ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1989 год Выпуск 129

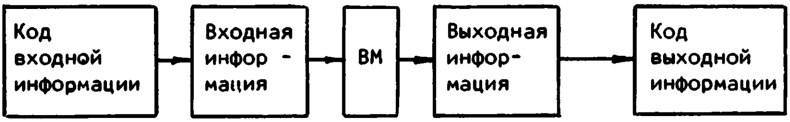
УДК 51:801

ТИПЫ ДАННЫХ И ВЫЧИСЛИМЫЕ КЛАССЫ КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

В.П. Добрица

В середине 60-х годов А.Н.Колмогоров и В.А.Успенский [1,2] отмечают связь между понятиями вычислимости и частично рекурсивной функции (ч.р.ф.),а также между языками программирования и вычислимыми семействами ч.р.ф.Цель настоящей статьи - проследить связи между понятиями банка данных и конструктивной модели, между абстрактным типом данных и вычислимым классом конструктивных моделей.

Вначале рассмотрим первые из отмеченных связей.Пусть π обозначает некоторую программу, реализуемую на некоторой вычислительной машине (ВМ). Информацию (чаще всего числовую),подаваемую на вход ВМ, можно закодировать натуральными числами.Аналогично может быть закодирована и информация, получаемая в качестве выходных данных ВМ. Например, если входные и выходные данные представляют собой наборы рациональных чисел, то в качестве кодирования можно взять некоторую гёделевскую нумерацию последовательностей рациональных чисел. В этом случае получаем следующие переходы:



Причем ВМ работает в соответствии с заданной программой π . Весь переход от натурального кода входной информации до натурального кода выходной информации представляет собой процесс вычисления значения некоторой рекурсивной функции φ_{π} . Если допустить рассмотрение таких программ, которые на некоторых входных данных вынуждают ВМ работать бесконечно (зацикливание, бесконечная переработка информации и т.д.), то по программе π мы,вообще говоря, в качестве соответствующей функции φ_{π} получаем [3,4] некоторую ч.р.ф.

В случае рассмотрения некоторого класса программы мы по программе, описанной выше, получаем соответствующий класс ч.р.ф.

Рассмотрим класс программ, которые пишутся на каком-то конкретном, фиксированном языке программирования, обозначаемом через Я. Очевидно, что с помощью этого языка через класс соответствующих программ мы получаем подходящее семейство S ч.р.ф.

Ясно, что для данного языка программирования можно описать эффективное перечисление всех возможных программ, записанных на этом языке. Например, это можно сделать подобно тому, как описываются все возможные машины Тьюринга, Поста [3] и т.д. Тем самым определяется вычислимая нумерация η соответствующего семейства S ч.р.ф.

Рассмотрим два языка программирования $Я_1$ и $Я_2$.Если по программе π_1 языка $Я_1$ мы можем эффективно указать программу π_2 языка $Я_2$, задающую ту же самую функцию $\varphi_{\pi_1} = \varphi_{\pi_2}$ при фиксированных кодированиях входной и выходной информаций, то скажем, что язык $Я_1$ сводится к языку $Я_2$ ($Я_1 \leq Я_2$). Эффективность перехода от программы π_1 к программе π_2 гарантирует существование общерекурсивной функции ϕ ,которая по номеру n функции φ_{π_1} в вычислимой нумерации η^1 семейства S^1 , отвечающего языку $Я_1$, задает номер этой же функции в вычислимой нумерации η^2 семейства S^2, отвечающего языку $Я_2$. Таким образом, будет выполняться равенство $\eta^1_n = \eta^2_{\psi(n)}$ при любом натуральном n, что соответствует определению сводимости $\eta^1 \le \eta^2$ вычислимых нумераций семейств ч.р.ф.

Если языки $Я_1$ и $Я_2$ равносильны по выразительной способности (по возможностям написания программ для решения различных задач), то им соответствует одно и то же семейство $S = S_1 = S_2$ ч.р.ф. Равносильность языков символически будем обозначать как $Я_1 \approx Я_2$.

Исходя из понятия сводимости языков $Я_1 \le Я_2$, можно естественным образом определить их эквивалентность:

$$(Я_1 \equiv Я_2) \Leftrightarrow (Я_1 \le Я_2) \quad (Я_2 \le Я_1).$$

Очевидно, что эквивалентные языки $Я_1 \equiv Я_2$ будут и равносильными $Я_1 \approx Я_2$. Обратное, вообще говоря, неверно. Для исследования этих возможных связей естественно подвергнуть изучению ситуацию в общем случае, т.е. изучать вычислимые нумерации семейств ч.р.ф. , которые являются естественными семантиками языков программирования.По вычислимым нумерациям семейств ч.р.ф. разработана глубокая теория. Отметим один из результатов этой теории - число неэквивалентных вычислимых нумераций.

Предварительно заметим, что по семейству S ч.р.ф. эффективно определяется семейство $\mathcal{P}$ рекурсивно-перечислимых множеств, представляющих собой графики функций из семейства S. Для $\varphi \in S$ множество $P_\varphi \in \mathcal{P}$ задается следующим образом: $P_\varphi = \{\langle n, \varphi(n)\rangle \mid n \in \omega$ и $\varphi(n)$ определено $\}$.

В силу эффективности этого соответствия часто саму функцию φ отождествляют с ее графиком P_φ. Поэтому изучение вычислимого семейства S ч.р.ф. можно заменить изучением вычислимого семейства $\mathcal{P}$ соответствующих рекурсивно-перечислимых множеств. С учетом этих замечаний интересующий нас результат А.Б.Хуторецкого [5] может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Если у семейства* $\mathbf{S}$ *частично рекурсивных функций имеются две неэквивалентные вычислимые нумерации, то у этого семейства имеется бесконечно много испорано неэквивалентных вычислимых нумераций.*

Другими словами, у произвольного семейства ч.р.ф. либо единственная с точностью до эквивалентности вычислимая нумерация, либо их бесконечно много. Семейства, у которых бесконечно много вычислимых нумераций, существуют. Например,у класса всех ч.р.ф. вычислимых нумераций бесконечное число.

Таким образом, если есть два равносильных, но не эквивалентых языка, то имеется возможность определять бесконечно много таких языков. Причем не только эквивалентность этих языков, но даже их равносильность не может быть установлена эффективно.

Перейдем теперь к рассмотрению ситуации с банками данных. Учитывая возможности кодирования, под банком данных можно понимать конечное множество натуральных чисел с заданными на нем отношениями. Конечное множество можно занумеровать всеми натуральными числами, доопределив на них "отношение равенства",факторизация по которому и дает конечную систему, изоморфную исходному банку данных. Таким образом, на банк данных можно смотреть как на множество натуральных чисел с заданными на нем рекурсивными отношениями, в том числе и с предикатом равенства. Но это не что иное, как рекурсивная (или конструктивная) модель $\langle N/=, \{P_i^{n_i}\}\rangle$. Такой взгляд на базы данных отмечают ряд авторов, например, Ю.Л.Ершов, С.С.Гончаров, Д.И.Свириденко,В.Д.Дзгоев [6-8]. Нетрудно понять, что конструктивная модель с конечным множеством (с конечным носителем $N/=$) имеет разрешимую $\exists$-теорию. Следовательно, на банк данных можно смотреть как на конструктивную модель с разрешимой $\exists$-теорией (даже как на сильно конструктивную модель).

Если банк данных определяется системой аксиом,то эта система задает в абстрактном виде целый класс возможных состояний банка данных, т.е. получаем класс конструктивных моделей. Нетрудно понять, что модели этого класса с конечными носителями составляют вычислимый подкласс. Например, можно из всех моделей конечной сигнатуры с носителем из n элементов выбрать те, которые удовлетворяют данной системе аксиом.

Всех моделей мощности n , а значит, и выбранных моделей конечное число, и их перечисление эффективно. Объединив в один класс модели, удовлетворяющие системе аксиом и имеющие конечные носители, мы получим вычислимую индексацию этого класса конструктивных моделей.

Тем самым каждой системе аксиом A , определяющей банк данных, соответствует вычислимый класс K конструктивных моделей. Причем можно определить и некоторый способ перечисления всех моделей этого класса, т.е. задать некоторую вычислимую индексацию γ^A этого класса K .

Скажем, что вычислимая индексация γ^A , соответствующая аксиоматическому заданию A баз данных, сводится к вычислимой индексации γ^B, соответствующей аксиоматическому заданию B баз данных, если по γ^A-номеру базы данных D эффективно находится γ^B-номер этой же базы данных D , т.е. существует общерекурсивная функция $f(x)$ такая,что для всех $n \in \omega$ выполняется эквивалентность $\gamma^A_n \underset{a}{\equiv} \gamma^B_{f(n)}$. (Заметим, что для конечных моделей, какими являются базы данных, совпадение моделей и их автоэквивалентностей как конструктивных моделей равносильно.) Указанную сводимость обозначим через

$\gamma^A \leq \gamma^B$. Сводимостью индексаций сразу задается эквивалентность индексаций:

$$(\gamma^A \equiv \gamma^B) \Leftrightarrow (\gamma^A \leq \gamma^B) \wedge (\gamma^B \leq \gamma^A).$$

Два аксиоматических задания баз данных A и B естественно считать равносильными, если они определяют один и тот же класс конечных моделей. Ясно, что из эквивалентности вычислимых индексаций $\gamma^A \equiv \gamma^B$ сразу следует равносильность аксиоматических заданий A и B баз данных. Обратное в общем случае неверно.

Возможен и другой подход к рассмотрению вычислимых классов конструктивных моделей как семантики абстрактного задания базы данных, а именно: конструктивную модель с γ^A -номером n можно рассматривать как состояние базы данных в момент времени $t = n$. Состояние базы данных меняется с течением времени, но постоянно удовлетворяет данной системе аксиом. Иногда это изменение может быть эффективным, т.е. по состоянию базы данных в момент времени n мы можем эффективно определить ее состояние в момент времени $n+1$. А если при изменении базы данных в момент перехода от времени n к $n+1$ учитывается влияние внешних факторов (мнение экспертов, внешняя информация, не зависящая от состояния базы данных, и др.), то этот переход в общем случае не эффективен. Однако новое состояние базы данных удовлетворяет определяющей системе аксиом и потому принадлежит к рассматриваемому классу конструктивных моделей. Так как изменение базы данных внутри ЭВМ происходит дискретно, то такой подход к множеству ее состояний как вычислимому классу конструктивных моделей выглядит вполне реалистично.

Приведенные рассуждения показывают, что вычислимые классы конструктивных моделей являются естественной семантикой абстрактного, аксиоматического задания баз данных. В связи с этим и возникает необходимость исследовать с теоретических позиций вычислимые классы конструктивных моделей. В частности, встает вопрос о числе неэквивалентных вычислимых индексаций у класса конструктивных моделей.

Для таких классов, соответствующих абстрактному заданию баз данных, ответ на этот вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 2 [9]. *Если у вычислимого класса конструктивных моделей с разрешимыми* $\exists$*-теориями имеются две неэквивалентные вычислимые индексации, то таковых вычислимых индексаций у этого класса бесконечно мало.*

Из доказательства этой теоремы можно сделать вывод, что не может быть эффективно распознана эквивалентность вычислимых индексаций, а также равносильность абстрактных аксиоматических заданий баз данных.

Хотя по смыслу формулировок теоремы 1 и 2 очень похожи, однако они относятся к различным объектам. В то же время в теореме 2 добавлено условие разрешимости $\exists$-теорий конструктивных моделей из рассматриваемого класса, от которого полностью освободиться пока не удается. Предположение о существенности подобного дополнительного условия и невыполнимости теоремы при его опускании выглядит вполне естественным в силу известного результата С.С.Гончарова об алгоритмической размерности моделей.

ТЕОРЕМА 3 [10]. *Существует модель, допускающая точно две неэквивалентные конструктивные нумерации, т.е. допускающая точно два рекурсивных задания на натуральных числах, которые изоморфны в абстрактном смысле, но между которыми нет эффективного изоморфизма.*

Заметим, что эти конструктивизации в определенном смысле имеют наибольшую сложность различия. Для уточнения этого понятия, соотнесенного с индексациями, определим предельную сводимость индексаций: $\alpha \underset{n}{\leq} \beta$ тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная функция $\varphi(t,x)$ такая, что существует предел $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x)$ при каждом фиксированном значении x и

$$\alpha_x \equiv_a \beta_{\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x)} .$$

Другими словами, для каждой конструктивизации α_n автоэквивалентную конструктивизацию в индексации β мы можем указать только после некоторого числа "ошибок". Число таких "ошибок" может служить в качестве критерия сложности сводимости одной вычислимой индексации к другой. Если между вычислимыми индексациями нет предельной сводимости, то эти индексации различаются в наибольшей мере.

Конструктивные нумерации, существование которых утверждается в теореме 3, не предельно эквивалентны. Если же у модели есть две не эквивалентные, но предельно эквивалентные конструктивные нумерации, то таких конструктивизаций будет бесконечно много [11]. При рассмотрении вычислимых индексаций ситуация совершенно иная.

ТЕОРЕМА 5 [12]. *Если вычислимая индексация* α *класса* $\mathbf{K}$ *конструктивных моделей не может быть предельно сведена к вычислимой индексации* γ *этого же класса с соответствующей функцией* $\varphi(t,x)$ *, у которой при каждом* x *число "ошибок" не превосходит* 2^{x^3} *, то у этого класса* $\mathbf{K}$ *счетное число неэквивалентных вычислимых индексаций.*

В частности, под эту теорему подпадают вычислимые классы конструктивных моделей, у которых имеются не предельно эквивалентные вычислимые индексации.

Литература

1. УСПЕНСКИЙ В.А. Вычислимые операции и понятие программы //Успехи мат.наук. - 1956. - Т.2. - Вып. 4. -С. 172-176.

2. КОЛМОГОРОВ А.Н., УСПЕНСКИЙ В.А. К определению алгоритма //Успехи мат.наук. - 1958. - Т.13. -Вып. 4. -С. 3-28.

3. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М.: Мир. - 1972.

4. СЕМЁНОВ А.Л., УСПЕНСКИЙ В.А. Математическая логика в вычислительных науках и вычислительной практике //Вест. АН СССР. - 1986. - № 7. - С. 93-103.

5. ХУТОРЕЦКИЙ А.Б. О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций //Алгебра и логика. - 1971. - Т.10, № 5.-С.561-569.

6. GONCHAROV S.S., ERSHOV Yr.L., SVIRIDENKO D.I. Semantic Programming //Information processing 86, IFIP, 1986 /Elsevier Science Publischrs B.V. (North-Holland). - 1986.-P.1093-1100.

7. ГОНЧАРОВ С.С., ДЗГОЕВ В.Д. Позитивные модели и абстрактные типы данных //Прикладные аспекты математической логики. - Новосибирск, 1987. - Вып. 122: Вычислительные системы. - С. 47-58.

8. ГОНЧАРОВ С.С. Модели данных и языки их оснований //Логико-математические основы проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 107: Вычислительные системы. - С. 52-70.

9. ДОБРИЦА В.П. Локальные классы и вычислимые индексации //Алгебра и логика. - 1987. - Т. 26, № 2. - С. 165-190.

10. ГОНЧАРОВ С.С. Проблема числа неавтоэквивалентных конруктивизаций //Алгебра и логика. - 1980. - Т.19, № 6. -С. 621-639.

11. ГОНЧАРОВ С.С. Автоустойчивость моделей и абелевых групп //Алгебра и логика. - 1980. - Т. 19, № 1. - С. 23-44.

12. ДОБРИЦА В.П. О полурешетках эффективно счетной ширины //Вторая Всесоюз . конф. по прикладной логике. Тез. докладов. - Новосибирск. - 1988. - С.74.

Поступила в ред.-изд.отд.

26 октября 1988 года