АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 128

УДК 519.651

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ. ФОРМУЛА, ТОЧНАЯ НА ПОЛИНОМАХ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Т.Э. Овчинникова

Введение

Целью предлагаемой работы является изучение одной из формул локальной аппроксимации кубическими сплайнами, которая точна для полиномов первой степени на произвольной нерегулярной сетке [1]. На равномерной сетке она совпадает с простейшей формулой, исследованной в [2].

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы функция $f(x)$ и сетка $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$. В дальнейшем будем придерживаться соглашений, принятых в [2] относительно продолжения сетки, а именно будем рассматривать следующие варианты:

а) $h_{-2} = h_{-1} = 0$; $h_{n+1} = h_n = 0$;

б) $h_{-2} = h_{-1} = h_0$; $h_{n+1} = h_n = h_{n-1}$;

в) $h_{-1} = h_0$, $h_{-2} = h_1$; $h_n = h_{n-1}$, $h_{n+1} = h_{n-2}$.

Исследуемая формула локальной аппроксимации имеет вид:

$$S_f(x) = \alpha_{-1}B_{-1}(x) + \alpha_{n+1}B_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)B_k(x), \tag{1}$$

где $\xi_k = (x_{k-1} + x_k + x_{k+1})/3$, а $B_k(x)$ - нормализованные

B-сплайны [1,3]. Коэффициенты $\alpha_{-1}, \alpha_{n+1}$ для варианта продолжения сетки "а" задаются общей формулой: $\alpha_{-1} = f(\xi_{-1}) = f(x_0)$, $\alpha_{n+1} = f(\xi_{n+1}) = f(x_n)$. В случаях "б", "в" они находятся из условий интерполяции на концах интервала: $S_f(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, n$.

Пусть $L(x)$ - линейная функция, интерполирующая f в точках $\xi_0 = x_0$ и ξ_1 . Тогда для $x \in [x_0, x_1]$ имеем $S_L(x) = L(x) = \sum_{k=-1}^{2} L(\xi_k) B_k(x)$, поскольку формула (1) восстанавливает линейные функции. Таким образом, $S_L(x_0) = f(x_0)$, т.е. условие интерполяции выполнено, а, следовательно, $\alpha_{-1} = L(\xi_{-1})$, или

$$\alpha_{-1} = f(x_0) + \varkappa_0 [f(x_0) - f(\xi_1)], \quad \varkappa_0 = \frac{x_0 - \xi_{-1}}{\xi_1 - x_0}. \tag{2}$$

Отметим, что в случае продолжения сетки "б" $\varkappa_0 = 3h_0/(2h_0 + h_1)$, а в случае "в" - $\varkappa_0 = 1$. Аналогично

$$\alpha_{n+1} = f(x_n) + \varkappa_n [f(x_n) - f(\xi_{n-1})], \quad \varkappa_n = \frac{\xi_{n+1} - x_n}{x_n - \xi_{n-1}}.$$

Мы получим оценки погрешности приближения локальной аппроксимации (1) на произвольной сетке. В §1 для достаточно гладких функций, например $f \in W^3_\infty[a,b]$, выводятся формулы асимптотического разложения

$$S_f^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) + \varphi^{(r)}(x) f''(x) + O(H^{3-r}), r = 0,1,$$

где $H = \max_k h_k$.Найдены точные оценки главных членов погрешности функции и ее производной $|\varphi(x)| \le H^2/6$, $|\varphi'(x)| \le H/2$. Тем самым получены точные асимптотические оценки

$$\|S_f^{(r)} - f^{(r)}\|_C \le K_r H^{2-r} \|f''\|_C + O(H^{3-r}), \quad r = 0,1,$$

где $K_0 = 1/6$, $K_1 = 1/2$. Заметим, что по ходу доказательства получены неравенства

$$\| S_f' - f' \|_{C[x_1, x_{n-1}]} \le H/6 \| f'' \|_C + O(H^2),$$

$$\| S_f' - f' \|_{C[x_j, x_{j+1}]} \le H/2 \| f'' \|_C + O(H^2), \quad j = 0, n-1.$$

В работе [1] приведены формулы асимптотического разложения погрешности аппроксимации (1) на равномерной сетке, показывающие, что в этом случае производные $f'(x)$ и $f''(x)$ приближаются с точностью $O(H^2)$. На неравномерной сетке, как видно из приведенных выше формул, порядок приближения $f'(x)$ понижается на единицу, а $f''(x)$, вообще говоря, не аппроксимируется.

В §2 в предположении $f \in W^2_\infty[a,b]$ получены точные оценки погрешности приближения

$$\| S_f^{(r)} - f^{(r)} \|_C \le K_r H^{2-r} \| f'' \|_\infty, \quad r = 0,1,$$

причем постоянные K_r такие же, как и в асимптотических оценках. Это говорит о том, что для данной формулы локальной аппроксимации не следует использовать асимптотические оценки.

Формула (1), в отличие от простейшей локальной аппроксимации, не совсем удобна на практике, поскольку требует вычисления значений $f(\xi_k)$. Приведем другую формулу, которая также восстанавливает полиномы первой степени, но лишена этого недостатка. Возьмем сплайн первой степени $L(x)$, интерполирующий значения $f(x_i)$, и положим $\tilde{S}_f(x) = S_L(x)$. Тогда

$$\tilde{S}_f(x) - f(x) = S_f(x) - f(x) + \sum_{k=0}^{n} [L(\xi_k) - f(\xi_k)] B_k(x) -$$

$$- \varkappa_0 [L(\xi_1) - f(\xi_1)] B_{-1}(x) - \varkappa_n [L(\xi_{n-1}) - f(\xi_{n-1})] B_{n+1}(x).$$

Отсюда, используя приведенные выше результаты, а также оценку, полученную в [1] для $L(x)-f(x)$ при $f\in W_{\infty}^{2}[a,b]$, имеем $\|\tilde{S}_f-f\|_C \le 7/24\cdot H^2\|f''\|_{\infty}$. Эта оценка не является точной, но легко показать, что точная константа не может быть меньше 1/6.

В дальнейшем в обозначении локальной аппроксимации (1) мы будем опускать индекс f в тех случаях, когда это не приводит к разночтениям.

§1. Точные асимптотические оценки

ТЕОРЕМА 1. *Если $S(x)$ – аппроксимационный сплайн, определяемый формулой (1), $f\in W_{\infty}^{3}[a,b]$, а продолжение сетки удовлетворяет одному из условий "а"–"в", то*

$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_C \le K_r H^{2-r}\|f''\|_C + O(H^{3-r}), \quad r=0,1,$$

где $K_0 = 1/6$, $K_1 = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in[x_i,x_{i+1}], 1\le i\le n-2$. Подставив в (1) выражения

$$f(\xi_k)=f(x)+(\xi_k-x)f'(x)+\frac{(\xi_k-x)^2}{2}f''(x)+O(H^3) \qquad (3)$$

и используя свойства B-сплайнов, получим

$$S(x)=f(x)+\varphi(x)f''(x)+O(H^3), \qquad (4)$$

где $\varphi(x)=\left[\sum_{k=i-1}^{i+2}(\xi_k-x)^2B_k(x)\right]/2$.

Если в качестве аппроксимируемой функции взять полином вида $P(x)=x^2/2+cx+d$, то, очевидно, $\varphi(x)=S_P(x)-P(x)$. Полагая $P(x)=(x-\xi_i)(x-\xi_{i+1})/2$, имеем $\varphi(x) = P(\xi_{i-1})B_{i-1}(x)+P(\xi_{i+2})B_{i+2}(x)-P(x)$, откуда, используя формулы для B-сплайнов, легко получить

$$\varphi(x) = \frac{1}{18}\{\lambda_i h_i(h_{i-2}+h_{i+1})(1-t)^3 +$$

$$+ \mu_{i+1}h_i(h_{i+2}+h_{i-1})t^3+3h_i^2 t(1-t)+3h_i h_{i+1}t +$$

$$+ 3h_i h_{i-1}(1-t)+h_{i-1}h_{i+1}-h_i h_{i-1}-h_i h_{i+1}\}, \tag{5}$$

где $t=(x-x_i)/h_i$, $\mu_k=h_{k-1}/(h_{k-1}+h_k)$, $\lambda_k = 1-\mu_k$.

Теперь найдем $K_0=\max\limits_{x,h_k}|\varphi(x)|/H^2$. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} &u=h_{i-2}/H,\ w=h_{i-1}/H,\ z=h_i/H,\\ &y=h_{i+1}/H,\ v=h_{i+2}/H,\ \ u,w,z,y,v\in[0,1]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тогда

$$\varphi(x)H^{-2} = \bar\varphi(t,u,w,z,y,v) =$$

$$= \frac{1}{18}\left\{\frac{z^2(u+y)}{w+z}(1-t)^3 + \frac{z^2(v+w)}{y+z}t^3 + \right.$$

$$\left. + 3z^2t(1-t)+3yzt+3wz(1-t)+wy-wz-yz\right\}.$$

Имеем $K_0 = \max\{\max\bar\varphi(t,u,w,z,y,v), -\min\bar\varphi(t,u,w,z,y,v)\}$. Сначала определим максимум функции $\bar\varphi$. Очевидно,

$$\bar\varphi(t,u,w,z,y,v)\le\bar\varphi(t,1,w,z,y,1) = \psi(t,w,z,y).$$

Далее,

$$\psi(t,w,1,y) - \psi(t,w,z,y) =$$

$$= \frac{1-z}{18}\{\psi_0(t,w,z,y)+\psi_0(1-t,y,z,w)+3(1+z)t(1-t)\},$$

где

$$\psi_0(t,w,z,y) = \frac{(1+z)(y+z+yz)}{(y+1)(y+z)}t^3 +$$

$$+ w(2-3t) \ge \frac{w+1}{2} t^3 + w(2-3t) = \psi_1(t,w).$$

Функция $\psi_1(t,w)$ линейна по w, причем $\psi_1(t,0)=t^3/2 \ge 0$, $\psi_1(t,1)=(1-t)(2-t-t^2) \ge 0$ и, следовательно, $\psi_1(t,w) \ge 0$. Значит, $\psi(t,w,z,y) \le \psi(t,w,1,y)$.

Для определения максимума функции $\psi(t,w,1,y)$ рассмотрим сначала область $w \ge y$. Так как $\psi(t,w,1,1)-\psi(t,w,1,y)= = (w-y)\psi_2(t,w,y)/18$, где $\psi_2(t,w,y) = (1-t)^3/(w+1) - -t^3/(y+1)+3t-w-1$ - возрастающая функция от t и $\psi_2(0,w,y)= = w^2/(w+1) \ge 0$, то $\psi(t,w,1,y) \le \psi(t,w,1,1)$ при $w \ge y$.

Аналогично показывается, что в области $w \le y$ максимум $\psi(t,w,1,y)$ достигается при $w = y$. Таким образом, поскольку $\psi(t,w,w,1) = (1+w+w^2)/18$, то $\max \overline{\varphi}(t,u,w,z,y,v)=1/6$.

Покажем теперь, что $\min \overline{\varphi}(t,u,w,z,y,v) > -1/6$. Очевидно, что минимум достигается, когда $u = v = 0$ и при этом

$$\overline{\varphi}(t,0,w,z,y,0)= \frac{1}{18}\left\{ \frac{z^2y}{w+z}(1-t)^3 + \frac{z^2w}{y+z}t^3 + 3z^2t(1-t) + \right.$$

$$\left. +3zyt + 3zw(1-t) + wy-wz-yz \right\} \ge \frac{wy-wz-yz}{18} \ge -\frac{1}{18}.$$

Итак, $\max|\overline{\varphi}(x)|/H^2 = 1/6$ при $x \in [x_1,x_{n-1}]$. Пусть теперь $x \in [x_j,x_{j+1}]$, $j = 0,n-1$. В силу симметрии достаточно рассмотреть $j = 0$. В случае продолжения сетки "а" формулы (4), (5) остаются в силе. В случаях "б", "в" имеем

$$S(x) = \alpha_{-1}B_{-1}(x) + \sum_{k=0}^{2} f(\xi_k)B_k(x), \tag{7}$$

где α_{-1} определяется формулой (2). Используя разложение (3) для $f(x_0)$ и $f(\xi_k)$, нетрудно получить соотношение

$$\alpha_{-1}= f(x)-f'(x)[x-x_0+\varkappa_0(\xi_1-x_0)] +$$

$$+ f''(x)\left[\frac{(x-x_0)^2}{2}(1+\varkappa_0)- \frac{(\xi_1-x_0)^2}{2}\varkappa_0\right]+O(H^3).$$

Подставляя его вместе с (3) в (7), получаем

$$S(x)=f(x)+\varphi_0(x)f''(x)+O(H^3), \tag{8}$$

где

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{2}\{[B_0(x)+B_{-1}(x)(1+\varkappa_0)](x-x_0)^2 +$$

$$+[B_1(x)-\varkappa_0 B_{-1}(x)](\xi_1-x)^2+B_2(x)(\xi_2-x)^2\},$$

или, обозначив $C_0(x)=B_1(x)+B_2(x)=1-B_{-1}(x)-B_0(x)$,

имеем

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{2}\{[1-C_0(x)+\varkappa_0 B_{-1}(x)](x-x_0)^2 +$$

$$+[C_0(x)-\varkappa_0 B_{-1}(x)](\xi_1-x)^2+B_2(x)(\xi_2-x)^2\}. \tag{9}$$

При вариантах "б", "в" продолжения сетки

$$C_0(x)-\varkappa_0 B_{-1}(x)=Q(x)=\frac{h_0}{2h_0+h_1}\left(3t-\frac{h_0t^3}{h_0+h_1}\right). \tag{10}$$

Следовательно, асимптотические формулы для этих вариантов одинаковы и

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{6}\left\{(2h_0+h_1)h_0t-3h_0^2t^2+h_0^2\left[1+\frac{h_2-h_1}{3(h_0+h_1)}\right]t^3\right\}. \tag{11}$$

Определим теперь $\max|\bar\varphi_0(t,z,y,v)|$, где $\bar\varphi_0(t,z,y,v)=$ $=\varphi_0(x)/H^2$, а z,y,v определяются формулами (6) при $i=0$. Очевидно, что максимум $\bar\varphi_0$ достигается при $v=1$. Покажем, что в точке максимума $z = 1$. Действительно,

$$\overline{\varphi}_0(t,1,y,1) - \overline{\varphi}_0(t,z,y,1) =$$

$$= \frac{(1-z)t}{6}\left[y + \frac{(1-y)(y+z+yz)}{3(y+1)(y+z)} + (1+z)(1-t)(2-t)\right] \geq 0.$$

Полагая $z = 1$, имеем

$$\psi_0(t,y) = \overline{\varphi}_0(t,1,y,1) = \frac{t}{6}\left\{ y+2-3t+t^2\left[1 + \frac{1-y}{3(1+y)}\right]\right\}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial\psi_0}{\partial y}(t,y) = \dfrac{t}{6}\left[1-\dfrac{2t^2}{3(1+y)^2}\right] \geq 0$, то

$$\max \psi_0(t,y) = \max[1-(1-t)(1-t^2)]/6 = 1/6 .$$

Минимум $\overline{\varphi}_0$ достигается при $v = 0$. При этом

$$\overline{\varphi}_0(t,z,y,0) = \frac{zt}{6}\left\{ 2z+y-3zt+z\left[1- \frac{y}{3(z+y)}\right] t^2\right\} =$$

$$= \frac{zt}{6}\ \chi_0(t,z,y) .$$

Так как $\chi_0(t,z,y)+1 = 2z(1-t)+y+1-zt+z\left[1-\dfrac{y}{3(z+y)}\right]t^2 \geq 0$, то $\min \overline{\varphi}_0(t,z,y,v) \geq -1/6$.

Мы показали, что на всем отрезке $[a,b]$ справедлива асимптотическая оценка с точной константой $K_0 = 1/6$. Перейдем к рассмотрению аппроксимации производной $f'(x)$.

Пусть сначала $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n-2$. Дифференцируя соотношения (4), (5), получаем

$$S'(x) = f'(x) + \varphi'(x)f''(x) + O(H^2),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{6}\,\{\mu_{i+1}(h_{i+2} + h_{i-1})t^2 -$$

$$-\lambda_i(h_{i-2}+h_{i+1})(1-t)^2 + h_i(1-2t) + h_{i+1} - h_{i-1}\},$$

или, учитывая (6),

$$\varphi'(x)H^{-1} = \tilde{\varphi}(t,u,w,z,y,v) =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{z(w+v)}{y+z}t^2 - \frac{z(y+u)}{w+z}(1-t)^3 + z(1-2t) + y - w\right\}. \quad (12)$$

Из этой формулы видно, что $\tilde{\varphi}(t, u, w, z, y, v) = -\tilde{\varphi}(1-t, v, y, z, w, y)$, $\max|\tilde{\varphi}| = \max\{\max\tilde{\varphi}, -\min\tilde{\varphi}\} = \max\tilde{\varphi}$. Очевидно, что максимум достигается при $v = 1, u = 0$. Функция $\tilde{\varphi}$ представляет собой параболу по переменной t. Полагаем $\tilde{\phi}(t,w,z,y) = \tilde{\varphi}(t,0,w,z,y,1)$. Так как

$$\tilde{\phi}(0,w,z,y) = \frac{1}{6}\left\{-\frac{yz}{w+z} + z + y - w\right\},$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}(0,w,z,y) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{w+z}\right) \geq 0;$$

$$\tilde{\phi}(1,w,z,y) = \frac{1}{6}\left\{\frac{z(w+1)}{y+z} - z + y - w\right\},$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial w}(1,w,z,y) = \frac{1}{6}\left(\frac{z}{y+z} - 1\right) \leq 0;$$

то

$$\max\tilde{\phi}(0,w,z,y) = \max\frac{1}{6}\left[\frac{z^2-w^2-z}{w+z} + 1\right] = \frac{1}{6},$$

$$\max\tilde{\phi}(1,w,z,y) = \max\frac{1}{6}\left[\frac{y^2-z^2-y}{y+z} + 1\right] = \frac{1}{6}.$$

Предположим теперь, что при некоторых значениях w, y, z существует точка максимума $0 < t^* < 1$. Тогда из условий

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}(t^*,w,z,y) = 0, \quad \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2}(t^*,w,z,y) < 0$$

следуют соотношения

$$t^* = \frac{(w+z-y)(y+z)}{(w+1)(w+z)-y(y+z)} ,$$

$$(w+1)(w+z)-y(y+z) < 0, \quad w+z < y, \quad w+1 < y+z,$$

с учетом которых из (12) получаем

$$\tilde{\varphi}(t^*,w,z,y) < \frac{1}{6}\{ z(t^*)^2-z(1-t^*)^2+z(1-2t^*)+y-w \} =$$

$$= \frac{y-w}{6} \le \frac{1}{6} .$$

Тем самым доказано, что $K_1 = 1/6$ при $x \in [x_1, x_{n-1}]$.

Пусть $x \in [x_0, x_1]$. Дифференцирование выражений (8), (11) дает

$$S'(x) = f'(x) + \varphi_0'(x)f''(x) + O(H^2),$$

$$\varphi_0'(x) = \frac{1}{6}\left\{2h_0+h_1-6h_0t+h_0\left(3+\frac{h_2-h_1}{h_0+h_1}\right)t^2\right\},$$

и, с учетом обозначений (6),

$$\frac{\varphi_0'(x)}{H} = \tilde{\varphi}_0(t,z,y,v) = \frac{1}{6}\left\{2z+y-6tz+z\cdot\left(3+\frac{v-y}{y+z}\right)\cdot t^2\right\}.$$

Максимум $\tilde{\varphi}_0$ достигается при $v = 1$. Так как

$$\tilde{\varphi}_0(t,z,1,1) - \tilde{\varphi}_0(t,z,y,1) = \frac{1-y}{6}\left(1-\frac{zt^2}{y+z}\right) \ge 0,$$

то $\max \tilde{\varphi}_0(t,z,y,1) = \max \tilde{\varphi}_0(t,z,1,1) = \max(2z+1-6tz+3t^2z)/6 = 1/2$. Минимум $\tilde{\varphi}_0$ достигается при $v = 0$. Поскольку

$$\tilde{\varphi}_0(t,z,y,0) - \tilde{\varphi}_0(t,z,0,0) = \frac{y}{6}\left(1-\frac{zt^2}{y+z}\right) \ge 0,$$

то $\min\tilde{\varphi}_0(t,z,y,0)=\min\tilde{\varphi}_0(t,z,0,0)=\min\frac{z}{6}[3(1-t)^2-1] =$
$= -\frac{1}{6}.$

Таким образом, при $x\in[x_0,x_1]$ имеем $K_1 = 1/6$. Теорема полностью доказана.

§2. Точные оценки погрешности

ТЕОРЕМА 2. *Если* $S(x)$ *- аппроксимационный сплайн, определяемый формулой (1),* $f\in W^2_\infty[a,b]$ *, а продолжение сетки удовлетворяет одному из условий "а"-"в", то*

$$\| S^{(r)}-f^{(r)}\|_C \le K_r H^{2-r}\|f''\|_\infty , \quad r=0,1,$$

где $K_0 = 1/6$, $K_1 = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $1\le i\le n-2$. Используя разложение по формуле Тейлора

$$f(\xi_k)=f(x)+(\xi_k-x)f'(x)+\int_x^{\xi_k}(\xi_k-v)f''(v)dv, \tag{13}$$

из (1) получаем

$$R(x)=S(x)-f(x)=\sum_{k=i-1}^{i+2}B_k(x)\int_x^{\xi_k}(\xi_k-v)f''(v)dv. \tag{14}$$

Рассмотрим три возможных варианта расположения точки x относительно ξ_i,ξ_{i+1}:

$$\begin{aligned}
&1)\ x\le\xi_i \ \text{при}\ \xi_i\ge x_i;\\
&2)\ \xi_i\le x\le\xi_{i+1};\\
&3)\ x\ge\xi_{i+1}\ \text{при}\ \xi_{i+1}\le x_{i+1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

В первом случае имеем

$$R(x)=\int_{\xi_{i-1}}^{x} B_{i-1}(x)(x-v)f''(v)dv+\int_{x}^{\xi_i}[B_i(x)(\xi_i-v)+$$

$$+B_{i+1}(x)(\xi_{i+1}-v)+B_{i+2}(x)(\xi_{i+2}-v)]f''(v)dv+$$

$$+\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}[B_{i+1}(x)(\xi_{i+1}-v)+B_{i+2}(\xi_{i+2}-v)]f''(v)dv+$$

$$+\int_{\xi_{i+1}}^{\xi_{i+2}} B_{i+2}(x)(\xi_{i+2}-v)f''(v)dv.$$

Так как $B_k(x)\geq 0$, то отсюда, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|R(x)|\leq\|f''\|_C\ \varphi(x),$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=i-1}^{i+2}B_k(x)\frac{(\xi_k-x)^2}{2}. \tag{16}$$

Используя формулы B-сплайнов, получаем, что $\varphi(x)$ определяется формулой (5).

Во втором и третьем случаях совершенно аналогичные рассуждения снова приводят к формуле (16). Следовательно, на интервале $[x_1,x_{n-1}]$ точная оценка совпадает с асимптотической, т.е. $K_0=1/6$.

Пусть теперь $x\in[x_0,x_1]$. Надо рассмотреть варианты продолжения сетки "б", "в", поскольку в случае "а" все формулы сохраняются. Имеем

$$R(x)=[\alpha_{-1}-f(x)]B_{-1}(x)+\sum_{k=0}^{2}[f(\xi_k)-f(x)]B_k(x).$$

Подставляя сюда формулы (2) и (13), получаем

$$R(x) =$$

$$=B_{-1}(x)\left[(1+\varkappa_0)\int\limits_x^{x_0}(x_0-v)f''(v)dv-\varkappa_0\int\limits_x^{\xi_1}(\xi_1-v)f''(v)dv\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{2}B_k(x)\int\limits_x^{\xi_k}(\xi_k-v)f''(v)dv. \tag{17}$$

При $i = 0$ возможны варианты 2 и 3 расположения точки x относительно ξ_1. В случае второго варианта формула (17) дает

$$R(x)=\int\limits_{x_0}^{x}[(1+\varkappa_0)B_{-1}(x)+B_0(x)](v-x_0)f''(v)dv+$$

$$+\int\limits_x^{\xi_1}\{[B_1(x)-\varkappa_0B_{-1}(x)](\xi_1-v)+B_2(x)(\xi_2-v)\}f''(v)dv+$$

$$+\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}B_2(x)(\xi_2-v)f''(v)dv. \tag{18}$$

Учитывая (10), имеем при $v\in[x,\xi_1]$

$$[B_1(x)-\varkappa_0B_{-1}(x)](\xi_1-v)+B_2(x)(\xi_2-v)=$$

$$=Q(x)(\xi_1-v)+B_2(x)(\xi_2-\xi_1)\geq 0.$$

Применяя к (18) неравенство Гёльдера, получаем

$$|R(x)|\leq\|f''\|_\infty\varphi_0(x),$$

где $\varphi_0(x)$ определяется формулой (9). В случае третьего варианта аналогичные рассуждения приводят также к формуле (9).

Тем самым доказано, что на всем интервале $[a,b]$ справедлива оценка с точной константой $K_0 = 1/6$.

Теперь оценим $R_1(x)=S'(x)-f'(x)$. Пусть $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $1\le i\le n-2$. Из (1) и (13) следует

$$R_1(x) = \sum_{k=i-1}^{i+2} B_k'(x)\int_x^{\xi_k}(\xi_k-v)f''(v)dv.$$

Надо рассмотреть три варианта (15) расположения точки x.

При $x_i \le x \le \xi_{i+1}$ имеем

$$R_1(x) =$$

$$=\int_{\xi_{i-1}}^{x} B_{i-1}'(x)(v-\xi_{i-1})f''(v)dv+\int_x^{\xi_i}[B_i'(x)(\xi_i-v) +$$

$$+ B_{i+1}'(x)(\xi_{i+1}-v)+B_{i+2}'(x)(\xi_{i+2}-v)]f''(v)dv +$$

$$+\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}[B_{i+1}'(x)(\xi_{i+1}-v)+B_{i+2}'(x)(\xi_{i+2}-v)]f''(v)dv +$$

$$+\int_{\xi_{i+1}}^{\xi_{i+2}} B_{i+2}'(x)(\xi_{i+2}-v)f''(v)dv. \tag{19}$$

Так как $B_{i-1}'(x)\le 0$, $B_{i+2}'(x)\ge 0$, $C_i'(x)=B_{i+1}'(x) + B_{i+2}'(x) = -B_{i-1}'(x)-B_i'(x) \ge 0$ при $x\in[x_i,x_{i+1}]$, то

$$B_i'(x)(\xi_i-v)+B_{i+1}'(x)(\xi_{i+1}-v)+B_{i+2}'(x)(\xi_{i+2}-v) =$$

$$= -B_{i-1}'(x)(\xi_i-v)+C_i'(x)(\xi_{i+1}-\xi_i)+B_{i+2}'(x)(\xi_{i+2}-\xi_{i+1})\ge 0$$

при $v \in [x, \xi_i]$ и

$$B'_{i+1}(x)(\xi_{i+1}-v)+B'_{i+2}(x)(\xi_{i+2}-v) =$$
$$= C'_i(x)(\xi_{i+1}-v)+B'_{i+2}(x)(\xi_{i+2}-\xi_{i+1}) \geq 0$$

при $v \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$. Применяя к (19) неравенство Гёльдера, имеем

$$|R_1(x)| \leq \|f''\|_\infty \varphi_{11}(x),$$

$$\varphi_{11}(x)= \frac{1}{6}\{3h_i(1-2t)+h_{i+1}-h_{i-1}+\mu_i(\gamma_i+\gamma_{i+1})t^2 +$$
$$+\lambda_i\left[\frac{2(3h_i t+2h_{i-1}+h_{i-2})^2}{\gamma_{i-1}}-\gamma_{i-1}-\gamma_i\right](1-t)^2\}, \tag{20}$$

где $\gamma_k = h_{k-1}+h_k+h_{k+1}$.

Если $\xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}$, то

$$R_1(x)= \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} B'_{i-1}(x)(v-\xi_{i-1})f''(v)dv +$$
$$+\int_{\xi_i}^{x}[B'_{i-1}(x)(v-\xi_{i-1})+B'_i(x)(v-\xi_i)]f''(v)dv+$$
$$+\int_{x}^{\xi_{i+1}}[B'_{i+1}(x)(\xi_{i+1}-v)+B'_{i+2}(x)(\xi_{i+2}-v)]f''(v)dv+$$
$$+\int_{\xi_{i+1}}^{\xi_{i+2}} B'_{i+2}(x)(\xi_{i+2}-v)f''(v)dv. \tag{21}$$

Поскольку при $v \in [\xi_i, x]$

$$B'_{i-1}(x)(v-\xi_{i-1})+B'_i(x)(v-\xi_i) =$$

$$= -C_i'(x)(v-\xi_i)+B_{i-1}'(\xi_i-\xi_{i-1}) \le 0,$$

а

$$B_{i+1}'(x)(\xi_{i+1}-v)+B_{i+2}'(x)(\xi_{i+2}-v) =$$

$$= C_i'(x)(\xi_{i+1}-v)+B_{i+2}'(x)(\xi_{i+2}-\xi_{i+1}) \ge 0$$

при $v \in [x, \xi_{i+1}]$, то применение к (21) неравенства Гёльдера дает

$$|R_1(x)| \le \|f''\|_\infty \varphi_{12}(x),$$

$$\varphi_{12}(x) = \frac{1}{6}\left\{\gamma_i - \frac{2(3h_i t+h_{i-1}-h_i)(3h_i(1-t)+h_{i+1}-h_i)}{\gamma_i} + \right.$$

$$+ \mu_{i+1}\left[\gamma_i+\gamma_{i+1}-\frac{2(3h_i t+h_{i-1}-h_i)^2}{\gamma_i}\right] t^2 +$$

$$\left. + \lambda_i\left[\gamma_{i-1}+\gamma_i-\frac{2(3h_i(1-t)+h_{i+1}-h_i)^2}{\gamma_i}\right]\right\}. \qquad (22)$$

Вариант 3 аналогичен варианту 1, поэтому мы опускаем подробности вывода. Отметим только, что в этом случае

$$|R_1(x)| \le \|f''\|_\infty \varphi_{13}(x),$$

$$\tilde\varphi_{13}(t,u,w,z,y,v) = \tilde\varphi_{11}(1-t,v,y,z,w,u),$$

где $\tilde\varphi_{13}(t,u,w,z,y,v) = \varphi_{13}(x)/H$, $\tilde\varphi_{11}(t,u,w,z,y,v) = \tilde\varphi_{11}(x)/H$, а u,w,z,y,v определяются соотношениями (6).

Теперь, полагая $\tilde\varphi_{12}(t,u,w,z,y,v) = \varphi_{12}(x)/H$, найдем $K_1=\max\{\max \tilde\varphi_{11}, \max \tilde\varphi_{12}\}$. Из (20) легко видеть, что максимум $\tilde\varphi_{11}$ достигается при $v = 1$. Тогда

$$\tilde{\varphi}_{11}(t,u,w,z,y,1) = \tilde{\varphi}_{11}(t,u,w,z,y) =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{ 3z(1-2t)+y-w+ \frac{z(w+1+2y+2z)}{y+z}\cdot t^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{z}{w+z}\left[\frac{2(w-z-3zt)^2}{u+w+z} + 12zt-4z+4w-y+u\right](1-t)^2\right\}.$$

Очевидно, $\dfrac{\partial^2\tilde{\varphi}_{11}}{\partial u^2}(t,u,w,z,y) \geq 0$, поэтому

$$\max_u \tilde{\varphi}_{11} = \max\{\tilde{\varphi}_{11}(t,0,w,z,y),\ \tilde{\varphi}_{11}(t,1,w,z,y)\}.$$

Но

$$\tilde{\varphi}_{11}(t,1,w,z,y) - \tilde{\varphi}_{11}(t,0,w,z,y) =$$

$$= \frac{(1-t)^2}{6(w+z)} + \left[\frac{(1+w+z)(w+z)-2(z-w-3zt)^2}{(1+w+z)(w+z)}\right],$$

а так как $z-w \geq z-w-3tz \geq 0$ при $\xi_1 > x$, то

$(1+w+z)(w+z)-2(z-w-3tz)^2 \geq (1+w+z)(w+z)-(z-w)^2 \geq 0$, следовательно, $\tilde{\varphi}_{11}(t,0,w,z,y) \leq \tilde{\varphi}_{11}(t,1,w,z,y)$, т.е. максимум достигается при $u = 1$. Соотношение между остальными переменными в точке максимума функции $\tilde{\varphi}_{11}$ было установлено с помощью численных расчетов на ЭВМ. Было показано, что

$$\max\tilde{\varphi}_{11}(t,1,w,z,y) = \max\tilde{\varphi}_{11}(t,1,1,1,1) = \max\frac{(1-t^2)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Функция $\tilde{\varphi}_{12}$, как видно из формулы (22), достигает максимума при $u = v = 1$. Численные расчеты, выполненные на ЭВМ, показали, что

$$\max \tilde{\varphi}_{12}(t,1,w,z,y,1) = \max \tilde{\varphi}_{12}(t,1,1,1,1,1) =$$

$$= \max[1-2t^2(1-t)^2]/2 = 1/2 .$$

Таким образом, при $x \in [x_1, x_{n-1}]$ имеем $K_1 = 1/2$. Пусть теперь $x \in [x_0, x_1]$, а продолжение сетки удовлетворяет условиям "б" или "в". Тогда из (7), (2), подставляя выражения (13), получаем

$$R_1(x) = B'_{-1}(x)\left[(1+\varkappa_0)\int_x^{x_0}(x_0-v)f''(v)dv - \right.$$

$$\left. - \varkappa_0\int_x^{\xi_1}(\xi_1-v)f''(v)dv\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2} B_k(x)\int_x^{\xi_k}(\xi_k-v)f''(v)dv . \tag{23}$$

При $i = 0$ и условиях "б", "в" возможны варианты 2 и 3 расположения точки x относительно ξ_1 .

Если $x \in [x_0, \xi_1]$, то из (23) имеем

$$R_1(x) = \int_{x_0}^{x}[(1+\varkappa_0)B'_{-1}(x) + B'_0(x)](v-x_0)f''(v)dv +$$

$$+\int_x^{\xi_1}\{[B'_1(x) - \varkappa_0 B'_{-1}(x)](\xi_1-v) + B'_2(x)(\xi_2-v)\}f''(v)dv +$$

$$+\int_{\xi_1}^{\xi_2} B'_2(x)(\xi_2-v)f''(v)dv . \tag{24}$$

Так как $B'_{-1}(x) \le 0$, $C'_0(x) \ge 0$, $B'_2(x) \ge 0$, а из (10)

$$Q'(x) = \frac{3h_0}{2h_0+h_1}\left(1-\frac{h_0 t^2}{h_0+h_1}\right) \ge 0,$$

то при $v \in [x,\xi_1]$ имеем $[B'_1(x)-\varkappa_0 B'_{-1}(x)](\xi_1-v) + B'_2(x)(\xi_2-v) = Q'(x)(\xi_1-v)+B'_2(x)(\xi_2-\xi_1) \ge 0$. Применение неравенства Гёльдера к (24) дает

$$|R_1(x)| \le \|f''\|_\infty \varphi_1(x),$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{6\mu_1 h_0^2 t^4}{2h_0+h_1} + h_0\left[\frac{6h_0}{2h_0+h_1} + \frac{3h_0+2h_1+h_2}{3(h_0+h_1)}\right]t^2 - 2h_0 t + \frac{2h_0+h_1}{3}\right\}. \tag{25}$$

При $x \in [\xi_1, x]$, $\xi_1 \le x_1$, перепишем (23) в виде

$$R_1(x) = \int_{x_0}^{\xi_1}[(1+\varkappa_0)B'_{-1}(x)+B'_0(x)](v-x_0)f''(v)dv +$$

$$+\int_{\xi_1}^{x}\{[(1+\varkappa_0)B'_{-1}(x)+B'_0(x)](v-x_0) +$$

$$+[B'_1(x)-\varkappa_0 B'_{-1}(x)](v-\xi_1)\}f''(v)dv +$$

$$+\int_{x}^{\xi_2} B'_2(x)(\xi_2-v)f''(v)dv. \tag{26}$$

Поскольку $[(1+\varkappa_0)B'_{-1}(x)+B'_0(x)](v-x_0)+[B'_1(x) - \varkappa_0 B'_{-1}(x)](v-\xi_1) = -Q'(x)(\xi_1-x_0)-B'_2(x)(v-\xi_1) \le 0$ при

$v \in [x, \xi_1]$, то аналогично предыдущему случаю из (26) следует

$$|R_1(x)| \le \|f''\|_\infty \varphi_2(x),$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\left\{\mu_1 t^2\left[\frac{2(3h_0(1-t)+h_1-h_0)^2}{3\gamma_1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -4h_0 t + 2h_0 + h_1 + \frac{\gamma_1}{3}\right] + 2h_0 t - \frac{2h_0+h_1}{3}\right\}. \qquad (27)$$

Остается оценить функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Максимум функции $\varphi_1(x)$, как видно из (25), достигается при $h_2 = H$. С помощью численных расчетов на ЭВМ было показано, что в точке максимума $h_0 = h_1 = H$, т.е.

$$\max \varphi_1(x) = \max H[1-t(1+t)(1-t)^2]/2 = H/2.$$

Функция $\varphi_2(x)$ получена при условии $\xi_1 \le x \le \xi_2$, откуда следует, что $3h_0 t \ge 2h_0 + h_1$, $h_0 \ge h_1$. Так как $\varphi_2(x) = 0$ при $h_0 = 0$, то считаем $h_0 > 0$, а, значит, $t \ge 2/3$. Из (27) легко видеть, что $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial h_2^2}(x) \ge 0$, поэтому максимум $\varphi_2(x)$ достигается либо при $h_2 = 0$, либо при $h_2 = H$. Полагая $\psi_2(t,z,y,v) = \varphi_2(x)/H$, имеем

$$\psi_2(t,z,y,1) - \psi_2(t,z,y,0) =$$

$$= \frac{zt^2}{6(z+y)}\left[1 - \frac{2(3z(1-t)+y-z)^2}{(y+z)(1+y+z)}\right] = \tilde{\psi}_2(t,z,y).$$

Учитывая, что $3z(1-t)+y-z \le y \le z$, получаем $\tilde{\psi}_2(t,z,y) \ge$ ≥ 0, т.е. максимум ψ_2 достигается при $v = 1$. С помощью численных расчетов на ЭВМ было установлено, что максимум ψ_2 по остальным переменным достигается при $y = z = 1$. Так как

$\psi_2(t,1,1,1) = (t^4-4t^3+3t^2+2t-1)/2$ и $\dfrac{d\psi_2}{dt}(t,1,1,1) =$
$= (1-t^3)+3t(1-t)^2 \geq 0$, то $\psi_2(t,z,y,v) \leq \psi_2(1,1,1,1) =$
$= 1/2$.

Мы показали, что на всем отрезке $[a,b]$ точная константа $K_1 = 1/2$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы видно, что константы K_0 и K_1 достигаются на равномерной сетке.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. ОВЧИННИКОВА Т.Э. Точные оценки погрешности приближения локальной аппроксимации кубическими сплайнами. Простейшая формула //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск. - 1987.-Вып,121: Вычислительные системы. - С. 55-65.

3. Де БОР К. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 октября 1988 года