АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 128

УДК 519.65

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ В ТЕРМИНАХ ЛОКАЛЬНОЙ СЕТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Ю.С.Волков

1. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы последовательность разбиений

$$\{\Delta_\nu:\quad a=x_{\nu,0}<x_{\nu,1}<\ldots<x_{\nu,N_\nu}=b\},\ \nu=1,2,\ldots,$$

удовлетворяющая условию

$$\bar{h}_\nu \to 0 \quad \text{при} \quad \nu\to\infty, \tag{1}$$

где

$$\bar{h}_\nu=\max_i h_{\nu,i},\qquad h_{\nu,i}=x_{\nu,i+1}-x_{\nu,i},$$

и $(b-a)$-периодическая функция $f\in C^k$, $0\le k\le n$. Периодический сплайн $S_\nu(x)$ степени $n=2r+1$ интерполирует $f(x)$ в узлах Δ_ν, т.е. $S(x_{\nu,i})=f(x_{\nu,i})$, $i=1,\ldots$ $\ldots,N_\nu$.

Большой интерес и с теоретической, и с практической точек зрения представляет изучение поведения величины

$$\|S_\nu^{(k)}-f^{(k)}\|_{L_\infty[a,b]}=\|S_\nu^{(k)}-f^{(k)}\|_\infty$$

при $\nu\to\infty$ в зависимости от величины локальной характеристики неравномерности последовательности сеток

$$\rho_\nu = \max_{|i-j|=1} \frac{h_{\nu,i}}{h_{\nu,j}} .$$

В данной заметке приводятся численные значения величин $\rho_n^{(k)}$ и $\bar{\rho}_n$ такие, что на последовательности сеток Δ_ν с $\rho_\nu \geq \rho_n^{(k)}$ возможна расходимость процесса интерполяции, а при любых $\rho_\nu < \bar{\rho}_n$ сплайны и их старшие производные сходятся к $f(x)$ и $f^{(n)}(x)$ в пространствах C и C^n соответственно.

2. Пусть $\lambda_{n1}(q), \dots, \lambda_{n,n-1}(q)$ - нули обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса

$$\Pi_n(\lambda ;q) = \frac{1}{(q-1)^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq m}}^{n} (q^p-\lambda) ,$$

пронумерованные в порядке убывания (все они вещественны).

Известно [1], что $\lambda_{nm}(q) \sim q^m$, следовательно,

$$\left|\frac{\lambda_{nr}(q)}{q^k}\right| \to \infty \quad \text{при} \quad q \to \infty .$$

Обозначим через $\rho_n^{(k)}$ наибольший нуль функции

$$1+ \lambda_{nr}(q)/q^k \quad \text{при} \quad k = 0,1,\dots,r-1 ,$$

и функции

$$1+ \lambda_{nr}(q)/q^{n-k} \quad \text{при} \quad k = r+2 ,\dots,n .$$

В [2] доказана

ТЕОРЕМА 1. *Для любых фиксированных* k *и* ρ, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\lambda_{nr}(\rho) \leq -\rho^k \quad \textit{при} \quad 0 \leq k \leq r-1 , \tag{2}$$

$$\lambda_{nr}(\rho) \le -\rho^{n-k} \quad \text{при} \quad r+2 \le k \le n, \qquad (3)$$

существуют $(b-a)$*-периодическая функция* $f \in C^k$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_\nu\}$, *удовлетворяющая (1) и условию* $\rho_\nu = \rho$ *для всех* ν, *такие, что для периодических сплайнов* $S_\nu(x)$ *степени* $n = 2r+1$, *интерполирующих* $f(x)$ *в узлах сеток* Δ_ν, *имеет место соотношение*

$$\| S_\nu^{(k)} - f^{(k)} \|_\infty \to \infty \quad \text{при} \quad \nu \to \infty.$$

Из работ [3,4] следует, что функция

$$1 + \lambda_{nr}(q)/q^k \qquad (4)$$

при $k = 0,1$ монотонная, следовательно,неравенства (2) при $k = 0,1$ и (3) при $k = n-1, n$ эквивалентны неравенствам $\rho \ge \rho_n^{(k)}$. Проведенные на ЭВМ расчеты для $n = 7,9,\ldots,17$ (соответственно $r = 3,4,\ldots,8$) показали, что функция (4) монотонна и для $k = 2,3,\ldots, r-1$, однако в случае произвольного n доказать это не удалось.Но тем не менее мы можем указать такие числа $\tilde\rho_n^{(k)} > \rho_n^{(k)}$, что при $\rho \ge \tilde\rho_n^{(k)}$ неравенство (2) ($k = 2,\ldots, r-1$) или (3) (соответственно $k = r+2,\ldots, n-2$) будет выполнено. Числа $\tilde\rho_n^{(k)}$ являются нулями монотонных функций $1+\lambda_{n,r-k+1}(q)/q$ при $k = 2,\ldots, r-1$ или $1+\lambda_{n,k-r}(q)/q$ при $k=r+2,\ldots,n-2$.

Отметим интересную симметрию чисел $\rho_n^{(k)}$ и $\tilde\rho_n^{(k)}$:

$$\rho_n^{(k)} = \rho_n^{(n-k)}, \quad \tilde\rho_n^{(k)} = \tilde\rho_n^{(n-k)} .$$

Это в некоторой степени объясняет совпадение ограничений на характеристики ρ_ν, полученных ранее для кубических сплайнов Н. Л. Зматраковым при исследовании сходимости S_ν к $f \in C$ [5] и S_ν''' к f''', $f \in C^3$ [6].

В табл. 1 и 2 приведены приближенные значения чисел $\rho_n^{(k)}$ и $\tilde{\rho}_n^{(k)}$ соответственно до $n = 17$, округленные до четвертого знака после запятой. Для вычисления этих значений на ЭВМ использовалась арифметика многократной точности.

Таблица 1

Значения $\rho_n^{(k)}$

k	Степень n							
	3	5	7	9	11	13	15	17
0	2,6181	1,4164	1,1991	1,1182	1,0787	1,0563	1,0423	1,0330
1	-	1,8535	1,2948	1,1556	1,0973	1,0670	1,0490	1,0375
2	-	-	1,5815	1,2285	1,1277	1,0828	1,0583	1,0435
3	-	-	-	1,4409	1,1866	1,1084	1,0720	1,0517
4	-	-	-	-	1,3549	1,1577	1,0941	1,0637
5	-	-	-	-	-	1,2970	1,1366	1,0832
6	-	-	-	-	-	-	1,2553	1,1205
7	-	-	-	-	-	-	-	1,2238

Таблица 2

Значения $\tilde{\rho}_n^{(k)}$

k	Степень n					
	7	9	11	13	15	17
2	3,2649	1,7081	1,3734	1,2369	1,1656	1,1230
3	-	4,5824	2,0254	1,5341	1,3395	1,2388
4	-	-	5,8715	2,2956	1,6659	1,4228
5	-	-	-	7,1481	2,5362	1,7797
6	-	-	-	-	8,4180	2,7558
7	-	-	-	-	-	9,6839

Очень быстрое стремление $\rho_n^{(k)}$ к 1 с ростом n говорит о том, что сходимость величины $\|S_\nu^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty$ при $f \in C^k$ для сплайнов высоких степеней можно ожидать только на сетках, локально близких к равномерным.

В случае сплайнов третьей и пятой степени числа $\rho_n^{(k)}$ можно вычислить точно. Для $n = 3$ $\rho_3^{(0)} = \rho_3^{(3)} = (3+\sqrt{5})/2$. Это значение найдено в работах [6,7]. Для $n = 5$

$$\rho_5^{(0)} = \rho_5^{(5)} = \frac{1}{2}\sigma_0 - \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_0^2 - 1} \quad ,$$

где σ_0 - наименьший корень уравнения

$$\sigma^4 - 6\sigma^3 - 2\sigma^2 + 17\sigma + 10 = 0;$$

$$\rho_5^{(1)} = \rho_5^{(4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{129}}{6} - \sqrt{\frac{\sqrt{129}-1}{6}}\right).$$

3. Пусть число $\bar{\rho}_n$ является корнем уравнения

$$\lambda_{nr}(q)\cdot q^{(r-1)(2r+1)} + 1 = 0.$$

В [8] доказано, что корень этого уравнения всегда единствен.

ТЕОРЕМА 2. *Если последовательность сеток* Δ_ν *такова, что* $\rho_\nu < \bar{\rho}_n$, *то*

а) $\|S_\nu - f\|_\infty \to 0$ *при* $\nu \to \infty$ *для любой непрерывной периодической* f ;

б) $\|S_\nu^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty \to 0$ *при* $\nu \to \infty$ *для любой периодической* $f \in C^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первой части теоремы можно найти в [8], вторая часть доказана в [9].

В табл.3 приведены значения $\bar{\rho}_n$ для $n = 3,5,\ldots,17$, вычисленные на ЭВМ с привлечением арифметики многократной точности.

Т а б л и ц а 3

Значения $\bar{\rho}_n$

n	3	5	7	9	11	13	15	17
$\bar{\rho}_n$	2,6180	1.1193	1,0363	1,0159	1,0083	1,0049	1,0031	1,0021

Для кубических сплайнов $\bar{\rho}_3 = (3+\sqrt{5})/2$ и совпадает с $\rho_3^{(0)} = \rho_3^{(3)}$. Данное ограничение на ρ_ν было найдено Н.Л.Зматраковым [5]. При $n > 3$ числа $\bar{\rho}_n$,по-видимому,можно улучшить, но характер их поведения с ростом n (стремление к 1) сохранится. Это следует из теоремы 1.

Л и т е р а т у р а

1. FENG Y.Y., KOZAK J. On generalized Euler-Frobenius polynomial //J. approxim. theory. - 1981. - Vol. 32, N4. -P.327-338.

2. ВОЛКОВ Ю.С. Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени //Приближение сплайнами. - Новосибирск. - 1984. - Вып. 106: Вычислительные системы. - С. 41-56.

3. MICCHELLI C.A. Oscillation matrices and cardinal spline interpolation //Studies in splines and approximation theory /Eds. S.Karlin, C.A.Micchelli, A.Pinkus, I.J.Schoenberg.- New York: Acad. Press, 1976. - P. 163-201.

4. ВОЛКОВ Ю.С. Об осцилляционных матрицах в задачах сплайн-интерполяции //Сиб. мат. журн. - 1987. - Т. 28, № 3. - С. 51-53.

5. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов //Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. - 1975. - Т. 138. - С. 71-93.

6. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Равномерная сходимость третьих производных интерполяционных кубических сплайнов //Методы сплайн-функций. - Новосибирск. - 1977. - Вып. 72: Вычислительные системы. - С. 10-29.

7. MARSDEN M. Cubic spline interpolation of continuous function //J. approxim. theory. - 1974. -Vol. 10, N2.-P.103-111.

8. FRIEDLAND S., MICCHELLI C.A. Bounds on solutions of difference equations and spline interpolation at knot //Linear algebra and its appl. - 1978. -Vol.20, N 3. -P.219-251.

9. ВОЛКОВ Ю.С. Равномерная сходимость производных интерполяционных сплайнов нечетной степени. - Новосибирск, 1984. - 10 с. - (Препринт/ АН СССР. Сиб. Отд-ние. Ин-т математики; № 62).

Поступила в ред.-изд.отд.
11 октября 1977 года