ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1989 год Выпуск 129

УДК 510.25

НЕКОТОРЫЕ СЕМАНТИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЛОГИК СХЕМ ПРОГРАММ

Н.Н.Непейвода

Программные и динамические логики являются одним из наиболее актуальных и быстро развивающихся направлений в современной математической логике. Но в некотором отношении любая программная логика похожа на кентавра: ее язык состоит из логической и алгоритмической компонент,строящихся по совершенно разным законам. Поэтому интересна задача рассмотрения таких логик, в которых язык не содержит явного упоминания о программах, а семантика определяется через реализуемость схемами программ. В свою очередь, исчисления логик схем программ стимулируют развитие семантик алгебр отношений и других математических конструкций, естественно, обобщающих схемы программ. В данной работе исследуются некоторые алгебраические и алгоритмические конструкции, порождаемые рассмотрением конструктивных логик схем программ [1].

§1. Синтаксические вопросы логик схем программ

Начнем с краткого изложения основных исчислений конструктивных логик схем программ и перечня синтаксических теорем об этих исчислениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. <u>Пропозициональная сигнатура</u> $\mathbb{P}$ - непустое разрешимое множество пропозициональных символов.Формулы клас -

сической логики высказываний над $\mathbf{P}$ строятся обычным образом при помощи связок $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\urcorner$. Конструктивная импликация сигнатуры $\mathbf{P}$ - слово $A \Rightarrow B$, где A, B - формулы классической логики высказываний сигнатуры $\mathbf{P}$, A называется условием $A \Rightarrow B$, B - ее обещанием. Альтернативная конструктивная импликация сигнатуры $\mathbf{P}$ - слово вида $A_1 | \dots | A_n \Rightarrow B_1 | \dots | B_k$, где $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_k$ - формулы классической логики высказываний сигнатуры $\mathbf{P}$. Формулы $A_1, \dots, A_n$ называются альтернативными условиями, $A_1 | \dots | A_n \Rightarrow B_1 | \dots | B_k$, $B_1, \dots, B_k$ - ее альтернативными обещаниями, $\mathbf{U}$ - тавтология классической логики, $\mathbf{F}$ - ее противоречие.

В дальнейшем мы, как правило, опускаем упоминания о сигнатуре $\mathbf{P}$, называем альтернативные конструктивные импликации просто альтернативными; через $\Gamma, \Delta, \Gamma_0, \dots$ обозначаем последовательности (возможно, пустые) формул классической логики высказываний, разделенных $|$. Таким образом, альтернативная импликация имеет вид $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ, Δ непусты.

Под теорией в данном исчислении Ω понимается разрешимое (может быть, пустое) множество синтаксических объектов, называемых аксиомами. Вывод в исчислении, как обычно, - дерево, листья которого являются аксиомами нашего исчисления либо рассматриваемой теории Th, каждой вершине поставлено в соответствие наименование правила вывода и синтаксический объект, получающийся применением этого правила к объектам, поставленным в соответствие узлам, непосредственно следующим за данным. Доказанная теорема - объект, отвечающий корню дерева.

Выводимость $\mathbf{F}$ из аксиом Th при помощи исчисления Ω обозначается $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega} \mathbf{F}$.

Теория Th противоречива в смысле Карри (или просто противоречива) в исчислении Ω, если $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega} \mathbf{F}$ для любого синтаксического объекта $\mathbf{F}$. Зафиксируем некоторое полное исчисление для классической логики высказываний (см., например, [2]).

Оно будет входить в качестве подсистемы во все рассматриваемые в данной работе исчисления.

<u>Исчисление</u> Ω_0. Выводимые объекты - формулы классической логики высказываний и конструктивные импликации. Аксиомы Ω_0 : $A \Rightarrow A$, где A - формула классической логики высказываний и ее аксиомы. Правила вывода Ω_0 : modus ponens для формул классической логики высказываний и следующие правила для конструктивных импликаций.

A1. Правило силлогизма: $\dfrac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$.

A2. Правило условного оператора: $\dfrac{A \Rightarrow B \quad C \Rightarrow D}{A \vee C \Rightarrow B \vee D}$.

A3. Правило замены условий и обещаний (правило релаксации):

$$\frac{A \supset B \quad B \Rightarrow C \quad C \supset D}{A \Rightarrow D}.$$

A4. Правило исключенного чуда: $\dfrac{A \Rightarrow F}{\neg A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если* $A \Rightarrow B$ *выводима в исчислении* Ω_0 *из аксиом теории* Th, *то она выводима в* Ω_0 *из аксиом* Th *без помощи A4.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Теория* Th *противоречива в* Ω_0 *тогда и только тогда, когда* $Th \vdash_{\Omega_0} U \Rightarrow F$.

Дескриптивизация конструктивной импликации $A \Rightarrow B$ - формула классической логики высказываний $A \supset B$, формулы классической логики высказываний A - сама A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если* $Th \vdash_{\Omega_0} F$, *то дескриптивизация* F *выводима в классической логике высказываний из дескриптивизации аксиом* Th.

Таким образом, Th согласуется с классической логикой.

<u>Исчисление</u> Ω_1 . Синтаксические объекты и классическая подсистема - те же, что и в Ω_0 . Конструктивных аксиом нет. Конструктивные правила вывода следующие:

B1. Правило условного оператора совпадает с A2.

B2. Правило замены условий и обещаний совпадает с A3.

B3. Правило зацикливания: $\dfrac{A \vee B \Rightarrow A \vee C}{B \Rightarrow C}$.

B4. Правило бесконечного цикла: $\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A}$.

B5. Правило ошибки: $\dfrac{\neg A}{A \Rightarrow A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Правило силлогизма допустимо в* Ω_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если* $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} A \Rightarrow B$, *то* $A \Rightarrow B$ *выводимо из* Th *без использования правила бесконечного цикла.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Противоречивость* Th *в* Ω_1 *эквивалентна каждому из следующих утверждений:*

i) $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} U \Rightarrow U$;

ii) *есть такое* A , *что* $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} A$ *и* $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} \neg A$;

iii) $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} A \Rightarrow B$ *и* $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} A \Rightarrow B$.

Очевидно, что обобщенное правило условного оператора $A_2^!$

$$\frac{A_1 \Rightarrow B_1 \ \ldots \ A_n \Rightarrow B_n}{A_1 \vee \ldots \vee A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n}$$

допустимо в Ω_1 . В расширенной системе $\Omega_1^!$ выполнено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Каждый вывод* $A \Rightarrow B$ *в* Ω_1 *может быть перестроен в вывод следующей стандартной формы в* $\Omega_1^!$:

$$\frac{\dfrac{A \vee C \supset A_1 \vee \ldots \vee A_n \quad \dfrac{A_1 \Rightarrow B_1 \ldots A_n \Rightarrow B_n}{A_1 \vee \ldots \vee A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n} \quad B_1 \vee \ldots \vee B_n \supset B \vee C}{A \vee C \Rightarrow B \vee C}}{A \Rightarrow C},$$

где $A_1 \Rightarrow B_1$ *- либо аксиомы* Th *, либо заключения правил ошибки, а выводы формул классической логики высказываний* $\neg A,\ A \vee C \supset A_1 \vee \ldots \vee A_n,\ B_1 \vee \ldots \vee B_n \supset B \vee C$ *приводятся в классической логике высказываний.*

<u>Исчисление</u> Ω_4 . Синтаксические объекты - формулы классической логики высказываний, альтернативные импликации и слова вида A , где A называются <u>отвергаемыми формулами</u> классической логики высказываний. Классическая подсистема, как в Ω_0 . Дополнительных аксиом нет, дополнительные правила вывода следующие:

C1. Правило соединения альтернатив: $\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1 | \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 | \Delta_2}$.

C2. Правило зацикливания: $\dfrac{A | B | \Gamma \Rightarrow A | C | \Delta}{B | \Gamma \Rightarrow C | \Delta}$.

C3. Правила перестановки:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1 | A | B | \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1 | B | A | \Delta_2}, \qquad \frac{\Gamma_1 | A | B | \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1 | \quad | \quad | \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}.$$

C4. Правила ослабления:

$$\frac{A | B | \Gamma \Rightarrow \Delta}{B | \Gamma \Rightarrow \Delta}, \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta | A}, \quad \frac{A | \Gamma \Rightarrow \Delta}{A | A | \Gamma \Rightarrow \Delta}, \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta | A | A}{\Gamma \Rightarrow \Delta | A}.$$

C5. Правила замены условий:

$$\frac{A \supset A_1 \qquad A_1 | \Gamma \Rightarrow \Delta}{A | \Gamma \Rightarrow \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta | B_1 \qquad B \supset B_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta | B}.$$

C6. Правило бесконечного цикла: $\dfrac{A \Rightarrow A}{\# A}$.

C7. Правило ошибки: $\dfrac{\# A}{A \Rightarrow A}$.

C8. Правила отвержения: $\dfrac{A \supset B \quad \# B}{\# A}$, $\dfrac{\urcorner A}{\# A}$, $\dfrac{A \quad \# A}{B}$.

Синтаксические свойства Ω_4 аналогичны свойствам Ω_1, но $A \Rightarrow B$ и $\urcorner A \Rightarrow C$ здесь уже не образуют противоречия.

Исчисление Ω_5. Аналогично Ω_1, с заменой правила бесконечного цикла на правило бесконечного спуска со счетным множеством посылок:

B4'. Правило бесконечного спуска:

$$\frac{A_0 \Rightarrow A_1 \quad A_1 \Rightarrow A_2 \ldots A_n \Rightarrow A_{n+1}}{\urcorner A}.$$

Исчисление Ω_5 аналогично по своим свойствам Ω_1, но правило бесконечного спуска уже неустранимо из выводов конструктивных импликаций, и, соответственно, в нормальной форме вывода конструктивные импликации могут встречаться в выводах классических формул.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если сигнатура* $\mathbf{P}$ *конечна, то* $Th \vdash_{\Omega_5} A \Rightarrow B$ *тогда и только тогда, когда* $Th \vdash_{\Omega_1} A \Rightarrow B$.

Очевидно, что правило бесконечного цикла является частным случаем правила бесконечного спуска.

Исчисление Ω_6. Аналогично Ω_4 с заменой правила бесконечного цикла на правило бесконечного спуска:

$$\frac{\begin{array}{c} A_0 \Rightarrow A_1^1 | \ldots | A_{n_1}^1 \\ A_1^1 \Rightarrow A_1^2 | \ldots | A_{k_1^2} \ldots A_{n_1}^1 \Rightarrow A^2_{k^2_{n_1-1}+1} | \ldots | A^2_{n_2} \\ \ldots \\ A_1^i \Rightarrow A_1^{i+1} | \ldots | A^{i+1}_{k_1^{i+1}} \ldots A^i_{n_i} \Rightarrow A^{i+1}_{k^i_{n_i-1}+1} | \ldots | A^{i+1}_{n_{i+1}} \end{array}}{\# A_0}$$

Аналоги предложения 8 имеют место и для Ω_4, и для Ω_6.

§2. Отношения и полиотношения

Введем систему понятий, используемую в наших семантических рассмотрениях. Это - предикаты, отношения и полиотношения на некотором множестве S и операции над ними.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отношение на S - подмножество $S \times S$. Отношение R определено в $s \in S$, если существует $t \in S$, $\langle s,t \rangle \in R$. Если S - частично упорядоченное множество, то R необратимо, если $\langle s,t \rangle \in R$ влечет $t < s$. Полиотношение на S - тройка $\langle n,k,R \rangle$, где $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $R \subseteq ([1:n] \times S) \times ([1:k] \times S)$. Полиотношение необратимо, если $\langle \langle i,s \rangle, \langle j,t \rangle \rangle \in R$ влечет $t < s$. Предикат на S - подмножество S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Операциями над отношениями, полиотношениями и предикатами яляются:

а) композиция отношений:

$$R_1 \circ R_2 = \{ \langle s,t \rangle \mid \exists u (\langle s,u \rangle \in R_1 \ \& \ \langle u,t \rangle \in R_2) \} ;$$

б) соединение отношений:

$$R_1 \cup R_2 = \{ \langle s,t \rangle \mid \langle s,t \rangle \in R_1 \vee \langle s,t \rangle \in R_2 \} ;$$

в) ограничение отношения R на предикат A:

$$A \upharpoonright R = \{ \langle s,t \rangle \mid s \in A \ \& \ \langle s,t \rangle \in R \} ;$$

г) разветвление отношений R_1 и R_2 по предикатам A и B:

$$\underline{\mathbf{if}}\ A \to R_1 \ \square\ B \to R_2\ \underline{\mathbf{fi}} =$$
$$= \{ \langle s,t \rangle \mid (s \in A \ \& \ \langle s,t \rangle \in R_1) \vee (s \in B \ \& \ \langle s,t \rangle \in R_2) \} ;$$

д) итерация отношения $\mathbf{R}$ с инвариантом $\mathbf{A}$ и выходом $\mathbf{B}$:

$$(R * A) \ulcorner B =$$

$$= \{\langle s,t\rangle \mid \forall r_1 r_2(\langle r_1,r_2\rangle \in R \Rightarrow r_2 \in A \cup B) \&$$

$$\& \exists s_0 \ldots s_n (s_0 = s \,\&\, s_n = t \,\&\forall i \in [1:n-1]\ s_i \in A \,\&\, s_n \in B \,\&$$

$$\& \forall i < n \quad \langle s_i, s_{i+1}\rangle \in R;$$

е) соединение полиотношений:

$$\langle n_1,k_1,R_1\rangle \mid \langle n_2,k_2,R_2\rangle = \langle n_1+n_2,\ k_1+k_2,$$

$$\{\langle\langle i,s\rangle,\ \langle j,t\rangle\rangle \mid (1 \le i \le n_1\ \&\ \langle\langle i,s\rangle,\ \langle j,t\rangle \in R_1) \vee$$

$$\vee (n_1+1 \le i \le n_2\ \&\ \langle\langle i-n_1,s\rangle, \langle j-k_1,t\rangle\rangle \in R_2))\}\rangle\ ;$$

ж) композиция полиотношений:

$$\langle n,k,R_1\rangle \circ \langle k,m,R_2\rangle =$$

$$= \langle n, m\{\langle x,y\rangle \mid \exists z(\langle x,z\rangle \in R_1 \,\&\, \langle z,y\rangle \in R_2)\}\rangle\ ;$$

з) итерация полиотношений:

$$\langle n,k,R\rangle^* = \langle n-1, k-1,$$

$$\{\langle\langle i,s\rangle, \langle j,t\rangle\rangle \mid (\exists s_0 \ldots s_n\ (s_0 = s\ \&\ s_n = t\ \&$$

$$\& \langle\langle i+1, s_0\rangle, \langle 1, s_1\rangle\rangle \in R\ \&$$

$$\& \forall v \in [1:n-2]\ \ \langle\langle 1, s_v\rangle, \langle 1, s_{v+1}\rangle\rangle \in\ R\ \&$$

$$\& \langle\langle 1, s_{n-1}\rangle, \langle j+1, s_n\rangle\rangle \in R) \vee \langle\langle i+1, s\rangle, \langle j+1, t\rangle \in R\ \}\rangle;$$

и) переименование входов и выходов полиотношения. Пусть Φ - всюду определенное отношение между $[1:n_1]$ и $[1:n]$, Ψ - между $[1:k]$ и $[1:k_1]$:

$$\langle n,k,R\rangle(\Phi,\Psi) = \langle n_1,k_1,\{\langle\langle i,s\rangle,\langle j,t\rangle\rangle \mid \exists i_1,j_1\ \langle\langle i_1,s\rangle,\langle j_1,t\rangle\rangle \in R \ \& \ \& \ \langle i,i_1\rangle \in \Phi \ \& \ \langle j_1,j\rangle \in \Psi\}\rangle.$$

Отношение R реализует переход между предикатами A и B (R ® $A \Rightarrow B$), если для всех s,t, $s \in A$, $\langle s,t\rangle \in R$, имеет место $t \in B$, и для каждого $s \in A$ отношение R определено на s.

Полиотношение $\langle n,k,R\rangle$ реализует переход между предикатами $A_1,\dots,A_n$ и $B_1,\dots,B_k$:

$$(\langle n,k,R\rangle \circledR A_1|\dots|A_n \Rightarrow B_1|\dots|B_k),$$

если для всех $\langle i,s\rangle,\langle j,t\rangle$ при $s \in A_i$ и $\langle\langle i,s\rangle, \langle j,t\rangle\rangle \in R$ имеет место $t \in B_i$, и если $s \in A_i$, то R определено на $\langle i,s\rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если* $R_1 \circledR (A \Rightarrow B)$, $R_2 \circledR (B \Rightarrow C)$, *то* $((A \ulcorner R_1 \cup B \ulcorner R_2)^* B) \ulcorner C$ *реализует переход от* A *к* C.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Композиция полиотношений выразима через их соединение, итерацию и переименование входов и выходов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D_1 = \langle n,k,R_1\rangle$, $D_2 = \langle k,l,R_2\rangle$, $\langle i,i-n\rangle \in \Phi$ при $1 \le i \le n$, Ψ - тождественное преобразование $[1:k+l]$. Тогда

$$D_1 \circ D_2 = ((D_1,D_2)(\Phi,\Psi))^{\overbrace{*\dots*}^{k\ \text{раз}}}.$$

Эти леммы показывают логические причины отсутствия силлогизма в Ω_1 и Ω_4: замена композиции на объединение и итерацию может быть функционально неэквивалентной, но реализует переход между теми же предикатами. Заметим еще, что разветвление отношений выразимо через их ограничение и соединение.

Класс отношений на S Ω_1-<u>замкнут</u> относительно класса предикатов Π, если он замкнут относительно операций объединения, ограничения и итерации с предикатами из Π. Класс полиотношений на S Ω_4-<u>замкнут</u>, если он замкнут относительно операций ограничения, соединения и композиции. В дальнейшем предполагается, что все рассмотренные классы отношений (полиотношений) содержат отношение с пустым графиком, обозначаемое $\emptyset$.

§3. Полнота Ω_0, Ω_5, Ω_6

Теперь рассмотрим классы интерпретаций, соответствующие исчислениям Ω_0, Ω_5, Ω_6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оценка - функция, ставящая в соответствие пропозициональным буквам из $\mathbf{P}$ значения <u>истина</u> либо <u>ложь</u>. <u>Интерпретация</u> - непустое множество состояний S вместе с функцией z, ставящей в соответствие каждому $s \in S$ непустое множество оценок $z(s)$. Формула классической логики высказываний A истинна в s (обозначается $s \models A$), если A истинна при всех оценках из $z(s)$. Интерпретация <u>разрешима</u>, если $z(s)$ одноэлементна для всех s.

Частично упорядоченное множество фундировано, если любая убывающая цепь в нем конечна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Ω_0-<u>интерпретация</u> - пара из разрешимой интерпретации $\langle S, z\rangle$ и Ω_0-замкнутого относительно класса предикатов $K = \{\{s \mid s \models A\} \mid A$ - формула классической логики высказываний класса отношений $\mathbf{R}$. Ω_1-<u>интерпретация</u> - пара из разрешимой интерпретации $\langle S, z\rangle$, в которой S является фундированным частично упорядоченным множеством, и Ω_1-замкнутого относительно K класса необратимых отношений $\mathbf{R}$. Далее, Ω_4-<u>интерпретация</u> - пара из интерпретации $\langle S, z\rangle$, где $\mathbf{S}$ - фундированное частично упорядоченное множество, и Ω_4-замкнутого класса необратимых полиотношений $\mathbf{R}$.

По причинам, выясняемым далее, Ω_1-интерпретации используются для исчисления Ω_5, Ω_4-интерпретации - для Ω_6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Ω_0-интерпретация $\langle S, z, \mathbf{R}\rangle$ является реализацией Ω_0-теории Th, если все классические аксиомы Th тождественно истинны на S и для любой конструктивной аксиомы $A \Rightarrow B$ найдется $R \in \mathbf{R}$, реализующее переход от $\{s \mid s \models A\}$ к $\{s \mid s \models B\}$.

Говорим, что $A \Rightarrow B$ $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ реализуема в Ω_i-интерпретации, если найдется $R \in \mathbf{R}$, реализующее переход от предикатов истинности ее условий к предикатам истинности ее обещаний.

ТЕОРЕМА 1. *а)* $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_0} A$ *тогда и только тогда, когда* $s \models A$ *для любого* s *из* Ω_0*-интерпретации, являющейся реализацией теории* Th *;*

б) $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_0} A \Rightarrow B$ *тогда и только тогда, когда* $A \Rightarrow B$ *реализуема в любой* Ω_0*-интерпретации, являющейся реализацией теории* Th .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Части "только тогда" тривиальны, сводятся к корректности правил вывода.

Тогда. Достаточно доказать, что если A невыводима в Ω_0 из Th, то существует реализация Ω_0 $\langle S, r, \mathbf{R}\rangle$, в которой A неистинна, по крайней мере, для некоторого s_0; если $A \Rightarrow B$ невыводима в Ω_0 из Th, то существует реализация Ω_0, в которой $A \Rightarrow B$ нереализуема. Для этого построим "точную" реализацию Th, в которой любая формула классической логики высказываний тождественно истинна тогда и только тогда, когда она выводима, любая $A \Rightarrow B$ реализуема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_0} A \Rightarrow B$.

Пусть $\mathbf{A}$ - множество всех формул классической логики высказываний, выводимых в $\mathbf{Th}$, а S строится как множество всех оценок, на которых истинны все формулы из $\mathbf{A}$ и $\mathbf{z}$ определяется как тождественное преобразование S. Для каждой импликации $A \Rightarrow B$,выводимой из $\mathbf{Th}$ при помощи Ω_0 ,строим отношение $R_{A \Rightarrow B} = \{\langle s,t\rangle \mid s \models A \,\&\, t \models B\}$; $\mathbf{R}$ - семейство всех $R_{A \Rightarrow B}$. Очевидно, $\mathbf{R}$ замкнуто относительно композиции, ограничения и соединения. В построенной модели $A \Rightarrow B$ реализуемо тогда и только тогда, когда оно выводимо в $\mathbf{Th}$,и A истинно тогда и только тогда, когда оно выводимо в $\mathbf{Th}$.

Построение точной модели является нашим основным методом и в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Ω_1-интерпретация $\langle S, z, \mathbf{R}\rangle$ является <u>реализацией</u> Ω_1 (Ω_5)-теории $\mathbf{Th}$, если все классические аксиомы $\mathbf{Th}$ тождественно истинны на S , а конструктивные - реализуемы.

Ω_4-интерпретация $\langle S, z, \mathbf{R}\rangle$ является <u>реализацией</u> Ω_4 (Ω_6)-теории $\mathbf{Th}$, если все классические аксиомы $\mathbf{Th}$ тождественно истинны на S , альтернативные импликации-аксиомы реализуемы, а для аксиом вида $\not\Rightarrow A$ не существует ни одного s такого, что $s \models A$.

ТЕОРЕМА 2. *а)* $\mathbf{Th} \vdash_{\Omega_5} A$ *тогда и только тогда, когда* $s \models A$ *для любого* s *из любой* Ω_1*-интерпретации, являющейся реализацией теории* $\mathbf{Th}$ *;*

б) $\mathbf{Th} \vdash_{\Omega_5} A \Rightarrow B$ *тогда и только тогда, когда* $A \Rightarrow B$ *реализуема в любой* Ω_1*-интерпретации, являющейся реализацией теории* $\mathbf{Th}$ *.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строим точную реализацию $\mathbf{Th}$. Прежде всего, заметим, что если $\mathbf{Th}$ непротиворечива,то имеется такая оценка z , при которой неистинно ни одно из условий конструктивных импликаций, выводимых в $\mathbf{Th}$. В самом деле,предположим противное. Если множество $\mathbb{A}$ условий импликаций, выводимых в Th, таково, что при каждой оценке выполнено хотя бы одно $A \in \mathbb{A}$, то множество отрицаний $\neg\mathbb{A}$ невыполнимо и, следовательно, по теореме компактности классической логики высказываний в нем есть конечное невыполнимое подмножество $\{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$, значит, $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ тождественно истинно, и из выводимых в Th импликаций $A_1 \Rightarrow B_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_n$ выводима в Ω_1 импликация $U \Rightarrow U$ и, значит, Th противоречива.

Если Th противоречива, то она не имеет реализаций. Если же она непротиворечива, то имеются оценки, при которых все классические формулы, выводимые в Th, истинны. Множество S строится из пар $\langle z, \alpha \rangle$, где z - такая оценка, α - счетный ординал. Определим отношение $<$ на множестве оценок следующим образом: $z_1 < z_2$, если для каждого A, такого, что $z_2 \models A$, существует B, такое, что $z_1 \models B$ и $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_5} A \Rightarrow B$. Ввиду наличия правила бесконечного спуска это отношение фундировано, а ввиду допустимости правил силлогизма и бесконечного цикла оно является отношением частичного порядка на оценках из S. Соответственно ординал оценки z определяется трансфинитной рекурсией: $\mathrm{On}(z) = \sup\limits_{y<z} \mathrm{On}(y)$. Базисом этой трансфинитной рекурсии служат оценки, существование которых установлено в начале доказательства.

Пусть $\varepsilon = \sup \mathrm{On}(z)$. Тогда

$$S = \{\langle z, \alpha \rangle \mid \forall A (\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_5} A \;\&\; z \models A) \;\&\; \alpha \geq \mathrm{On}(z) \;\&\; \alpha \leq \varepsilon \},$$

$z(\langle z_1, \alpha \rangle)$ есть просто z_1. $\mathbb{R}$ опять-таки состоит из отношений $R_{A \Rightarrow B}$ для всех $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_5} A \Rightarrow B$. Замкнутость $\mathbb{R}$ относительно операций соединения и ограничения очевидна. Рассмотрим операцию итерации. Пусть $R_1 = (R_{A \Rightarrow B}{}^{*}\, C)\,\Gamma D$. Докажем, что $R_1 = R_{A \Rightarrow B \& D}$. Очевидно, что R_1 реализует $A \Rightarrow B \,\&\, D$, значит, $R_1 \subseteq R_{A \Rightarrow B \& D}$. Теперь пусть $z_1 \models A$, $\beta < \alpha$, $z_2 \models B \& D$. Тогда $\langle\langle z_1, \alpha\rangle, \langle z_2, \beta\rangle \in R_{A \Rightarrow B}$ и, по определению итерации, $\langle\langle z_1, \alpha\rangle, \langle z_2, \beta\rangle \in R_{A \Rightarrow B \& D}$. Доказательство завершено.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если сигнатура* $\mathbf{P}$ *конечна, то* $Th \vdash_{\Omega_1} A \Rightarrow B$ *тогда и только тогда, когда* $A \Rightarrow B$ *реализуема во всех* Ω_1*-интерпретациях, являющихся реализациями* Th .

ТЕОРЕМА 3. *а)* $Th \vdash_{\Omega_6} A$ *тогда и только тогда, когда* $s \models A$ *для любого* s *из любой* Ω_4*-интерпретации, являющейся реализацией теории* Th ;

б) $Th \vdash_{\Omega_6} \Gamma \Rightarrow \Delta$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *реализуема в любой* Ω_4*-интерпретации, являющейся реализацией теории* Th ;

в) $Th \vdash_{\Omega_6} \# A$ *тогда и только тогда, когда ни для какой* Ω_4 *-реализации* $\langle S, z, R\rangle$ *теории* Th, *ни для какого* $s \in S$ *не выполнено* $s \models A$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если сигнатура* $\mathbf{P}$ *конечна, то* $Th \vdash_{\Omega_6} \Gamma \Rightarrow \Delta$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *реализуема в любой* Ω_4*-интерпретации, являющейся реализацией* Th *, и аналогично для остальных пунктов теоремы 3.*

Итак, логические системы Ω_1 и Ω_4 оказываются полны в случае конечных сигнатур, в случае же бесконечных необходимо исключить убывающие цепи типа $p_0 \Rightarrow p_1, p_1 \Rightarrow p_2, \ldots, \ldots, p_n \Rightarrow p_{n+1}, \ldots$

Отметим, что, хотя требования на классы отношений навеяны их интерпретацией в качестве семантик схем программ, формально понятие схемы программ оказалось в данном изложении излишним.

§4. Иммунные интерпретации для Ω_1 и Ω_4

Несколько неудовлетворительным выглядит, что привлекательные с синтаксической точки зрения исчисления Ω_1 и Ω_4 оказались корректны лишь для конечных сигнатур. Но положение можно исправить, рассматривая более конструктивные аспекты интерпретаций этих исчислений. В самом деле, содержательно любое исполнение схемы программ обязано быть эффективным, и, следовательно, определяемое ею отношение рекурсивно-перечислимо. Соответственно в исчислении Ω_1 мы содержательно должны потребовать разрешимость отношения $s \models A$ на S. Эти усиления дают возможность сделать и ослабление: для того, чтобы гарантировать завершение работы программы, уже не обязательно, чтобы все убывающие цепи по отношению $<$ были конечны, достаточно, чтобы обрывались вычислимые цепи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. <u>Иммунная</u> Ω_1<u>-интерпретация</u> - тройка $\langle S, z, R\rangle$, где S - частично упорядоченное множество с условием обрыва рекурсивных убывающих цепей: если f - рекурсивная функция и $f(n+1) \le f(n)$, то множество таких n, что $f(n+1) < f(n)$, конечно; z - частично-рекурсивная функция, всюду определенная на $P \times S$ и ставящая в соответствие каждой паре $\langle p,s\rangle$ 0 либо 1 (<u>ложь</u> или <u>истину</u>), R - семейство рекурсивно-перечислимых отношений, ограничения которых на S необратимы и замкнуты относительно соединения, ограничения по предикатам $\{s \mid s \models A\}$ и итерации по ним.

<u>Иммунная</u> Ω_4<u>-интерпретация</u> - тройка $\langle S, z, R\rangle$, где S - частично упорядоченное множество с условием обрыва рекурсивных убывающих цепей, R - семейство перечислимых мультиотношений, ограничения которых на S необратимы и замкнуты относительно соединения, итерации и переименования входов-выходов.

Понятия f<u>-иммунных</u> интерпретаций, где f - функция из N в N, образуются релятивизацией этих понятий на рекурсивность относительно f.

ТЕОРЕМА 4. *Если множество таких* $\mathbf{F}$, *что* $\mathbf{T} \vdash_{\Omega_1} \mathbf{F}$, *разрешимо, то:*

а) $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} \mathbf{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{s} \models \mathbf{A}$ *для любого* $\mathbf{s}$ *из любой иммунной* Ω_1*-интерпретации, являющейся реализацией* Th *;*

б) $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ *реализуема в любой иммунной* Ω_1*-интерпретации, являющейся реализацией* Th .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность исчисления Ω_1 относительно иммунных Ω_1-интерпретаций устанавливается легко: единственный нетривиальный пункт - правило бесконечного спуска. Но здесь, если реализуемо $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}$, то по перечислимости отношения, его реализующего, мы могли бы по $\mathbf{s} \models \mathbf{A}$ построить бесконечную убывающую эффективную цепочку $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots$ таких, что $\mathbf{s}_i \models \mathbf{A}$.

Полнота опять доказывается построением точной реализации. Так как $\mathbf{P}$ разрешимо, то у него существует естественная вычислимая нумерация ν . Зафиксируем также взаимно-однозначное соответствие между $\mathbf{P}$ и некоторым иммунным [3] множеством X: ν_1 . Под вычислимой оценкой будем понимать общерекурсивную функцию φ , будем говорить, что $\varphi(p_i)$ = <u>истина</u> (<u>ложь</u>), если $\varphi(i) = 1$ $(\varphi(i) = 0)$. Вычислимая оценка <u>корректна,</u> если при ней истинны все классические формулы, Ω_1 -выводимые из Th . Так как Th разрешима, то существуют корректные вычислимые оценки.

Определим <u>ранг</u> $\mathrm{p}(\varphi, \mathbf{Q})$ оценки φ относительно конечной подсигнатуры $\mathbf{Q}$ сигнатуры $\mathbf{P}$, $\mathrm{p}(\varphi, \mathbf{Q}) = 0$, если нет ни одной конструктивной импликации $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ сигнатуры $\mathbf{Q}$, выводимой в Th с Ω_1 , такой, что $\varphi \models \mathbf{A}$, в противном случае он равен максимальному $\mathbf{n}$ такому, что $\mathrm{Th} \vdash_{\Omega_1} \mathbf{A}_0 \Rightarrow \mathbf{A}_1, \ldots$

$\ldots, Th \vdash_{\Omega_1} A_{n-1} \Rightarrow A_n$, где $A_0, \ldots, A_n$ - формулы сигнатуры Q, $\varphi = A_0$.

Множество S состоит из кортежей $[e, \sigma, k]$, где e - гёделев номер корректной вычислимой оценки, σ - кортеж $[i_1, \ldots, i_n]$ таких, что $i_1 \in X, \ldots, i_n \in X$, $i_j < i_{j+1}$ при всех $1 \leq j < n$, k - натуральное число, не меньшее $p(\lambda x, \langle e \rangle (x), \{\nu_1(i_1), \ldots, \nu_1(i_n)\})$; $[e, \sigma, k] > [e_1, \sigma_1, k_1]$, если $\sigma = \sigma_1$, $k_1 < k$, либо $\sigma \subset \sigma_1$. Оценка, соответствующая $[e, \sigma, k]$, есть общерекурсивная функция $\lambda x. \langle e \rangle (x)$; $R_{A \Rightarrow B}$ - множество всех пар $\langle [e, \sigma, k], [e_1, \sigma_1, k_1] \rangle$, где $A \Rightarrow B$ - формула сигнатуры, определяемой σ_1, $[e, \sigma, k] > [e_1, \sigma_1, k_1]$, $\lambda n. \langle e \rangle (n) \models A$, $\lambda n. \langle e_1 \rangle (n) \models B$; R опять состоит из отношений $R_{A \Rightarrow B}$ для всех $Th \vdash_{\Omega_1} A \Rightarrow B$.

Так же, как в теореме 2, доказывается Ω_1-замкнутость R, S удовлетворяет условию обрыва рекурсивных убывающих цепей, так как по бесконечной рекурсивной цепи можно было бы построить бесконечное перечислимое подмножество X ,которого не существует. Далее доказательство теоремы завершается так же, как теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если множество формул, выводимых в* Th *с* Ω_1, *разрешимо относительно* f , *то существует* f *- иммунная* Ω_1 *-интерпретация, являющаяся точной реализацией* Th .

Аналогично доказывается и теорема полноты Ω_4 .

ТЕОРЕМА 5. *Если множество таких* F , *что* $Th \vdash_{\Omega_4} F$, *разрешимо, то:*

а) $Th \vdash_{\Omega_4} A$ *тогда и только тогда, когда* $s \models A$ *для любого* s *из любой иммунной* Ω_4*-интерпретации, являющейся реализацией* Th *;*

б) $\mathbf{Th} \vdash_{\Omega_4} \Gamma \Rightarrow \Delta$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *реализуема в любой иммунной* Ω_4 *-интерпретации, являющейся реализацией* $\mathbf{Th}$ *;*

в) $\mathbf{Th} \vdash_{\Omega_4} \# \mathbf{A}$ *тогда и только тогда, когда ни для какой иммунной* Ω_4*-реализации* $\langle \mathbf{S}, \mathbf{z}, \mathbf{R} \rangle$ *теории* $\mathbf{Th}$ *ни для какого* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ *не выполнено* $\mathbf{s} \models \mathbf{A}$.

Литература

1. НЕПЕЙВОДА Н.Н. Конструктивные логические средства. П. Интуиционистская логика и конструктивные логики схем программ //Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1988. - № 2. - С. 65-81.

2. ГИЛЬБЕРТ Д., БЕРНАЙС П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. -М.: Наука, 1979. - 560 с.

3. КАТЛЕНД Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. - М.: Мир, 1983. - 256 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

16 мая 1989 года