весьма просто. Эту проверку мы предоставляем читателю. Заметим лишь, что вместо баллов $0, 1, \ldots, l, l+1, \ldots$ мы с равным успехом могли бы, соответственно видоизменив последующие обозначения, говорить о баллах $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(l), \varphi(l+1), \ldots$, где φ - произвольное строго монотонное преобразование числовой оси в себя. По этой, собственно, причине мы называем нашу шкалу возможных значений степени убедительности доказательств именно балльной шкалой, а не как-либо иначе.

Пусть функция $\Delta\colon N \to N$ такова, что для всякого n значение $\Delta(n)$ равно тому минимальному удлинению доказательств длины n, которое уже начинает сказываться на их убедительности. Иными словами, пусть функция Δ удовлетворяет условию: для произвольных n, m равенство $\Delta(n) = m$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого k справедливо высказывание $(x_n \not\approx x_{n+m}) \wedge (n \leq k < n+m \Rightarrow x_n \approx x_k)$, где, как и прежде, x_α - сокращение для оборота "любое доказательство длины α". Условимся, что для $l = 0, 1, \ldots$ имеют место равенства

$$d^{(0)}(n) = n, \quad d^{(l+1)}(n) = d^{(l)}(n) + \Delta(d^{(l)}(n)). \qquad (2)$$

Тогда, очевидно, доказательства длины n имеют степень убедительности, равную l баллам, если и только если

$$d^{(l)}(1) \le n < d^{(l+1)}(1).$$

Теперь мы можем определить искомую зависимость убедительности доказательств от их длины - обозначим ее через f - условием: для произвольных n $(n=1,\ldots)$ и l $(l=0,1,\ldots)$

$$f(n) = l \Leftrightarrow d^{(l)}(1) \le n < d^{(l+1)}(1). \qquad (3)$$

Согласно (3) и (2) функция f известна, если известна функция Δ. Последняя же может быть найдена для данной математической системы и данного ее пользователя как эмпирическое обобщение результатов психологического тестирования последнего на предмет умения распознавать им малейшие изменения в степени убедительности для него доказательств из рассматриваемой системы.

Если считать доказательства в рамках фиксированной системы внешними стимулами, значения некоторой линейной функции их длины - интенсивностями этих стимулов, а субъективное чувство степени убедительности доказательств данного человека - стимулируемым ощущением, то экспериментальное установление функции Δ в точности соответствует методам, которыми был найден знаменитый психофизический закон Вебера-Фехнера. Мы не будем описывать здесь эти методы. Их популярное описание читатель найдет, например, в [6]. Отметим только, что если закон Вебера-Фехнера справедлив также и в нашем случае, то Δ должна иметь следующий вид:

$$\Delta(n) = \,)a + bn(\,, \qquad (4)$$

где $)u($ - ближайшее целое к u; a, b - вещественные числа, свои для каждого испытуемого и выбранной математической системы.

Таким образом, мы, во-первых, располагаем хорошо отработанной еще в прошлом веке экспериментальной методикой установления зависимости между степенью убедительности доказательств и их длиной, и, во-вторых, у нас есть основания ожидать, что результаты применения этой методики будут иметь определенный вид, описываемый совокупностью несложных формул (2)-(4). Легко догадаться, что речь идет о некоторой ступенчатой зависимости с параметрами a и b, своими для каждого испытуемого и каждого выбора математической системы, в рамках которой испытуемый пытается строить доказательства.

Имеется, следовательно, некоторый резон полагать, что попытки разработать язык программирования, ориентированный на решение только тех задач, которые понятны заказчику, не висят в воздухе.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л., САМОХВАЛОВ К.Ф. О новом подходе к философии математики //Структурный анализ символьных последовательностей. - Новосибирск, 1981. -Вып. 101: Вычислительные системы. - С. 141-148.

2. ЕРШОВ Ю.Л., САМОХВАЛОВ К.Ф. О новом подходе к методологии математики //Закономерности развития современной математики, М., 1987. -С. 85-106.

3. ESENIN-VOLPIN A. On the ultra-intuitionistic foundations of mathematics //Infinitistic methods.-Oxford: Pergamon Press, 1961. - P. 201-223.

4. ВОПЕНКА П. Математика в альтернативной теории множеств. - М., 1983. - 152 с.

5. DUMMETT M. Wang's paradox //Synthese. - 1975. - Vol.30. - P. 301-324.

6. ДЖЕМС В. Научные основы психологии. -СПБ, 1902. -375 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

20 мая 1988 года