АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 128

УДК 519.65

НЕЯВНО ЗАДАННЫЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ СПЛАЙН-ПОВЕРХНОСТИ

Б.М. Шумилов

Кусочно-многочленные сплайны одной и двух (на регулярных сетках) переменных нашли общее признание как весьма удобный и эффективный аппарат приближения параметрически заданных кривых и поверхностей.

С другой стороны, перспективным при моделировании и отображении графической информации является использование неявного описания поверхности в виде уравнения $f(x,y,z) = 0$. Ранее были известны подходы к составлению такого описания из геометрических примитивов типа сферы, цилиндра, плоскости и других. В статье рассматривается задача построения неявно заданных сплайнов, проходящих через опорные точки пространственной триангуляционной сети, из непрерывно склеенных кусков поверхностей второго порядка, высеченных плоскостями.

§1. Вывод расчетных формул

Пусть в пространстве R^3 заданы точки $r_i=(x_i,y_i,z_i)$, $i = 1,2,\ldots,6$, причем любые три из них не лежат на одной прямой. Следуя методу [1], проведем через точки 1-3 плоскость Π_{123}, удовлетворяющую уравнению

$$p_{123}(r) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

а через точки 4-6 плоскость Π_{456} с уравнением

$$p_{456}(r) = 0, \quad r = (x,y,z). \tag{2}$$

Перемножив выражения (1) и (2), получим уравнение вырожденной поверхности второго порядка, проходящей через точки 1-6: $f_1(r) = p_{123}(r)\cdot p_{456}(r) = 0$. Аналогичным образом из уравнений Π_{345}, Π_{612}, Π_{561}, Π_{234}, Π_{135}, Π_{246} получаем уравнения:

$$f_2(r) = p_{345}(r)p_{612}(r) = 0,$$
$$f_3(r) = p_{561}(r)p_{234}(r) = 0,$$
$$f(r) = p_{135}(r)p_{246}(r) = 0.$$

Составив трехпараметрический пучок поверхностей

$$\varphi(r) = f(r) + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j f_j(r) = 0,$$

приходим к уравнению произвольной поверхности второго порядка, проходящей через точки 1-6.

Введем обозначения:

$$S^x_{ijk} = \begin{vmatrix} y_j - y_i & z_j - z_i \\ y_k - y_i & z_k - z_i \end{vmatrix},$$

$$V_{ijkl} = p_{ikl}(r_j).$$

В точках r_1, r_3 имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(r_1) = S^x_{135}V_{2146} + \lambda_1 S^x_{123}V_{4156} + \lambda_2 S^x_{612}V_{3145} + \lambda_3 S^x_{561}V_{2134},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(r_3) = S^x_{135}V_{2346} + \lambda_1 S^x_{123}V_{4356} + \lambda_2 S^x_{345}V_{6312} + \lambda_3 S^x_{234}V_{5361}.$$

Производные по y и по z записываются аналогично. Теперь из параметрического задания плоскости Π_{123} в виде $r(u,v) = (r_3-r_1)u+(r_2-r_1)v+r_1$ вытекает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(r_1) = \lambda_2 V_{6312}V_{3145}+\lambda_3 V_{5361}V_{2134},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(r_1) = V_{1235}V_{2146}+\lambda_3 V_{5261}V_{2134};$$

а из $r(t,w)=(r_1-r_3)t+(r_2-r_3)w+r_3$ следует

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r_3) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(r_1),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w}(r_3) = V_{1235}V_{2346}+\lambda_2 V_{3245}V_{6312}.$$

Добавим к заданным шести точкам еще три точки r_7, r_8, r_9 и составим трехпараметрическое уравнение произвольной поверхности второго порядка, проходящей через точки 1-3, 7-9;

$$\varphi_1(r)= p_{318}(r)p_{297}(r)+\mu_1 p_{321}(r)p_{987}(r)+$$
$$+\mu_2 p_{198}(r)p_{732}(r)+\mu_3 p_{873}(r)p_{219}(r)=0.$$

В этом случае

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(r_1) = S^x_{318}V_{2197}+\mu_1 S^x_{321}V_{9187}+$$
$$+\mu_2 S^x_{198}V_{7132}+\mu_3 S^x_{219}V_{8173},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(r_1) = \mu_2 V_{1398}V_{7132}+\mu_3 V_{2319}V_{8173},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(r_1) = V_{3218}V_{2197}+\mu_2 V_{1298}V_{7132},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(r_3) = S^x_{318}V_{2397} + \mu_1 S^x_{321}V_{9387} +$$

$$+ \mu_2 S^x_{732}V_{1398} + \mu_3 S^x_{873}V_{2319},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(r_3) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(r_1),$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}(r_3) = V_{3218}V_{2397} + \mu_3 V_{8273}V_{2319}.$$

Задача состоит в отыскании таких значений параметров λ_j, μ_j, чтобы кривые второго порядка, получаемые при пересечении поверхностей $\varphi(r)=0$, $\varphi_1(r)=0$ плоскостью Π_{123}, совпадали. Для этого достаточно, чтобы касательные к кривым в точках r_1, r_3 были параллельны, т.е. должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}(r_1)}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(r_1)} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}(r_1)}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(r_1)} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial w}(r_3)}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}(r_3)}.$$

С учетом полученных выше соотношений для частных производных имеем

$$\frac{V_{1235}V_{2146} + \lambda_3 V_{5261}V_{2134}}{V_{3218}V_{2197} + \mu_2 V_{1298}V_{7132}} =$$

$$= \frac{V_{1235}V_{2346} + \lambda_2 V_{3245}V_{6312}}{V_{3218}V_{2397} + \mu_3 V_{8273}V_{3219}} =$$

$$= \frac{\lambda_2 V_{6312} V_{3145} + \lambda_3 V_{5361} V_{2134}}{\mu_2 V_{1398} V_{7132} + \mu_3 V_{2319} V_{8173}}. \qquad (3)$$

Недостающие уравнения для определения значений параметров λ_j, μ_j могут быть взяты в виде условий параллельности каса - тельных в точках r_3, r_5, r_1, r_8 в плоскостях Π_{345}, Π_{561}, Π_{198}, Π_{873} соответственно заданным направлениям:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda_3 V_{2534} V_{5361} + \lambda_1 V_{1523} V_{4356})ck\varphi_1 + \\
&\quad + (V_{3451} V_{4362} + \lambda_1 V_{1423} V_{4356})sk\varphi_1 = 0, \\
&(\lambda_1 V_{4156} V_{1523} + \lambda_2 V_{3145} V_{6512})ck\varphi_2 + \\
&\quad + (V_{5613} V_{6524} + \lambda_2 V_{3645} V_{6512})sk\varphi_2 = 0, \\
&(\mu_3 V_{2819} V_{8173} + \mu_1 V_{3821} V_{9187})ck\varphi_3 + \\
&\quad + (V_{1983} V_{9172} + \mu_1 V_{9187} V_{3921})sk\varphi_3 = 0, \\
&(\mu_1 V_{9387} V_{3821} + \mu_2 V_{1398} V_{7832})ck\varphi_4 + \\
&\quad + (V_{8731} V_{7829} + \mu_2 V_{7832} V_{1798})sk\varphi_4 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь $ck\varphi_i$, $sk\varphi_i$, $i = 1,\ldots,4$, - направляющие косинусы заданного направления в косоугольной системе координат (u, v), связанные между собой теоремой косинусов [2]. В частности, для плоскости Π_{345} имеем

$$ck\varphi_1 = \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{tg\,\beta}, \qquad sk\varphi_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

где α - угол между заданным направлением и направлением вектора $\overrightarrow{r_3 r_5}$, β - угол между векторами $\overrightarrow{r_3 r_5}$, $\overrightarrow{r_3 r_4}$.

Отметим, что более практичным было бы выписать условия параболичности кривых, получаемых в плоскостях Π_{345}, Π_{561},

Π_{198}, Π_{873}, однако это усиливает нелинейность задачи отыскания значений параметров λ_j, μ_j.

§2. Числовой пример

Пусть квадрат с вершинами (±1, ±1) в плоскости (x, y) поделен на два треугольника диагональю, проходящей в "северо-западном" направлении. Опорные точки вычисляются по значениям в вершинах и серединах сторон треугольников функции $z = f(x,y) = x^2y^2$ (см. табл.). Угол β равен $\pi/4$,

$$tg\alpha = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 2;$$

направляющие косинусы равны

$$ck\varphi_i = c = -0.447,$$
$$sk\varphi_i = s = 1.265,$$
$$i = 1,\dots,4.$$

Таблица

i	x_i	y_i	z_i
1	−1	1	1
2	0	0	0
3	1	−1	1
4	1	0	0
5	1	1	1
6	0	1	0
7	0	−1	0
8	−1	−1	1
9	−1	0	0

Тогда система уравнений для определения параметров λ_j, μ_j приобретает вид:

$$\frac{1-\lambda_3}{1-\mu_2} = \frac{1-\lambda_2}{1-\mu_3} = \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\mu_2+\mu_3},$$

$$2c\lambda_3 + (2c+s)\lambda_1 + s = 0,$$
$$2c\lambda_1 + (2c+s)\lambda_2 + s = 0,$$
$$2c\mu_3 + (2c+s)\mu_1 + s = 0,$$
$$2c\mu_1 + (2c+s)\mu_2 + s = 0.$$

Исследование показывает, что полученная система уравнений имеет единственное решение $\lambda_j = \mu_j = 2.414$, $j = 1,2,3$. На рис.1 изображен график соответствующих поверхностей $\varphi(r) = 0$,

$\varphi_1(r) = 0$ (каждой над своим треугольником). Видно, что результирующая поверхность состоит из двух поверхностей второго порядка, непрерывно склеенных по плоской кривой второго порядка, и проходит через заданные опорные точки (отмеченные маркерами).

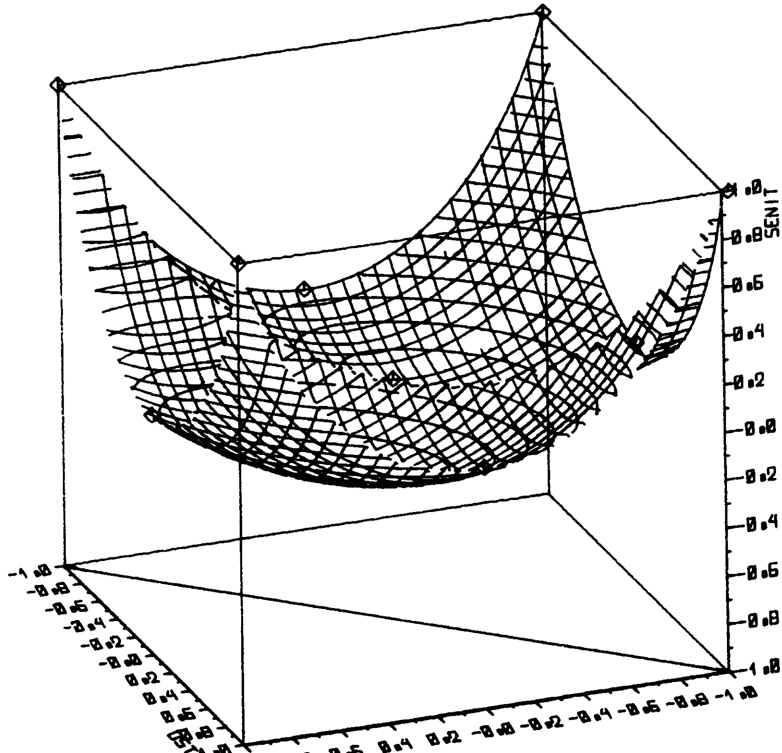

Рис. 1

§3. Применение к моделированию поверхностей

Рассмотренный выше пример интерполяции двумя непрерывно склеенными кусками поверхностей второго порядка по девяти опорным точкам представляет собой частный случай построения неявно заданного квадратического сплайна. В общем случае поверхность, подлежащая интерполяции, разбивается на множество тре -

угольных кусков так, чтобы ни одна из вершин не лежала на какой-либо стороне. Опорные точки помещаются в вершинах триангуляции и по одной на каждой стороне. Тогда уравнения вида (3) обеспечивают непрерывность построенных кусочно-квадратических элементов в плоскостях, проходящих через три опорные точки,лежащие на каждой внутренней стороне триангуляции. Уравнения вида (4) доставляют краевые условия на каждой внешней стороне, требуемые для замыкания полученной системы уравнений для определения параметров λ_j^i (i - номер треугольного куска).Вопросы о разрешимости данной системы и сходимости полученных интерполянтов пока не имеют ответа. Далее затрагиваются вопросы "сборки" отдельных элементов $\varphi^i(r) = 0$ в общую сплайновую поверхность.

Рассмотрим квадратическую поверхность $\varphi(r) = 0$, связанную с опорными точками 1-6. Плоскостями Π_{123}, Π_{345},Π_{561} от нее отсекается треугольный кусок, представляющий в данной области пространства сплайновую поверхность.Поскольку при этом существует опасность появления лишних решений, целесообразно еще отсечь части пространства, расположенные по обе стороны треугольного куска, плоскостями,параллельными плоскости Π_{135}. Для определенности будем полагать, что $\varphi(r) < 0$ внутри тела, ограниченного сплайновой поверхностью, и $\varphi(r) > 0$ - снаружи. Кроме того, будем считать, что плоскости Π_{123}, Π_{345}, Π_{561} ориентированы таким образом, что $p_{123}(r_5) < 0$, $p_{345}(r_1) < 0$, $p_{561}(r_3) < 0$. Тогда элемент объема, ограниченный куском сплайновой поверхности и подстилающими плоскостями, удовлетворяет неравенству

$$G(r) = \max\{\varphi(r), B(r)\} \le 0,$$

где
$$B(r) = \max\{p_{123}(r), p_{345}(r), p_{561}(r), h_1 - p_{135}(r), p_{135}(r) - h_2\}.$$

Здесь константы h_1, h_2 выбраны таким образом, чтобы сплайновая поверхность проходила внутри пятигранного блока $B(r) \leq 0$. Это напоминает конструкции, предложенные в [3,4], где элементы объема формировались на основе тетраэдров и треугольных призм.

Из полученных для каждого номера i элементов $G^i(r) \leq 0$ формируется замкнутый свод, внешняя сторона которого представляет собой искомую сплайновую поверхность. Математически эта процедура записывается неравенством $\min\limits_i G^i(r) \leq 0$. На рис. 2 представлены примеры поверхностей, смоделированных с использованием изложенного метода.

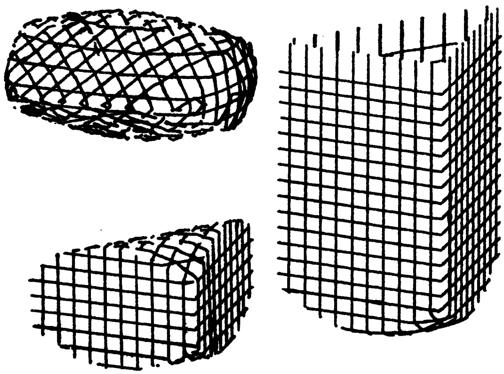

Рис. 2

Для целей машинной графики вычисление координат точек пересечения прослеживаемого луча и поверхности $\varphi^i(r) = 0$ следует производить только в том случае, когда луч протыкает соответствующий блок $B^i(r) \leq 0$ [4]. В случае незамкнутой поверхности решение записывается точно так же, лишь вместо объемного элемента берется поверхностный элемент, отвечающий использованию вместо функции $\varphi^i(r)$ функций $|\varphi^i(r)|^p - \varepsilon$; $p = 1,2$; $\varepsilon \to 0$.

Автор благодарит Грошева А.Р. за полезные обсуждения.

Литература

1. СТАРОДЕТКО Е.А. Элементы вычислительной геометрии. - Минск: Наука и техника, 1986. - 240 с.

2. КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Изд. 4-е. -М.: Наука, 1978. - 832 с.

3. SEDERBERG T.W. Piecewise algebraic surface patches// Computer Aided Geometric Design. - 1985. -Vol. 2, N 1-3.-P.53-59.

4. KAJIVA J.T. New techniques for ray tracing procedurally defined objects //Computer Graphics. - 1983. -Vol.17,N 3. - P. 91-102.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 октября 1987 года