А П П Р О К С И М А Ц И Я   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)
1988 год   Выпуск 128

УДК 519.651

ОЦЕНКИ ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНОВ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ КУБИЧЕСКИХ КВАЗИИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ

В.А. Желудев

В [1] рассматривались локальные сплайны дефекта 1 на равномерной сетке с шагом h, которые аппроксимируют функции и их производные с максимально возможным порядком по h. В частности, кубические сплайны аппроксимируют $f^{(s)}$ с точностью $O(h^4)$, если f – достаточно гладкая функция. Кроме того, в [1] построены так называемые квазиинтерполяционные сплайны третьей степени, которые в узлах сплайна аппроксимируют $f^{(s)}$ с точностью $O(h^6)$ (т.е. на два порядка больше, чем в остальных точках), и получены асимптотические формулы по степеням h для остаточного члена аппроксимации $f^{(s)}$. Представляет интерес сравнение аппроксимационных свойств квазиинтерполяционных сплайнов со свойствами интерполяционных, а также локальных сплайнов минимального шаблона, обеспечивающих точность аппроксимации $O(h^4)$. С этой целью в настоящей работе получены точные оценки остаточного члена аппроксимации $f^{(s)}$, $s = 0,1,2$. Сравнение с известными оценками для интерполяционных сплайнов показывает, что квазиинтерполяционные сплайны обеспечивают качество аппроксимации, весьма близкое к тому, которое получается при использовании кубических сплайнов, интерполирующих $f^{(s)}$ и построенных по сеточным значениям $f^{(s)}$. Получено также явное представление остаточного члена в узлах сплайна. Отметим, что значения сплайна в узлах дают разностную аппроксимацию производных весьма высокой точности.

1. Определения

Пусть на оси $(-\infty,\infty)$ задана равномерная сетка с шагом h : $\Delta=\{t_k=hk\}_{-\infty}^{\infty}$. Мы будем изучать локальные сплайны $S(f,t)$ дефекта 1, построенные на сетке Δ по значениям функции f. Предположим, что для вычисления значения $S(f,t)$ в точке t требуются значения $\{f_k=f(t_k)\}_{k=r}^{s}$. Тогда множество $\{t_k\}_{k=r}^{s}$ будем называть шаблоном сплайна $S(f,t)$. В работе изучается локальное поведение сплайнов при $t\in[t_k, t_{k+1}]$. Мы считаем, что функция f задана на таком интервале $[a,b]$, который содержит шаблон сплайна при $t\in[t_k, t_{k+1}]$. Обозначим $f_k^p=f(t_k+ph/2)$, $t_+=\max(0,t)$. Как обычно, C_r - пространство функций f с непрерывной на $[a,b]$ производной $f^{(r)}$; W_∞^r - пространство функций f, таких, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}$ ограничена в существенном на $[a,b]$; норма $\|f\|=\|f\|_\infty=$ $=\operatorname{ess}\sup f(t)$, $t\in[a,b]$.

Функция

$$b_h(t)=\nabla_h^4\left(\frac{t_+^3}{6}\right)=\frac{h^{-4}}{6}\cdot\sum_{k=0}^{4}(-1)^k(t-hk)_+^3$$

называется кубическим B-сплайном на сетке Δ. Всякий кубический сплайн $S(f,t)$ дефекта 1 может быть записан как линейная комбинация B-сплайнов:

$$S(f,t)=h\sum_{k=n-3}^{n}\varphi_k(f)b_h(t-kh),\quad t\in[t_n,t_{n+1}],\tag{1}$$

где $\varphi_k(f)$ - линейные функционалы. Если $\varphi_k(f)$ - линейная комбинация из конечного числа r значений f_s для каждого

k , то сплайн $S(f,t)$ называется локальным. Будем обозначать $R(g,S(f),t) = g(t)-S(f,t)$ остаточный член аппроксимации функции $g(t)$ сплайном $S(f,t)$.

2. Предварительные сведения

Хорошо известно (см., например, [2]), что для кубических сплайнов максимальный порядок аппроксимации $R(f^{(s)},S(f),t) = O(h^4)$, если $f \in W_\infty^{4+s}$. Этого порядка аппроксимации можно достичь, например, если использовать в качестве аппроксиманта производную порядка s , $s = 0,1,\ldots$, от нелокального интерполяционного сплайна степени $3+s$. Но такого же порядка можно достичь, используя локальные сплайны. При этом минимально необходимый шаблон состоит из $6+s$ точек t_k .Сплайны с таким шаблоном, реализующие порядок аппроксимации $O(h^4)$, будем называть сплайнами минимального шаблона и обозначать символом $S_2^s(f,t)$. В [3] получена общая формула для построения таких сплайнов

$$S_2^s(f,t) = h \sum_{k=n-3}^{n} \varphi_{2,k}^s b_h(t-hk), \quad t \in [t_n, t_{n+1}],$$

$$\varphi_{2,k}^s = \nabla_h^s \left(\frac{16+s}{12} f_k^{4+s} - \frac{s+4}{24} \left(f_{k-1}^{4+s} + f_{k+1}^{4+s} \right) \right),$$

а в [1] приведено асимптотическое разложение остаточного члена $R(f^{(s)},S_2^s(f),t)$ по степеням h для достаточно гладких f .

В [2] для $f \in W_\infty^4$ установлена оценка

$$|R(f,S_2^0(f),t)| \le \varkappa_2^0 h^4 \|f^{(4)}\|, \ \varkappa_2^0 = \frac{35}{1152} \simeq 3.04 \cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

В [4] показано, что оценка (2) не улучшаема в классе функций W_∞^4 . Для сравнения приведем неулучшаемую оценку [2,5] для периодических интерполяционных сплайнов

$$|R(f,S_I(f),t)| \le \varkappa_I h^4 \|f^{(4)}\|, \quad \varkappa_I = \frac{5}{384} \simeq 1.3\cdot 10^{-2}. \quad (3)$$

Используя результаты работы [1], можно получить точные оценки для локальных сплайнов, аппроксимирующих производные $f^{(s)}$, если $f \in W_\infty^{4+s}$:

$$| R(f^{(s)},S_2^s(f),t) | \le \varkappa_2^s h^4 \| f^{(4+s)}\|,$$

$$\varkappa_2^s = \frac{5s^2+62s+175}{5760}. \quad (4)$$

В частности, $\varkappa_2^1 = \frac{121}{2880} \simeq 4.2\cdot 10^{-2}$, $\varkappa_2^2 = \frac{319}{5760} \simeq 5.54\cdot 10^{-2}$.

В узлах сплайна

$$\left.\begin{aligned} &|R(f^{(s)},S_2^s(f),t_n)| \le \varkappa_{2,1}^s h^4 \| f^{(4+s)}\|,\\ &\varkappa_{2,1}^0 = \frac{1}{36} \simeq 2.78\cdot 10^{-2},\\ &\varkappa_{2,1}^1 = \frac{227}{5760} \simeq 3.94\cdot 10^{-2},\\ &\varkappa_{2,1}^2 = \frac{19}{360} \simeq 5.28\cdot 10^{-2}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Вывод этих формул будет изложен в одной из ближайших статей автора.

3. Квазиинтерполяционные сплайны

Локальные сплайны вида

$$S_q^s(f,t) = h \sum_{k=n-3}^{n} \varphi_{q,k}^s b_h(t-kh),$$

$$\varphi_{q,k}^s = \nabla_h^s \Big(\frac{5s^2+142s+1440}{960} f_k^{4+s} - \frac{5s^2+122s+400}{1440}(f_{k-1}^{4+s} + \quad (6)$$

$$+ f^{4+s}_{k+1}\Big) + \frac{5s^2+62s+160}{5760}\left(f^{4+s}_{k-2} + f^{4+s}_{k+2}\right)\Big)$$

будем называть квазиинтерполяционным [1]. Пусть $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Обозначим $\tau = (t-t_n)/h$, $\theta^2 = \tau(1-\tau)$, $\chi = \tau - 0{,}5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. *Если* $f \in W^{6+s}_{\infty}$, *то справедливо асимптотическое представление*

$$S^s_q(f,t) = f^{(s)}(t) - \frac{h^4\theta^4}{24} f^{(4+s)}(t) +$$

$$+ \frac{h^5}{30}\theta^2\chi(\theta^2 + \tfrac{1}{3}) f^{(5+s)}(t) + O(h^6 \| f^{(6+s)} \|). \qquad (7)$$

Отсюда видно, что квазиинтерполяционный сплайн $S^s_q(f,t)$ аппроксимирует $f^{(s)}$ на интервале (t_n, t_{n+1}) с точностью $O(h^4)$, а в узлах сплайна $(t = t_n,\ \tau = 0)$ с точностью $O(h^6)$. Из формулы (7) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Сплайн* $S^s_q(f,t)$ *точно воспроизводит производную* $P^{(s)}_{3+s}(t)$ *многочленов степени* $3+s$ *и интерполирует в узлах сплайна производную* $P^{(s)}_{5+s}(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Шаблон сплайна $S^s_q(f,t)$ состоит из $8+s$ точек t_k.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Коэффициенты при B-сплайнах в формуле (6) могут быть представлены в виде

$$\varphi^s_{q,k} = \sum_{j=-2-s/2}^{2+s/2} \beta_j f(h(k+2+j)), \quad \beta_j = (-1)^s \beta_{-j}. \qquad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $s = 0$ сплайн S^0_q был построен в [6, 7], однако его аппроксимационные свойства не исследовались.

4. Ядра Пеано

Пусть функция $f \in W_\infty^{r+s+1}$, $S_q^s(f,t)$ - квазиинтерполяционный сплайн, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. По формуле Тейлора

$$f(t) = P_{r+s}(t) + \frac{1}{(r+s)!}\int_a^b (t-u)_+^{r+s} f^{(r+s+1)}(u)du, \quad (9)$$

где $P_q(t)$ - многочлен степени q . Отсюда

$$P_{r+s}^{(s)}(t) = f^{(s)}(t) - \frac{1}{r!}\int_a^b (t-u)_+^r f^{(r+s+1)}(u)du. \quad (10)$$

Если $r = 3$, то в силу предложения 2 из (9), (10) имеем

$$S_q^s(f,t) = P_{3+s}^{(s)}(t) + \frac{1}{(3+s)!}\int_a^b S_q^s((t-u)_+^{3+s}, t) f^{(4+s)}(u)du =$$

$$= f^{(s)} - \int_a^b K_s^3(t,u) f^{(4+s)}(u)du.$$

Функция

$$K_s^r(t,u) = \frac{1}{r!}(t-u)_+^r - \frac{1}{(r+s)!} S_q^s((t-u)_+^{r+s}, t) \quad (11)$$

называется ядром Пеано. Таким образом,

$$R(f^{(s)}, S_q^s(f), t) = \int_a^b K_s^3(t,u) f^{(4+s)}(u)du . \quad (12)$$

Если $r = 5$, то

$$R(f^{(s)}, S_q^s(f), t) = P_{5+s}^{(s)}(t) - S_q^s(P_{5+s}, t) +$$

$$+ \int_a^b K_s^5(t,u) f^{(6+s)}(u)du.$$

В силу предложения 2, в узлах сплайна для $f \in W_{\infty}^{6+s}$ имеем

$$R(f^{(s)}, S_q^s(f), t_n) = \int_a^b K_s^5(t_n, u) f^{(6+s)}(u)\,du. \quad (13)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливы равенства*

$$K_s^3(t,u) = -\frac{1}{(3+s)!} S_q^s((t-u)_+^{3+s}, t), \quad u > t, \quad (14)$$

$$K_s^3(t,u) = \frac{(-1)^{s+1}}{(3+s)!} S_q^s((u-t)_+^{3+s}, t), \quad u < t. \quad (15)$$

Формула (14) следует из (11), а (15) вытекает из тождества

$$(t-u)_+^m = (t-u)^m + (-1)^{m+1}(u-t)_+^m .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть* $t = h(n+\tau)$, $t' = h(n+1-\tau)$, $u = h(n+v)$, $u' = h(n+1-v)$. *Тогда*

1) $K_s^3(t,u) = K_s^3(t+mh, u+mh)$ *для любого целого* m;

2) $K_s^3(t,u) = K_s^3(t', u')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u > t$. Используя (8), (14), имеем

$$K_s^3(t,u) =$$

$$= \frac{-h}{(3+s)!} \sum_{k=n-3}^{n} b_h(t-hk) \sum_{j=-2-s/2}^{2+s/2} \beta_j (h(k+2+j)-u)_+^{3+s} =$$

$$= \frac{-h}{(3+s)!} \sum_{\nu=-3}^{0} b_h(h(\tau-\nu)) \sum_{j=-2-s/2}^{2+s/2} \beta_j (h(\nu+j+2-v))_+^{3+s},$$

откуда следует утверждение 1. Очевидно, $u' < t'$ при $u > t$.

Поэтому согласно (15) получаем

$$K_s^3(t', u') = \frac{(-1)^{s+1}}{(3+s)!} S_q^s((u'-t')_+^{3+s}, t') =$$

$$= \frac{h(-1)^{s+1}}{(3+s)!} \sum_{\nu=-3}^{0} b_h(h(1-\tau-\nu)) \times$$

$$\times \sum_{j=-2-s/2}^{2+s/2} \beta_j (h(-1-v-\nu-j))_+^{3+s} .$$

Сделав теперь замену индексов суммирования $\nu = -\mu-3$, $j = -k$, а также учитывая (8) и свойство симметрии B-сплайнов $b_h(t) = b_h(4h-t)$, имеем

$$K_s^3(t',u') = \frac{h(-1)^{s+1}}{(3+s)!} \sum_{\mu=-3}^{0} b_h(h(4-(\tau-\mu))) \times$$

$$\times \sum_{k=-2-s/2}^{2+s/2} \beta_{-k} (h(\mu+k+2-v))_+^{3+s} = K_s^3(t,u) ,$$

что и требовалось показать.

Предложение 4 позволяет проводить исследование функций $K_s^3(t,u)$ только при $u > t$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Обозначим

$$k_s(t) = h^{-4} \int_a^b |K_s^3(t,u)| du ,$$

$$\varkappa_q^s = \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} k_s(t) .$$

Из предложения 4 легко видеть, что функции $k_s(t)$ симметричны относительно точки $(t_n + t_{n+1})/2$.

Очевидны оценки

$$|R(f^{(s)}, S_q^s(f), t)| \le h^4 k_s(t) \|f^{(4+s)}\| \le h^4 \varkappa_q^s \|f^{(4+s)}\| . \quad (16)$$

С целью вычисления постоянных $\varkappa_q^s$ рассмотрим отдельно каждый из случаев $s = 0,1,2$.

а) $s = 0$. В соответствии с формулой (6), имеем

$$S_q^0(f,t) = \frac{1}{216} \sum_{i=-3}^{4} f_{n+i} Q_i(\tau), \quad t = h(n+\tau),$$

$$Q_i(\tau) = \sum_{k=0}^{3} a_k (4-i-k+\tau)_+^3, \quad i = 1,\dots,4,$$

$$Q_{-i+1}(\tau) = Q_i(1-\tau), a_0 = 1, \ a_1 = -14, \ a_2 = 100, a_3 = -290.$$

При $u > t$ в соответствии с предложением 3

$$K_0^3(t,u) = \frac{-1}{6} S_q^0((t-u)_+^3, t) = \frac{-h^3}{1296} \sum_{i=1}^{4} (i-v)_+^3 Q_i(\tau). \qquad (17)$$

Из этого выражения нетрудно усмотреть, что величины $k_0(t)$, $\varkappa_q^0$ не зависят ни от h, ни от n. То же можно сказать и о $k_s(t), \varkappa_q^s$ при $s = 1,2$. Поэтому при рассмотрении ядер Пеано мы будем считать $h = 1, n = 0$. Тогда

$$K_0^3(t,u) = -\frac{1}{1296} \sum_{i=1}^{4} (i-u)_+^3 Q_i(t).$$

Расчеты, проведенные при помощи ЭВМ, показали, что при каждом $t \in [0,1]$ функция $K_0^3(t,u)$ имеет два простых корня $u_1(t) > t$, $u_2(t) < t$ (при $u \notin (-3,4)$ $K_0^3(t,u) \equiv 0$). Учитывая это, на ЭВМ было проведено вычисление значений функции $k_0(t)$ при различных значениях $t \in [0,1]$. В результате удалось установить, что функция $k_0(t)$ достигает наибольшего значения в точке $t = 1/2$. Поэтому $\varkappa_q^0 = k_0(0.5) \cong$ $\cong 1.6088088 \cdot 10^{-2}$, причем $u_1(0.5) \cong 1.0903385$, $u_2(0.5) \cong$ $\cong -9.03385 \cdot 10^{-2}$.

Обозначим

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [u_2(0.5), u_1(0.5)], \\ -1 & \text{при} \quad t \notin [u_2(0.5), u_1(0.5)]; \end{cases}$$

$$\Phi_0(t)=\frac{1}{6}\int_{-3}^{t}(t-x)^3\varphi_0(x)dx, \quad \Phi_0^{(4)}(t)=\varphi_0(t).$$

Тогда, как легко видеть, $\Phi_0(0.5)-S_q^0(\Phi_0,0.5)=k_0(0.5)=\varkappa_q^0$. Отсюда вытекает, что неравенство (16) при $s=0$ дает точную оценку остаточного члена аппроксимации функции $f\in W_\infty^4$ сплайном $S_q^0(f,t)$. При $t=0,1$, т.е. в узлах сплайна, величина $k_0(t)$ достигает минимального значения $k_0(0)=k_0(1)\cong 0.8519\cdot 10^{-2}$. Таким образом, если $f\in W_\infty^4$, то

$$|f(t_n)-S_q^0(f,t_n)|\le k_0(0)h^4\|f^{(4)}\|.$$

Пусть теперь $f\in C_6$. Тогда, согласно формуле (13),

$$R(f,S_q^0(f),0)=\int_{-3}^{3}K_0^5(0,u)f^{(6)}(u)du.$$

Рассмотрим $K_0^5(0,u)$. При $u>0$

$$K_0^5(0,u)=-\frac{1}{5!}S_q^0((t-u)_+^5,0)=\frac{-1}{25920}\sum_{i=1}^{4}(i-u)_+^5Q_i(0)=$$

$$=\frac{-1}{25920}\,(15(1-u)_+^5-6(2-u)_+^5+(3-u)_+^5)\le 0.$$

Аналогично можно убедиться в том, что $K_0^5(0,u)\le 0$ при $u<0$. Отсюда следует, что

$$\int_{-3}^{3}|K_0^5(0,u)|du=-\int_{-3}^{3}K_0^5(0,u)du=\frac{1}{216}\simeq 4,6\cdot 10^{-3}.$$

Ввиду знакопостоянства $K_0^5(0,u)$ по теореме о среднем

$$R(f,S_q^0(f),t_n)=\frac{-h^6}{216}\,f^{(6)}(\xi),\quad \xi\in[t_{n-3},t_{n+3}].$$

б) $s=1$. Сплайн, квазиинтерполирующий f', задается формулой

$$S_q^1(f,t)=\frac{h^{-1}}{34560}\sum_{i=-4}^{5} f_{n+i-0{,}5}\,L_i(\tau),\quad t=h(n+\tau),$$

где

$$L_i(\tau)=\sum_{k=1}^{5} a_k(5-i-k+\tau)_+^3,\quad i=1,\dots,5,$$

$$L_{-i+1}(\tau)=L_i(1-\tau),$$

$a_1=227,\quad a_2=-3243,\quad a_3=22332,$

$a_4=-73068,\quad a_5=128202.$

Как и ранее, считаем $n=0$, $h=1$. При $u>t$

$$K_1(t,u)=\frac{-1}{24}\,S_q^1((t-u)_+^4,t)=$$

$$=\frac{-1}{829440}\sum_{i=1}^{5}(i-0{,}5-u)_+^4 L_i(t).$$

Так же, как и для функции $K_0^3(t,u)$, установлено, что $K_1^3(t,u)$ имеет два простых корня $u_1(t)>t$, $u_2(t)<t$ при каждом $t\in[0,1]$. Функция $k_1(t)$ достигает наибольшего значения при $t=0.5$. При этом $u_1(0.5)\simeq 1.1695994$, $u_2(0.5)\simeq -0.1695994$, $\varkappa_q^1=k_1(0.5)\simeq 1.930918\cdot 10^{-2}$. Рассуждая так же, как и при $s=0$, можно показать, что неравенство (16) дает в случае $s=1$ точную оценку остаточного члена аппроксимации производной f' сплайном $S_q^1(f,t)$ при $f\in W_\infty^5$. Оценим теперь остаточный член в узлах сплайна. Как и в случае $s=0$, $k_1(t)$ достигает в точках $t=0,1$ своего

минимального значения $k_1(0) \simeq 1.2469304\cdot 10^{-2}$. Если $f\in C_7$, то аналогично случаю $s = 0$ получаем при $u > 0$

$$K_1^5(0,u) = \frac{-1}{6!} S_q^1((t-u)_+^6, 0) =$$

$$= \frac{-1}{24883200} \sum_{i=1}^{4} (i-0,5-u)_+^6 L_i(0) \le 0 .$$

Это неравенство верно и при $u < 0$. Поэтому

$$R(f', S_q^1(f), t_n) = \int_{h(n-3,5)}^{h(n+3,5)} K_1^5(t_n, u) f^{(7)}(u)du =$$

$$= f^{(7)}(\xi) \int_{h(n-3,5)}^{h(n+3,5)} K_1^5(t_n, u)du = -\frac{7031 h^6}{967680} f^{(7)}(\xi),$$

$$\xi\in [h(n-3,5), h(n+3,5)] .$$

Отсюда, принимая во внимание явное выражение для $S_q^1(f, t_n)$, получаем

$$f'(t_n) = \frac{h^{-1}}{34560}[32555 (f_{n+0,5} - f_{n-0,5}) +$$

$$+ 2517 (f_{n+1,5} - f_{n-1,5}) - 1427 (f_{n+2,5} - f_{n-2,5}) +$$

$$+ 227 (f_{n+3,5} - f_{n-3,5})] - \frac{7031 h^6}{967680} f^{(7)}(\xi) . \quad (18)$$

в) $s = 2$. Сплайн, квазиинтерполирующий f'', задается формулой,

$$S_q^2(f, t) = \frac{1}{2160} \sum_{i=-4}^{5} f_{n+i} T_i(\tau) ,$$

где

$$T_i(\tau) = \sum_{k=0}^{4} b_i (5-i-k+\tau)_+^3 , \quad i = 0, 1, \dots, 4 ,$$

$$T_{-i+1}(\tau) = T_i(1-\tau),$$

$b_0 = 19$, $b_1 = -280$, $b_2 = 1935$, $b_3 = -6960$, $b_4 = 14430$.

Полагая $h = 1$, $n = 0$, имеем при $u > t$

$$K_2^3(t,u) = \frac{-1}{120} S_q^2((t-u)_+^5, t) = \frac{-1}{259200} \sum_{i=1}^{5} T_i(t)(i-u)_+^5 .$$

Так же, как и для функций $K_0^3(t,u)$ и $K_1^3(t,u)$, установлено, что $K_2^3(t,u)$ имеет два простых нуля $u_1(t) > t$, $u_2(t) < t$ при каждом $t \in [0,1]$. Функция $k_2(t)$ достигает наибольшего значения при $t = 0.5$. Имеем $u_1(0.5) \simeq 1.2170406$, $u_2(0.5) \simeq -0.2170406$, $\varkappa_q^2 \simeq 2.29846 \cdot 10^{-2}$. Неравенство (16) дает точную оценку остаточного члена аппроксимации производной f'' сплайном $S_q^2(f,t)$ для $f \in W_\infty^6$. Рассмотрим теперь остаточный член в узлах. Как и ранее, $k_2(t)$ минимальна при $t = 0,1$, $k_2(0) \simeq 1.69635 \cdot 10^{-2}$. Если $f \in C_8$, то при $u > 0$

$$K_2^5(0,u) = \frac{-1}{7!} S_q^2((t-u)_+^7, 0) =$$

$$= \frac{-1}{2160 \cdot 7! \cdot 6!} \sum_{i=1}^{4} (i-u)_+^7 T_i(0) \le 0 .$$

Также $K_2^5(0,u) \le 0$ и при $u < 0$. Поэтому

$$R_2(f^{(2)}, S_q^2(f), t_n) =$$

$$= f^{(8)}(\xi) \int_{t_{n-4}}^{t_{n+4}} K_2^5(t_n, u)du = -\frac{h^6}{189} f^{(8)}(\xi),$$

$$\xi \in [t_{n-4}, t_{n+4}],$$

что эквивалентно равенству

$$f''(t_n) = \frac{h^{-2}}{2160}\,(-4550 f_n + 2176\,(f_{n+1}+f_{n-1}) + $$
$$+ 208\,(f_{n+2}+f_{n-2}) - 128\,(f_{n+3}+f_{n-3}) + $$
$$+ 19(f_{n+4}+f_{n-4})) - \frac{h^6}{189} f^{(8)}(\xi)\,. \qquad (19)$$

5. Заключительные замечания

Изложенные выше факты показывают, что квазиинтерполяционные сплайны, построенные на равномерной сетке, обеспечивают высокую точность аппроксимации функций и их производных. Сплайн $S_q^0(f,t)$ аппроксимирует f почти с такой же точностью, что и интерполяционный сплайн дефекта 1 (ср. константы $\varkappa_I$ из формулы (3) и $\varkappa_q^0$). Особый интерес представляют, по мнению автора, сплайны $S_q^s(f,t)$, $s = 1,2$. Эти сплайны построены по сеточным значениям функции f, но, как показывает сравнение констант $\varkappa_q^1$ и $\varkappa_q^2$ с $\varkappa_I$, обеспечивают качество аппроксимации производных f' и f'', близкое к тому, которое может быть получено при использовании сплайнов, интерполирующих сеточные значения f' и f''. Кроме того, из формул (18), (19) видно, что значения сплайнов $S_q^s(f,t_n)$, $s = 1,2$, в узлах дают разностные аппроксимации производных весьма высокой точности. Наконец, сравнение констант $\varkappa_q^s$ с соответствующими константами для сплайнов $S_2^s(f,t)$ говорит о том, что сплайны S_q^s дают существенную прибавку точности по сравнению со сплайном S_2^s.

Литература

1. ЖЕЛУДЕВ В.А. Локальные квазиинтерполяционные сплайны и преобразования Фурье //Докл. АН СССР 1985.-Т.282, №6. -С.1293-1298.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

3. ЖЕЛУДЕВ В.А. Асимптотические формулы для локальной сплайн-аппроксимации на равномерной сетке //Докл. АН СССР. - 1983. - Т. 269, № 4. - С. 797-802.

4. КОРНЕЙЧУК Н.П. О приближении локальными сплайнами минимального дефекта //Укр. матем. журн. - 1982. - Т. 34, № 5. - С. 617-621.

5. КОРНЕЙЧУК Н.П. Сплайны в теории приближения. - М.: Наука, 1984. - 352 с.

6. ЛИГУН А.А. О приближении дифференцируемых периодических функций локальными сплайнами минимального дефекта //Укр. матем. журн. - 1981. - Т. 33, № 5. - С. 691-693.

7. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. - М., 1983. - 208 с. (МГУ).

Поступила в ред.-изд.отд.
29 февраля 1988 года