ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1989 год Выпуск 129

УДК 510.51+510.67

О СТРУКТУРАХ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СВОДИМОСТИ ПОЗИТИВНЫХ НУМЕРАЦИЙ

С.Т.Федоряев

Основная идея конструктивизируемости алгебраических систем состоит в задании на алгебрах некоторой эффективной "системы координат" в виде нумерации основного множества алгебры натуральными числами. Это позволяет ввести понятие эффективности на алгебре и применять теорию алгоритмов к исследованию разрешимости различных алгебраических проблем. Однако алгебраически корректная алгоритмическая массовая проблема (например, проблема распознавания равенства) [1], разрешимая при одной нумерации данной модели, может оказаться неразрешимой при другой нумерации той же модели. Это обстоятельство приводит к понятию алгебраической сводимости (см. [1]) нумераций фиксированной модели $\mathfrak{M}$, что позволяет выделять эффективные представления, наиболее полно отражающие "алгебраическую природу" модели $\mathfrak{M}$.

Будем говорить, что нумерация ν алгебраически сводится к нумерации μ (символически: $\nu \leq \mu$), если всякое устойчивое относительно автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$ отношение, разрешимое при нумерации μ, является разрешимым и при ν. Две нумерации модели $\mathfrak{M}$ называются алгебраически эквивалентными, если каждая из них алгебраически сводится к другой. Введенное отношение сводимости задает на совокупности всех нумераций модели $\mathfrak{M}$ предпорядок. Тем самым на множестве классов алгеб -

раически эквивалентных нумераций возникает частичный порядок. Таким образом определенное частично упорядоченное множество для модели $\mathfrak{M}$ будем называть структурой алгебраической сводимости модели $\mathfrak{M}$. Введенная выше сводимость и связанные с ней понятия аналогичным образом определяются и на некоторой совокупности нумераций, например, на конструктивизациях или позитивных нумерациях модели $\mathfrak{M}$.

При исследовании алгебраической сводимости особый интерес представляет проблема алгебраической характеризации класса структур алгебраической сводимости. Вопросы, касающиеся данной тематики, рассматривались в [1-4]. В настоящей работе, продолжающей эти исследования, показывается, что любая верхняя полурешетка из некоторого класса реализуется в качестве структуры алгебраической сводимости позитивных нумераций подходящей модели.

Будут использованы определения и обозначения из [5]. Если $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, то через I^* обозначим множество $\{1, \ldots, k\} \setminus I$; через Ω - множество всех собственных подмножеств множества $\{1, \ldots, k\}$, включая пустое множество; через L_k - верхнюю полурешетку, получающуюся из булевой алгебры 2^k удалением наименьшего элемента. Если S - заданное на модели $\mathfrak{M}$ одноместное отношение, то $\bar{S} \rightleftharpoons |\mathfrak{M}| \setminus S$. Через $S(i_1, \ldots, i_m)$ обозначим m-местное отношение, получающееся проектированием n-местного отношения S, $m < n$, на места $i_1, \ldots, i_m$ соответственно. Далее, устойчивое относительно автоморфизмов рассматриваемой модели отношение будем называть устойчивым; устойчивое отношение будем называть однородным, если для любых его двух элементов существует автоморфизм, переводящий один элемент в другой; будем употреблять вместо "при любой позитивной нумерации" термин "всегда".

ТЕОРЕМА. *Для всякого натурального* $k \geq 1$ *верхняя полурешетка* L_k *является структурой алгебраической сводимости позитивных нумераций подходящей модели.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры, состоящей из унарных операций $f_1, \ldots, f_k$, бинарных предикатов R_0, R_1 и унарных предикатов P_m, $m \in N$. Пусть $Q_1, \ldots$ $\ldots, Q_k$ - бесконечные попарно-непересекающиеся множества и $Q_i \cap N = \emptyset$. Основным множеством модели $\mathfrak{M}$ будет $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i \cup N$. Пусть M - максимальное множество (см. [6]), $M_1, \ldots, M_k$ - разбиение M на бесконечные множества и f_i - одно-однозначные функции такие, что $f_i(Q_i) = M_i$, f_i - тождественная функция на $\overline{Q_i}$. Предикаты определим следующим образом:

$$\mathfrak{M} \models P_n(m) \Leftrightarrow m \in N, \quad n = m \text{ или } n, m \in M;$$

R_0, R_1 интерпретируются соответственно как равенство и неравенство.

Определим следующие устойчивые отношения модели $\mathfrak{M}$:

$$x \in Q_i \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models f_i x \neq x;$$

$$y \in K_i \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\exists x)(x \in Q_i \,\&\, f_i x = y), \; i = 1, \ldots, k;$$

$$Q_0 \rightleftharpoons \overline{\bigcup_{i=1}^{k} Q_i}, \; K_0 \rightleftharpoons Q_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} K_i \right).$$

Нетрудно понять, что модель $\mathfrak{M}$ допускает позитивные нумерации. Пусть Δ_α, $\alpha \in \Omega$, - совокупность позитивных нумераций, при которых отношение K_i разрешимо тогда и только тогда, когда $i \in \alpha$.

ЛЕММА 1. *1. Модель, построенная указанным образом по любому разбиению множества* M, *изоморфна* $\mathfrak{M}$.

2. Класс нумераций $\Delta_\alpha \neq \emptyset$ *для любого* $\alpha \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое очевидно из построения. Для доказательства п.2, используя теорему Фридберга о разложении [6], можно получить разбиение M на рекурсивно-перечислимые множества $M_1, \dots, M_k$, такое, что M_i рекурсивно тогда и только тогда, когда $i \in \alpha$. Поэтому ясно, что $\Delta_\alpha \neq \emptyset$.

Отметим некоторые свойства модели $\mathfrak{M}$.

ЛЕММА 2. *1) Отношения* Q_i *и* K_i *однородны* $(i = 1, \dots, k)$ *;*

2) всякий автоморфизм модели $\mathfrak{M}$ *тождествен на* K_0 *;*

3) отношения Q_i, $i = 0, 1, \dots, k$, *разрешимы при любой позитивной нумерации модели* $\mathfrak{M}$ *;*

4) для всякого перечислимого одноместного отношения S *конечны отношения* $S \cap K_0$ *или* $\bar{S} \cap K_0$. *В частности,* $\bigcup_{i=1}^{k} K_i$ *– перечислимое неразрешимое отношение при любой позитивной нумерации* $\mathfrak{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы очевидно следует из построения и определения максимального множества.

Для доказательства теоремы используется

ЛЕММА 3. *Если* $\nu \in \Delta_\alpha$, $\mu \in \Delta_\beta$ *и* $\alpha, \beta \in \Omega$, *то* $\mu \leq \nu$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha \subseteq \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu \leq \nu$, то из определения алгебраической сводимости нумераций получаем, что $\alpha \subseteq \beta$. Покажем обратное утверждение. Пусть $\alpha \subseteq \beta$, S – устойчивое n-местное отношение. Индукцией по n покажем, что из ν-разрешимости отношения S следует μ-разрешимость.

<u>База индукции $n = 1$</u>. Заметим, что разрешимость S эквивалентна разрешимости $S \cap Q_i$, $i = 0, 1, \dots, k$. Так как Q_i , $i = 1, \dots, k$, – однородные всегда разрешимые отношения, то достаточно рассмотреть случай $S \subset Q_0$. По п.4 леммы 2 отношения $S \cap K_0$ или $\bar{S} \cap K_0$ конечны, поэтому достаточно показать μ-разрешимость для отношения $S \subset \bigcup_{i=1}^{k} K_i$. Отношение $\bigcup_{i=1}^{k} K_i$ всегда неразрешимо, K_i – однородные отноше-

ния, поэтому $S = \bigcup_{i \in I} K_i$, $I \in \Omega$. Следовательно, K_i — ν-разрешимые отношения при $i \in I$ и $I \subseteq \alpha \subseteq \beta$, поэтому S - μ -разрешимое отношение. Таким образом, база индукции доказана.

Пусть $n \geq 2$ и под x будем понимать кортеж $(x_1,\ldots,x_n)$. Из определения модели $\mathfrak{M}$ ясно, что проблема равенства для $\mathfrak{M}$ всегда разрешима.

В дальнейшем нам потребуется следующее

ЗАМЕЧАНИЕ. Если S - ν-разрешимое устойчивое отношение, $S(i)$ конечно, то S μ-разрешимо.

Действительно, если $S(i)=\{y_1,\ldots,y_m\}$ - устойчивое одноместное отношение модели $\mathfrak{M}$, то $S(i) \subset K_0$. В силу п.2 леммы 2, $B_j = \{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \mid (x_1,\ldots,x_{i-1},y_j,x_{i+1},\ldots,x_n) \in S\}$ - устойчивое $(n-1)$ - местное ν-разрешимое отношение. По индукционному предположению, B_j - μ-разрешимое отношение для любого j. Из эквивалентности

$$x \in S \leftrightarrow (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \in B_j \,\&\, x_i = y_j$$

для некоторого j получаем, что S μ-разрешимо. Замечание доказано.

Продолжим доказательство леммы. Очевидно, что разрешимость S эквивалентна разрешимости отношений $\{x \mid x \in S, x_1 \in Q_i\}$. Поэтому, используя аналогичные рассуждения, можно считать, что $S \subset Q_{z_1} \times \ldots \times Q_{z_n}$ для некоторого кортежа $(z_1,\ldots,z_n)$ из $0,1,\ldots,k$. Рассмотрим устойчивое ν-разрешимое отношение $\{x \mid x \in S,\ x_i = x_j\}$, разрешимость которого эквивалентна разрешимости устойчивого $(n-1)$ -местного отношения. Поэтому данное отношение μ-разрешимо, и можно считать, что для всех $x \in S$ элементы $x_1,\ldots,x_n$ различные.

Пусть $z_i \neq 0$ для некоторого i. Для простоты считаем, что $z_i = 1$, $i = 1$, т.е. $S(1) = Q_1$. Рассмотрим устойчивое ν-разрешимое отношение $\{x \mid x \notin S,\ f_1 x_1 = x_m\}$, разрешимость которого эквивалентна разрешимости устойчивого $(n-1)$-местного отношения. Но поскольку данное отношение μ-разрешимо, то можно считать, что

$$S \subset C \leftrightharpoons \{x \mid \mathfrak{M} \models Q_1(x_1) \,\&\, f_1 x_1 \neq x_i \,\&\, x_1 \neq x_i,\ 2 \leq i \leq n\}.$$

Выберем n произвольных различных элементов $c_1, \ldots, c_n$ отношения Q_1. Нетрудно видеть, что
$(x_2, \ldots, x_n) \in S(2, \ldots, n) \Leftrightarrow (c_i, x_2, \ldots, x_n) \in S$
для некоторого i.

Таким образом, $S(2, \ldots, n)$ ν-разрешимо и поэтому μ-разрешимо. Заметим, что

$$x \in S \Leftrightarrow (x_2, \ldots, x_n) \in S(2, \ldots, n) \quad \text{и} \quad x \in C.$$

Следовательно, S μ-разрешимо. Таким образом, приходим к случаю, когда $(z_1, \ldots, z_n)$ - кортеж из 0.

Пусть $a^m_1, \ldots, a^m_n$ - различные элементы K_m, $1 \leq m \leq k$, $a^m_i(x)$ - кортеж, получающийся из кортежа x подстановкой вместо x_1 элемента a^m_i.

Для произвольного непустого множества индексов $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ определим устойчивое ν-разрешимое отношение: $S_I \leftrightharpoons \{x \mid x \in S$ и выполняются условия $(*)\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } r \in I, \text{ то } a^r_i(x) \in S \text{ для некоторого } i; \\ \text{если } m \in I^*, \text{ то } a^m_j(x) \notin S \text{ для всех } j. \end{array}\right\} (*)$$

Пусть $C \leftrightharpoons \bigcup_{I^* \in \Omega} S_I$. Заметим, что $(S \setminus C)(1) \subset K_0$, $(S \setminus C)(1)$ ν-перечислимо, поэтому конечно и в силу замечания $S\setminus C$ μ-разрешимо. Значит, можно считать, что $S = C$, и достаточно показать, что S_I (при $I^* \in \Omega$) – μ-разрешимое отношение. Будем считать, что $S_I \neq \emptyset$. Заметим, что

$$(x_2,\ldots,x_n) \in S_I(2,\ldots,n) \Leftrightarrow \text{выполняются } (*),$$

т.е. отношение $S_I(2,\ldots,n)$ ν-разрешимо, а в силу индукционного предположения μ-разрешимо.

Легко понять, что

$$\bigcup_{i\in I} K_i \subset S_I(1) \subset Q_0 \setminus \big(\bigcup_{i\in I^*} K_i\big).$$

Теперь перейдем к рассмотрению 2 случаев для множества индексов I.

Случай 1. Пусть $\alpha^* \cap I^* \neq \emptyset$. Если $\overline{S_I(1) \cap K_0}$ конечно, то K_i ν-разрешимо для всех $i \in I^*$. Поэтому найдется $i \in \alpha^*$ такое, что K_i ν-разрешимо. Но, по условию, $\nu \in \Delta_\alpha$. Значит, $S_I(1) \cap K_0$ конечно. Устойчивое отношение $\{x \mid x \in S_I,\ x_1 \in S_I(1) \cap K_0\}$ ν-разрешимо и, по замечанию, μ-разрешимо. Поэтому можно считать, что $S_I(1) \cap K_0 = \emptyset$, т.е. $S_I(1) = \bigcup_{i\in I} K_i$. Теперь нетрудно понять, что

$$x \in S_I \Leftrightarrow x \in S_I(1) \times S_I(2,\ldots,n)$$

и $x_1,\ldots,x_n$ – различные. Пусть $(x_2,\ldots,x_n)$ – фиксированный элемент $S_I(2,\ldots,n)$, тогда

$$S_I(1) = \{y \mid (y,x_2,\ldots,x_n) \in S_I\} \cup \{x_i \mid x_i \in S_I(1),\ 2 \le i \le n\}.$$

Значит, $S_I(1)$ ν-разрешимо и по индукционному предположению μ-разрешимо. Тем самым μ-разрешимость отношения S_I доказана.

Случай 2. Пусть $\alpha^* \cap I^* = \emptyset$, т.е. $I^* \subseteq \alpha$. Определим устойчивое ν-разрешимое отношение

$$C_I \leftrightharpoons \{x \mid x \notin S_I,\ x_1 \in Q_0 \setminus \bigcup_{i \in I^*} K_i,$$

$$x_1, \ldots, x_n - \text{различные и выполняются } (*)\ \}$$

Заметим, что $C_I(1) \subset K_0$, поэтому отношение $C_I(1)$ конечно. По замечанию C_I — μ-разрешимое отношение. Так как $I^* \subseteq \alpha \subseteq \beta$ и выполняется эквивалентность

$$x \in S_I \Leftrightarrow x_1 \in Q_0 \setminus \bigcup_{i \in I^*} K_i,\ (x_2, \ldots, x_n) \in S_I(2, \ldots, n),$$

$$x \notin C_I, \qquad x_1, \ldots, x_n - \text{различные},$$

то S_I — μ-разрешимое отношение. Таким образом, S — μ-разрешимое отношение. Лемма и тем самым теорема доказаны.

Литература

1. УСПЕНСКИЙ В.А., СЕМЁНОВ А.Л. Теория алгоритмов: ее основные открытия и приложения //Алгоритмы в современной математике и ее приложениях. - Новосибирск, 1982.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Алгоритмическая размерность абелевых групп //17-я Всесоюз. алгебр. конф.: Тез.докл. - Минск, 1983. - С. 51.

3. ФЕДОРЯЕВ С.Т. Линейные структуры алгебраической сводимости //9-я Всесоюз. конф. по мат. логике: Тез. докл.-Л.,1988. - С. 164.

4. ХУСАИНОВ Б.М. Алгоритмические размерности уноидов //19-я Всесоюз. алгебр. конф.: Тез.докл. - Львов, 1987.-С.304.

5. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

6. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М.: Мир, 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 апреля 1989 года