ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1989 год Выпуск 129

УДК 510:519.68

ОБ ОДНОЙ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

Н.Х. Касымов

В последнее время усиливается интерес к изучению моделей, обладающих позитивными нумерациями, что обусловлено, в первую очередь, все более распространяющейся в теоретическом программировании точкой зрения на абстрактную структуру данных как модель, обладающую позитивной нумерацией [1].

Для фиксированной модели классической является проблема существования ее позитивных нумераций и соотношений между ними, в частности, проблема рекурсивной эквивалентности и авто-устойчивости [1,3]. В некотором смысле двойственной задачей является следующая. Если η - фиксированная позитивная эквивалентность, то каким будет класс K_η, определимых над ней структур, т.е. класс тех моделей, которые имеют позитивные нумерации с нумерационной эквивалентностью η ? Для рекурсивной эквивалентности η класс K_η совпадает либо с классом всех конечных моделей некоторой мощности, либо с классом всех бесконечных рекурсивно-представимых моделей и потому практически необозрим, однако, варьируя неразрешимые позитивные эквивалентности, можно получить вполне обозримые и интересные классы K_η . Например, выбирая подходящую эквивалентность η, можно добиться того, что всякая алгебра конечной сигнатуры из класса

K_η будет локально-конечной (финитно-аппроксимируемой, с неартиновой решеткой конгруэнций, неавтоустойчивой и т.д.) [4-6]. Кульминацией зависимости строения моделей из класса K_η от свойств η является существование нетривиальной позитивной эквивалентности, над которой определимы только тривиальные структуры [4].

Предлагаемый подход к изучению эффективно представимых моделей позволил, в частности, дать отрицательное решение проблемы специфицируемости тождествами конечно-порожденных структур данных [10, проблема 92].

Цель настоящей работы - в рамках предлагаемого подхода дать алгебраическую характеризацию фундаментального алгоритмического понятия простого множества и показать неулучшаемость этой характеризации из-за усиления сформулированных алгебраических свойств. Все основные определения и необходимые сведения можно найти в [1-3, 7-9].

Пусть ω - множество натуральных чисел. Для произвольного подмножества α множества ω через $\eta(\alpha)$ будем обозначать эквивалентность, единственным неодноэлементным классом которой является множество α.

ТЕОРЕМА. *Для рекурсивно-перечислимого множества α с бесконечным дополнением эквивалентны следующие условия:*

1) α простое;

2) всякая модель из класса $K_{\eta(\alpha)}$, функциональная часть сигнатуры которой вычислима, финитно-аппроксимируема и локально финитно отделима.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). В [6] доказана следующая

ЛЕММА 1. *Если α - простое множество и F - вычислимое семейство рекурсивных функций, согласованных с эквивалентностью $\eta(\alpha)$, то для любого конечного множества $\gamma \subset \omega \setminus \alpha$ найдется такое конечное рас-*

ширение $\delta \supset \gamma$, *что* $\delta \subset \omega \setminus \alpha$ *и каждая функция из* F *согласована с* $\eta(\omega\setminus\delta)$.

Множество δ со свойствами, сформулированными в лемме, далее будем называть допустимым конечным расширением для γ. Из леммы 1 непосредственно следует финитная аппроксимируемость любой модели из $K_{\eta(\alpha)}$ с вычислимой функциональной сигнатурой относительно равенства, что и доказано в [6].

Пусть p - рекурсивно-перечислимое отношение местности $n \geq 1$, F - вычислимое семейство (возможно, пустое) рекурсивных функций, согласованных с $\eta(\alpha)$ и $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \notin p$. Если для некоторого $j\in\{1,\dots,n\}$ число x_j не лежит в α и δ - допустимое конечное расширение множества $\{x_j\}$, которое существует по лемме 1, то для $\theta = \eta(\omega\setminus\delta)$ имеем $(\omega|\theta;F,p) = \neg p(x_1|\theta,\dots, x_n|\theta)$.

ЛЕММА 2. *Если* $t\in\alpha$ *и* $\langle t,\dots,t\rangle \notin p$, *то существует такое конечное множество* $\delta\subset\omega\setminus\alpha$, *что все функции из* F *согласованы с* $\eta(\omega\setminus\delta)$ *и*

$$\forall x_1\dots x_n(\langle x_1,\dots,x_n\rangle\in p \rightarrow \{x_1,\dots,x_n\}\cap\delta \neq \emptyset).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по местности n отношения p.

Если $n = 1$, то множество $\gamma = \{x/x\in p\}\subset\omega\setminus\alpha$ конечно в силу простоты α и рекурсивной перечислимости p, а значит, по лемме 1, существует допустимое конечное расширение δ для γ. Очевидно, что $x\in p \rightarrow x\in\delta$.

Пусть $n>1$ и для всех чисел, строго меньших n, утверждение леммы выполняется.

Обозначим через Ω множество всех собственных подмножеств множества $\{1,\dots,n\}$ и для $\sigma = \{i_1<\dots<i_s\}\in\Omega$ определим $n-s$-местное отношение p_σ:

$$p_\sigma = \{\langle x_1,\dots,x_{i_1-1},x_{i_1+1},\dots, x_{i_s-1},$$

$x_{i_s+1},\ldots,x_n\rangle/\langle x_1,\ldots,x_{i_1-1},t,x_{i_1+1},\ldots,x_{i_s-1},$

$t,x_{i_s+1},\ldots,x_n\rangle\in p\}.$

По индукционному предположению для всякого $\sigma\in\Omega$ мощности s найдется такое конечное множество γ_σ, что $\gamma_\sigma\subset\omega\setminus\alpha$, каждая функция из F согласована с $\eta(\omega\setminus\gamma_\sigma)$ и

$$\langle x_1,\ldots,x_{n-s}\rangle\in p_\sigma\to\{x_1,\ldots,x_{n-s}\}\cap\gamma_\sigma\neq\emptyset.$$

Положим $\gamma_0=\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega}\gamma_\sigma$. Покажем, что множество $\beta=\{\langle x_1,\ldots$ $\ldots,x_n\rangle\in p/\{x_1,\ldots,x_n\}\cap\gamma_0=\emptyset\}$ конечно. В самом деле, если $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\in p$, то $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$ $(x_j\in\omega\setminus\alpha)$, иначе $\{x_1,\ldots,x_n\}\cap\gamma_\sigma\neq\emptyset$ для подходящего $\sigma\in\Omega$, но $\gamma_\sigma\subset\gamma_0$. Следовательно, β - рекурсивно-перечислимое подмножество множества $(\omega\setminus\alpha)^n$, а значит, оно конечно.

Определим

$$\gamma=\gamma_0\cup\{x/\exists x_1\ldots x_{n-1}(\langle x,x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle\in\beta\vee$$

$$\vee\langle x_1,x,\ldots,x_{n-1}\rangle\in\beta\vee\ldots\vee\langle x_1,\ldots,x_{n-1},x\rangle\in\beta)\}.$$

Очевидно, что

$$\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\in p\to\{x_1,\ldots,x_n\}\cap\gamma\neq\emptyset.$$

По лемме 1 для γ существует искомое допустимое конечное расширение δ. Лемма доказана.

Пусть α - простое множество и $\mathfrak{M}\in K_{\eta(\alpha)}$. Тогда $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-модели рекурсивной модели $(\omega;F,P)$ с подходящими семействами F (рекурсивных функций) и P (рекурсивно-перечислимых отношений) по конгруэнции $\eta(\alpha)$. По условию семейство F вычислимо. Если $p\in P$, $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\notin p$ и $\exists j\in\{1,\ldots,n\}$ $(x_j\in\omega\setminus\alpha)$, то, как показано выше, p ложно на наборе $\langle x_1|\theta,\dots,x_n|\theta\rangle$ в подходящей фактор-модели $\mathfrak{M}$ по конгруэнции конечного индекса θ. Если же $t\in\alpha$ и $\langle t,\dots,t\rangle\notin p$, то, по лемме 2, найдется такое конечное $\delta\subset\omega\setminus\alpha$, что все функции из F согласованы с $\eta(\omega\setminus\delta)$ и $(\omega\setminus\delta)^n\cap p=\emptyset$. Следовательно, p финитно-аппроксимируемо.

Пусть $\mathfrak{M}\in K_{\eta(\alpha)}$, $\mathfrak{N}$ - конечно-порожденная подмодель модели $\mathfrak{M}$ и $a\in\mathfrak{M}\setminus\mathfrak{N}$. Рассмотрим модель $(\omega/\eta(\alpha);F,p)$, изоморфную $\mathfrak{M}$, для которой семейство F вычислимо. Если $a=m/\eta(\alpha)$ и $m\in\omega\setminus\alpha$, то, по лемме 1, для $\{m\}$ существует допустимое конечное расширение δ и конгруэнция $\eta(\omega\setminus\delta)$ различает элемент a и модель $\mathfrak{N}$. Если же $m\in\alpha$, то $\{x/x/\eta(\alpha)\in\mathfrak{N}\}\subset\omega\setminus\alpha$ и это множество конечно в силу конечной порожденности $\mathfrak{N}$, вычислимости F и простоты α. Применение леммы 1 к множеству $\{x/x/\eta(\alpha)\in\mathfrak{N}\}$ завершает доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 1). Покажем, что если α не простое, то в $K_{\eta(\alpha)}$ имеется не финитно-аппроксимируемая и не финитно-отделимая алгебра конечной сигнатуры.

Если β - бесконечное рекурсивное подмножество множества $\omega\setminus\alpha$, то определим на β с помощью конечного семейства F' частично рекурсивных функций структуру конечно-порожденной простой алгебры и расширим затем эти функции на все ω так, что если значение хотя бы одного аргумента лежит в $\omega\setminus\beta$, то значение функции есть 0. Очевидно, что расширенное семейство F согласовано с $\eta(\alpha)$. Определим новую функцию g:

$$g(x\,y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\neq m;\\ s, & \text{если } y=m\ \&\ x\neq s;\\ m, & \text{если } y=m\ \&\ x=s,\end{cases}$$

где m, s - такие попарно различные фиксированные числа, что $s\in\beta$ и $m\in\omega\setminus(\alpha\cup\beta)$. Ясно, что алгебра $(\omega/\eta(\alpha);F,g)$

есть $\eta(\alpha)$-алгебра. Легко понять, что эта алгебра не финитно-аппроксимируема и подалгебра $(\beta/\eta(\alpha); F, g)$ не различается от элемента $m/\eta(\alpha)$ никакой конгруэнцией конечного индекса. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Существует конечно-порожденная бесконечная позитивно представимая модель, у которой всякое позитивно представимое обогащение с помощью вычислимого семейства операций и произвольного семейства отношений является финитно-аппроксимируемым.*

В [5] показано, что для подходящего простого α в $K_{\eta(\alpha)}$ содержится конечно-порожденная алгебра конечной сигнатуры. Из рекурсивной устойчивости этой алгебры и доказанной выше теоремы непосредственно вытекает сформулированное следствие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует не финитно отделимый $\eta(\alpha)$-группоид для подходящего простого множества α.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta_0 = \{0\}$, $\delta_1 = \{1,2\}$, $\delta_2 = \{3,4,5\} \ldots$ - сильная последовательность конечных множеств. Определим рекурсивную функцию f:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } \neg \exists n(x = \max \delta_n), \\ x & \text{– иначе.} \end{cases}$$

Возьмем произвольное простое множество α_0 и определим позитивную эквивалентность η:

$$\langle x,y\rangle \in \eta \Leftrightarrow x = y \vee x,y \in \{z / \exists n(z \in \delta_n \,\&$$

$$\& \, n \in \alpha_0 \vee z = \max \delta_n)\}.$$

Очевидно, что $\eta = \eta(\alpha)$ для простого α и f согласована с $\eta(\alpha)$. Зафиксируем числа $s, t \in \omega \setminus \alpha$ и определим функцию g так, что

$$g(x,y) = \begin{cases} t, & y \neq s; \\ f(x), & y = s. \end{cases}$$

функция g согласована с $\eta(\alpha)$, поэтому корректно определена фактор-алгебра $(\omega/\eta(\alpha);\ g)$. Теперь если $a = \alpha$ и $\mathfrak{A} = (\omega\setminus(\alpha \cup \{s\})/\eta(\alpha);\ g)$, то этот элемент и подалгебра не различаются никакой конгруэнцией конечного индекса, в чем нетрудно убедиться, используя свойства функции f. Предложение доказано.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Модели данных и языки их описания //Логико-математические основы проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 107: Вычислительные системы. -С. 52-70.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. - М.: Наука, 1977.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

4. КАСЫМОВ Н.Х., ХУСАИНОВ Б.М. Конечно-порожденные перечислимые и абсолютно локально конечные алгебры //Прикладная логика. - Новосибирск, 1986. - Вып. 116: Вычислительные системы. - С. 3-15.

5. КАСЫМОВ Н.Х. О позитивных нумерациях конечно-порожденных алгебр //Тез.докл. 8 Всесоюзной конференции по математической логике, М., 1986. - С. 80.

6. КАСЫМОВ Н.Х. Об алгебрах с финитно-аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями //Алгебра и логика.-1987. - Т. 26, № 6. - С. 715-730.

7. КОН П. Универсальная алгебра. - М.: Мир, 1968.

8. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. - М.: Наука,1970.

9. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции.-М.: Наука, 1986.

10. Логическая тетрадь. Новосибирск, 1986.

Поступила в ред.-изд.отд.
4 мая 1988 года