ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1989 год Выпуск 129

УДК 517.15

НУМЕРАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ РАЗРЕШИМЫХ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ С ВЫЧИСЛИМЫМ СЕМЕЙСТВОМ ТИПОВ

Д.А. Тусупов

Исследования эффективности специальных моделей полных разрешимых теорий относительно оракула были заложены в работах С.С.Гончарова, М.Г.Перетятькина, В.Н.Дроботуна [1-3], а А.С.Денисов доказал теорему о том, что всякая полная разрешимая теория имеет $0'$-сильно конструктивную однородную модель.

В статье доказывается теорема: Если $\mathfrak{M}$ - счетная однородная модель полной разрешимой теории с вычислимым семейством реализующихся типов, то $\mathfrak{M}$ - $0'$-сильно конструктивная модель.

В §1 приводятся предварительные сведения о предмете исследования. Для доказательства теоремы в §2 приводится верхняя оценка сложности нумераций однородных моделей с вычислимым семейством реализующихся типов, а в §3 - точность верхней оценки сложности в классе полных разрешимых теорий.

§1. Предварительные сведения

Пусть S - счетное семейство конечных типов теории T, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Если p - n-тип из S и $\tau: \{x_0,\ldots,x_{n-1}\} \to \{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$ - перестановка, то $[p]^{x_0,\ldots,x_{n-1}}_{\tau x_0,\ldots,\tau x_{n-1}} \in S$.

2. Если p — n-тип из S, $m \le n$ и $p_m \rightleftharpoons \{\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid \varphi \in p\}$, то $p_m \in S$.

3. Если p — n-тип из S и $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ совместна с p, то существует $(n+1)$-тип $q \in S$ такой, что $q \cup \{\varphi\} \subseteq q$.

4. Если $p, q \in S$, p и q — n-типы, то существует $2n$-тип $\pi \in S$ такой, что $p \cup [q]^{x_0, \ldots, x_{n-1}}_{x_n, \ldots, x_{2n-1}} \subseteq \pi$.

5. Если $p, q \in S$ — $(n+1)$-типы и $p_n = q_n$, то существует $(n+2)$-тип $\pi \in S$ такой, что $p \cup [q]^{x_n}_{x_{n+1}} \subseteq \pi$.

Условия 1-5 назовем условиями однородности. Счетная или конечная модель $\mathfrak{M}$ с нумерацией $\nu: \omega \xrightarrow{\text{на}} |\mathfrak{M}|$ называется A-сильно конструктивной (A-конструктивной), если $\gamma^{-1}(Th\, \mathfrak{M}_\nu) \le_T A$ $(\varphi^{-1}(D\, \mathfrak{M}_\nu) \le_T A)$, $\mathfrak{M}_\nu$ - обогащение сигнатуры модели $\mathfrak{M}$ новыми константными символами c_i, $i < \omega$, так, что c_i интерпретируется элементом $\nu(i) \in |\mathfrak{M}|$, γ - гёделевская нумерация формул, $A \subseteq \omega$, Th - элементарная теория, D - диаграмма модели $\mathfrak{M}_\nu$.

Сложностью нумерации ν (сл ν) модели $\mathfrak{M}$ назовем наименьший уровень сложности множества $\gamma^{-1}(Th\, \mathfrak{M}_\nu)$ в аналитической иерархии Клини-Мостовского. Под сложностью совокупности γ всех нумераций модели $\mathfrak{M}$ будем понимать сл $\gamma \rightleftharpoons \inf\{$сл $\nu \mid \nu \in \gamma\}$.

Если семейство S удовлетворяет условию однородности, то у теории T существует счетная однородная модель $\mathfrak{M}_S$, в которой реализуются в точности типы из S.

Всякому рекурсивному типу p теории T поставим в соответствие рекурсивное множество $\gamma^{-1}(p)$ гёделевых номеров формул из p.

Семейство типов S назовем вычислимым, если множество $\gamma^{-1}(S) \rightleftharpoons \{\gamma^{-1}(p) | p \in S\}$ рекурсивно-перечислимо.

§2. Верхняя оценка сложности нумерации однородной модели с вычислимым семейством реализующихся типов

Если семейство S вычислимо и удовлетворяет условиям 1-3, то семейство S имеет такую вычислимую нумерацию $\nu: \omega \to S$, что по ν-номеру типа можно эффективно узнать его "размерность".

Пусть $C = \{c_i | i < \omega\}$ - счетное множество новых констант, $P_\omega(C)$ - множество всех конечных подмножеств множества C. Пусть $A \in P_\omega(C)$ и $A = \{c_0, \dots, c_{n-1}\}$, выбирая последовательно все n-типы p из S и образуя полные теории $[p]^{x_0, \dots, x_{n-1}}_{c_{i_0}, \dots, c_{i_{n-1}}}$ сигнатуры $L \cup \langle A \rangle$, расширяющие теорию T, получим некоторую (эффективную) последовательность S-пополнений теории $T(A)$, полученной из T расширением сигнатуры L до $L \cup \langle A \rangle$: $\Delta_0(A), \dots, \Delta_n(A), \dots$ Поступая аналогично (с использованием $(n+1)$-типов), получим эффективную последовательность 1-типов теории $T(A)$, определенную семейством S: $\Gamma_0(A), \dots, \Gamma_n(A), \dots$ Пусть

$$\Gamma_n(A)(c) \rightleftharpoons \{[\varphi]^{x_0}_{c} | \varphi \in \Gamma_n(A)\}.$$

Для любой формулы $\varphi \in L \cup \langle C \rangle$ обозначим через $c(\varphi)$ множество всех констант вида c_i из C, входящих в φ, через $v(\varphi)$ - множество переменных, имеющих вхождение в φ.

Пусть $A \in P_\omega(C)$. Тогда через $\varphi(A)$ обозначим формулу, которая получается так: пусть $\{c_{j_0}, \dots, c_{j_k}\} = c(\varphi) \setminus A$

и $y_{j_0}, \ldots, y_{j_k} \notin v(\varphi)$, тогда

$$\varphi(A) \rightleftharpoons \exists y_0 \ldots \exists y_k [\varphi]^{c_{j_0}, \ldots, c_{j_k}}_{y_0, \ldots, y_k} .$$

Если $B \subseteq A$, то $\Delta_n(A) \restriction_B \rightleftharpoons \{\varphi(B) \mid \varphi \in \Delta_n(A)\}$.

Из условий 1-5 для введенных последовательностей можно легко получить ряд следствий.

1. Если $B \subseteq A$, то для любого $n \in \omega$ существует $m \in \omega$ такое, что $\Delta_n(A) \restriction_B = \Delta_m(B)$.

2. Если φ - предложение сигнатуры $L \cup \langle C \rangle$ и φ совместно с $\Delta_n(A)$ (т.е. $\varphi(A) \in \Delta_m(A)$), то для любого конечного $B \supseteq A \cup c(\varphi)$ существует $m \in \omega$ такое, что $\Delta_n(A) \cup \{\varphi\} \subseteq \Delta_m(B)$.

3. Если $D = A \cap B$ и $\Delta_n(A) \restriction_D = \Delta_m(B) \restriction_D$, то существует $s \in \omega$ такое, что $\Delta_n(A) \cup \Delta_m(B) \subseteq \Delta_s(A \cup B)$.

3'. Если $B \subseteq A$ и $\Gamma_n(B)$ совместно с $\Delta_m(A)$ (т.е. $\varphi \in \Gamma_n(B) \Rightarrow \exists x_0 \varphi \in \Delta_m(A)$), то существует $s \in \omega$ такое, что $\Delta_m(A) \cup \Gamma_n(B) \subseteq \Gamma_s(A)$.

4. Для любых $A \in P_\omega(C)$, $c_k \notin A$ и $n \in \omega$ существует $m \in \omega$ такое, что $\Delta_m(A \cup \{c_k\}) = \Gamma_n(A)(c_k)$.

2. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ - эффективное перечисление всех предложений сигнатуры $L \cup \langle C \rangle$. Для любых $A, B \in P_\omega(C)$, $n, m \in \omega$, если $A \subseteq B$ и $\varphi_n(B)$ совместно с $\Delta_m(A)$ (т.е. $\varphi_n(A) \in \Delta_m(A)$), существует $s \in \omega$ такое, что $\Delta_m(A) \cup \{\varphi_n(B)\} \subseteq \Delta_s(B)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathfrak{M}$ - счетная однородная модель полной разрешимой теории с вычислимым семейством реализующихся типов, то* $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}\, \mathfrak{M}_\nu) \leq_T 0'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}$ - модель теории T. Расположим множество всех 1-типов теорий $T(A)$, определенных семейством S, реализующихся в модели $\mathfrak{M}$ типов, $\{\Gamma_n(A) \mid n \in \omega, A \in P_\omega(C)\}$

в эффективную последовательность $\Xi_0, \Xi_1, \dots$, так что по номеру Ξ можно эффективно найти соответствующее $n \in \omega$ и A (т.е. $\Xi = \Gamma_n(A)$); пусть $\Xi_n = \Gamma_{\sigma(n)}(A_n)$, σ - общерекурсивная функция. Если $c \in C$, то $\Xi_n(c) \rightleftharpoons \Gamma_{\sigma(n)}(A_n)(c)$. Будем предполагать также, что зафиксирован некоторый эффективный пересчет по шагам множеств Ξ_i и $\Delta_j(A)$ для всех $i, j \in \omega$; $A \in P_\omega(C)$; Ξ_i^n, $\Delta_j^n(A)$ будут обозначать конечные подмножества Ξ_i и $\Delta_j(A)$, перечисленные к концу шага n ($\Xi_i^n \subseteq \Xi_i^{n+1}$, $n \in \omega$; $\bigcup_{n\in\omega} \Xi_i^n = \Xi_i$; $\Delta_j^n(A) \subseteq \Delta_j^{n+1}(A)$, $n \in \omega$, $\bigcup_{n\in\omega} \Delta_j^n(A) = \Delta_j(A)$).

На шаге n будет построено конечное множество формул $\{\theta_0^n, \dots, \theta_n^n\}$. Для $i < n$ будем иметь $\theta_{i+1}^n \rightleftharpoons \theta_i^n \wedge \varphi_i$ или $\theta_{i+1}^n = \theta_i^n \wedge \neg \varphi_i$, где $\varphi_0, \dots, \varphi_i, \dots$ - последователь - ность из $2'$ сигнатуры $L \cup \langle C \rangle$. В конце конструкции для каждого $n \in \omega$ положим $\theta_n \rightleftharpoons \lim_{k\to\infty} \theta_n^k$, причем θ_n будет совместна с теорией T. Теория T_ω сигнатуры $L \cup \langle C \rangle$, определенная множеством аксиом $\{\theta_n \mid n \in \omega\}$, будет полным расширением теории T. Установим также, что если $\varphi_n = \exists x \varphi_n'(x) \in T_\omega$, то $\varphi'(c_s) \in T_\omega$ для некоторого $s \in \omega$. Тогда стандартным образом на константах $\{c_0, c_1, \dots\}$ строится модель $\mathfrak{M}'$ теории T_ω. Множество $\gamma^{-1}(T_\omega) \in \Delta_2^0$, или, эквивалентно, $\varphi^{-1}(T_\omega) \leq_T 0'$. Построение гарантирует, что $\mathfrak{M}' \upharpoonright L \cong \mathfrak{M}$.

В конце каждого шага n будут определены следующие объекты: вышеупомянутое множество $\{\theta_0^n, \dots, \theta_n^n\}$; натуральное число m_n, конечное множество $I_n \subseteq [m_n]$ ($\rightleftharpoons \{i: i \leq m_n\}$), функции $g^n\colon [m]\to\omega$, $f^n\colon I_n\to\omega$, $h^n\colon I_n\to\omega$, $r^n\colon I_n\to\omega$.

Введем следующие обозначения:

для $i \le m_n$:

$$B^n_i \rightleftharpoons \Big(\bigcup_{j\le i} A_j\Big)\cup\{\, f^n(j) \mid j\in I_n,\ j < i\} ;$$

для $i\in I_n$:

$$C^n_i \rightleftharpoons B^n_i \cup \{f^n(i)\}.$$

Если $i < j < m_n$, то $B^n_i \subseteq B^n_j$, если $i\in I_n$, то $B^n_i \subseteq C^n_i \subseteq B^n_j$.

Предполагается, что выполнены следующие условия для любого $i \le m_n$:

1^n_i. $\theta^n_n(B^n_i)\in \Delta_{g^n(i)}(B^n_i)$.

2^n_i. Если $i\in I_n$, то выполняется требование $L_n(i)$:

$$\Xi^{n+1}_i\cup \Delta^{n+1}_{g^n(i)}(B^n_i)\subseteq \Gamma_{h^n(i)}(B^n_i)$$

и

$$\theta^n_n(C^n_i)\in \Gamma_{h^n(i)}(B^n_i)(C_{f^n(i)}).$$

3^n_i. Если $i\in I_n$, то

$$\{\theta^n_n(B^n_i)\}\cup\Delta^{n+1}_{g^n(i)}(B^n_i)\cup \Xi^{n+1}_i$$

не совместно с T.

4^n. Требование H_n: $\Delta^{n+1}_{g^n(0)}(B^n_0)\subseteq \Xi_0$.

5^n_i. Если $i\in I_n$, то выполняется требование $R_n(i)$:

$$\Delta^{n+1}_{r^n(i)}(C^n_i) \subseteq \Gamma_{h^n(i)}(B^n_i)(c_{f^n(i)}$$

и для $0 < i < m_n$ выполняется требование $G^r_n(i)$:

$$\Delta^{n+1}_{r^n(i)}(C^n_i) \cup \{\varphi_{t_i}(B^n_{i+1})\} \subseteq \Delta_{g^n(i+1)}(B^n_{i+1}).$$

6^n_i. Если $i \notin I_n$, то для $0 < i < m_n$ выполняется требование

$$G_n(i): \ \Delta^{n+1}_{g^n(i)}(B^n_i) \cup \{\varphi_{t_i}(B^n_{i+1})\} \subseteq \Delta_{g^n(i+1)}(B^n_{i+1}).$$

<u>Шаг 0</u>.

$$\theta^0_0 \rightleftharpoons (c_0 = c_0);\ m_0 \rightleftharpoons 0;\ I_0 \rightleftharpoons \{0\};$$

$g^0(0)$ - наименьшее $s \in \omega$ такое, что $\Delta^1_s(A_0) \subseteq \Xi_0$;

$f^0(0)$ - наименьшее $t \in \omega$ такое, что $c_t \notin A_0 \cup \{c_0\}$,

$h^0(0) = \sigma(0)$;

$r^0(0)$ - наименьшее $r \in \omega$ такое, что

$$\Delta^1_r(A_0 \cup c_{f^0(0)}) \subseteq \Gamma_{h^0(0)}(A_0)(c_{f^0(0)}).$$

<u>Шаг $(n+1)$</u>.

Случай а).

Пусть все требования, рассмотренные на n-м шаге, выполняются и для $n \rightleftharpoons n+1$. Находим наибольшее $m \le m_n$ так, чтобы для $\theta'_{n+1} \rightleftharpoons \theta^n_n \wedge \varphi_n$ (или $\theta^n_n \wedge \neg\varphi_n$) выполнялись условия: для любого $i \le m$

1) $\theta'_{n+1}(B^n_i) \in \Delta_{g^n(i)}(B^n_i)$;

2) если $i \in I_n$, то выполняется требование $L_n(i)$ и

$$\theta'_{n+1}(C^n_i) \in \Gamma_{h^n(i)}(B^n_i)(c_{f^n(i)}).$$

Дополнительное условие: если $m < m_n$,то выбираем, если возможно, θ'_{n+1} так, чтобы было выполнено условие

$$\theta'_{n+1}(B^n_{m+1}) \in \Delta_{g^n(m+1)}(B^n_{m+1}).$$

Для $m = 0$ указанные условия можно выполнить, так что такое наибольшее $m \in \omega$ существует. Выбор θ'_{n+1} уже определен сформулированными условиями. Если $\theta^n_n \wedge \varphi_n$ и $\theta^n_n \wedge \neg\varphi_n$ удовлетворяют всем условиям, то полагаем $\theta'_{n+1} \rightleftharpoons \theta^n_n \wedge \varphi_n$.

Полагаем $\theta^{n+1}_i \rightleftharpoons \theta^n_i$ для $i \le n$ и $\theta^{n+1}_{n+1} \rightleftharpoons \theta'_{n+1}$;

$$m_{n+1} \rightleftharpoons m+1; \quad I'_{n+1} \rightleftharpoons I_n \cap [m]; \quad I'_{n+1} = I_{n+1} \cap [m];$$

$$g^{n+1} \restriction [m] \rightleftharpoons g^n \restriction [m]; \quad f^{n+1} \restriction I'_{n+1} \rightleftharpoons f^n \restriction I'_{n+1};$$

$$h^{n+1} \restriction I'_{n+1} \rightleftharpoons h^n \restriction I'_{n+1}; \quad r^{n+1} \restriction I'_{n+1} \rightleftharpoons r^n \restriction I'_{n+1}.$$

Заметим, что B^{n+1}_{m+1} уже определено и $B^{n+1}_{m+1} = B^n_{m+1}$, если $m < m_n$. Если $m < m_n$ и

$$\theta'_{n+1}(B^{n+1}_{m+1}) \in \Delta_{g^n(m+1)}(B^{n+1}_{m+1}),$$

то полагаем $g^{n+1}(m_{n+1}) \rightleftharpoons g^n(m_{n+1}) = g^n(m+1)$ (т.е. удовлетворили требование $G^r_n(m)$ или $G_n(m)$, если выполняется соответственно $m \in I_n$ или $m \notin I_n$).

Если $m = m_n$ или $m < m_n$ и

$$\theta'_{n+1}(B^{n+1}_{m+1}) \notin \Delta_{g^n(m+1)}(B^{n+1}_{m+1}),$$

то находим $t \in \omega$ такое, что $\theta'_{n+1} = \varphi_t$, и если $m \notin I_n$, то ищем наименьшее $s \in \omega$ такое, что

$$\Delta^{n+2}_{g^n(m)}(B^n_m) \cup \{\varphi_t(B^{n+1}_{m+1})\} \subseteq \Delta_s(B^{n+1}_{m+1}),$$

и полагаем $g^{n+1}(m+1) \rightleftharpoons s$ (т.е. удовлетворяем требованию $G_{n+1}(m)$; $\Delta^{n+2}_{g^n(m)}(B^n_m) = \Delta^{(n+1)+1}_{g^{n+1}(m)}(B^{n+1}_m))$. Если же $m \in I_n$, тогда $r^n(m)$ определено (по условию $r^{n+1}(m) = r^n(m)$). Ищем наименьший $s \in \omega$ такой, что

$$\Delta^{(n+1)+1}_{r^{n+1}(m)}(C^{n+1}_m) \cup \{\varphi_t(B^{n+1}_{m+1})\} \subseteq \Delta_s(B^{n+1}_{m+1}),$$

и полагаем $g^{n+1}(m+1) \rightleftharpoons s$ (т.е. удовлетворяем требованию $G^r_n(m)$).

Далее рассматриваем конечное множество формул

$$\{\theta^{n+1}_{n+1}(B^{n+1}_{m+1})\} \cup \Xi^{n+1}_{m+1} \cup \Delta^{n+1}_{g^{n+1}(m+1)}(B^{n+1}_{m+1});$$

если это множество не совместно с T, то полагаем $I_{n+1} \rightleftharpoons I'_{n+1}$, и все уже определено. Если это множество совместно с T, то полагаем $I_{n+1} = I'_{n+1} \cup \{m+1\}$; находим $r \in \omega$ такое, что $c_r \notin B^{n+1}_{m+1} \cup c(\theta'_{n+1})$, и полагаем $f^{n+1}(m+1) \rightleftharpoons r$. Находим теперь наименьшее $t \in \omega$ такое, что

$$\{\theta'_{n+1}(B^{n+1}_{m+1})\} \cup \Xi^{(n+1)+1}_{m_{n+1}} \cup \Delta^{(n+1)+1}_{g^{n+1}(m+1}(B^{n+1}_{m+1}) \subseteq$$

$$\subseteq \Gamma_t(B^{n+1}_{m+1}),$$

и полагаем $h^{n+1}(m+1) \rightleftharpoons t$ ($m_{n+1} = m+1$, удовлетворили требованию $L_{n+1}(m+1)$). Находим наименьшее $s \in \omega$ такое, что

$$\Delta_s^{(n+1)+1}(C_{m+1}^{n+1}) \subseteq \Gamma_{h^{n+1}(m+1)}(B_{m+1}^{n+1})(c_{f^{n+1}(m+1)}).$$

Конструкция для случая "а" завершена.

Случай б). На шаге $(n+1)$ нарушено хотя бы одно из требований H_{n+1}; $R_{n+1}(i)$ для $i \in I_{n+1}$; $G_{n+1}^r(i)$ для $i < m_{n+1}$ и $i \in I_{n+1}$; $G_{n+1}(i)$ для $i < m_{n+1}$ и $i \notin I_{n+1}$; $L_{n+1}(i)$ для $i \in I_{n+1}$.

Опишем процессы устранения нарушений требований.

Пусть нарушено требование H_{n+1} (т.е. $\Delta_{g^{n+1}(0)}(B_0^{n+1}) \not\subseteq \Xi_0$), тогда находим наименьшее $s \in \omega$: $s > g^{n+1}(0)$ и $\Delta_s(B_0^{n+1}) \subseteq \Xi_0$ и переопределяем $g^{n+1}(0)$, $g^{n+1}(0) \rightleftharpoons s$.

Пусть нарушено $R_{n+1}(i)$ для $i \in I_{n+1}$ (т.е.

$$\Delta_{r^{n+1}(i)}^{(n+1)+1}(C_i^{n+1}) \not\subseteq \Gamma_{h^{n+1}(i)}(B_i^{n+1})(C_{f^{n+1}(i)})),$$

тогда выбираем наименьшее $s \in \omega$: $s > r^{n+1}(i)$ и

$$\Delta_s^{(n+1)+1}(C_i^{n+1}) \subseteq \Gamma_{h^{n+1}(i)}(B_i^{n+1})(c_{f^{n+1}(i)})$$

и определим $r^{n+1}(i) \rightleftharpoons s$.

Пусть нарушилось требование $G_{n+1}^r(i)$ для $i \in I_{n+1}$ и $0 < i < m_{n+1}$, т.е.

$$\Delta_{r^{n+1}(i)}^{(n+1)+1}(C_i^{n+1}) \cup \{\varphi_{t_i}(B_{i+1}^{n+1})\} \not\subseteq \Delta_{g^{n+1}(i+1)}(B_{i+1}^{n+1}),$$

тогда ищем наименьшее $s \in \omega$: $s > g^{n+1}(i+1)$ и

$$\Delta^{(n+1)+1}_{r^{n+1}(i)}(C^{n+1}_i) \cup \{\varphi_{t_i}(B^{n+1}_{i+1})\} \subseteq \Delta_s(B^{n+1}_{i+1})$$

и определим $g^{n+1}(i+1) \rightleftharpoons s$.

Пусть нарушилось требование $G_{n+1}(i)$ для $i < m_{n+1}$ и $i \notin I_{n+1}$, тогда ищем наименьшее $s \in \omega$ такое, что $s > g^{n+1}(i+1)$ и

$$\Delta^{(n+1)+1}_{g^{n+1}(i)}(B^{n+1}_i) \cup \{\varphi_{t_i}(B^{n+1}_{i+1})\} \subseteq \Delta_s(B^{n+1}_{i+1}),$$

и определим $g^{n+1}(i+1) \rightleftharpoons s$.

Пусть нарушилось требование $L_{n+1}(i)$, тогда либо

$$\Delta^{(n+1)+1}_{g^{n+1}(i)}(B^{n+1}_i) \cup \Xi^{(n+1)+1}_i \not\subseteq \Gamma_{h^{n+1}(i)}(B^{n+1}_i),$$

либо $\Delta^{(n+1)+1}_{g^{n+1}(i)} \cup \Xi^{(n+1)+1}_i$ не совместно с T . В первом случае находим наименьшее $s \in \omega$: $s > h^{n+1}(i)$ и

$$\Xi^{(n+1)+1}_i \cup \Delta^{(n+1)+1}_{g^{n+1}(i)}(B^{n+1}_i) \subseteq \Gamma_s(B^{n+1}_i)$$

и определим $h^{n+1}(i) \rightleftharpoons s$; во втором случае положим $i \notin I_{n+1}$

Определим приоритеты требований. Пусть $i \in \omega$, $n > 1$.

Приоритет требования H_n больше приоритета требования $G^r_n(i)$, если $i \in I_n$, или требования $G_n(i)$, если $i \notin I_n$. В свою очередь приоритеты требований $G^r_n(i)$ и $G_n(i)$ больше приоритета требования $L_n(i)$, если $i \in I_n$. Далее, приоритет требования $L_n(i)$ больше приоритета требования $R_n(i)$, если $i \in I_n$. При фиксированном $n \in \omega$ и возрастающем $i \in \omega$ приоритеты требований (с учетом вышесказанного) убывают.

Переходим непосредственно к описанию конструкции в случае "б". Пусть имеются наруше ния требований. Находим требова -

ние более высокого приоритета, которое нарушилось. Затем переходим к шагу (пусть будет это шаг i_0), с которого мы начали удовлетворять этому требованию, и действуем по инструкции устранения нарушения этого требования на этом шаге. Мы получим ситуацию, аналогичную случаю "а" на шаге i_0. Однако мы еще имеем дополнительную информацию о других нарушениях требований (если таковые нарушения есть), которую мы можем использовать. Действуя таким образом $(n - i_0)$ раз, мы к шагу $(n+1)$ получим ситуацию, аналогичную случаю "а". Конструкция описана.

ЛЕММА 1. *Для любого* $i \in \omega$ *существует* $s \in \omega$ *такое, что для любого* n, $n \geq s$ *, либо требование* $L_n(i)$ $(R_n(i), G_n^r(i), G_n(i))$ *не определено, либо требование* $L_n(i)$ $(H_n, R_n(i), G_n^r(i), G_n(i))$ *не нарушается.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для всех $j < i$ все требования стабилизировались (т.е. выполняются условия леммы 1). Пусть $i \in I_n$, значение функций $g^n(i)$ стабилизировалось, тогда требование $L_n(i)$ может нарушиться в двух случаях. В первом случае $\Delta^{(n+1)}_{g^n(i)}(B_i^n) \cup \Xi_i^{n+1}$ не совместно с T . В этом случае полагаем, что $i \notin I_n$, и начальный сегмент $I_n \cap \{0,\dots,i\}$ не изменится при $n \to \infty$.

Во втором случае

$$\Delta^{(n+1)}_{g^n(i)}(B_i^n) \cup \Xi_i^{(n+1)} \subseteq \Gamma_{h^n(i)}(B_i^n).$$

Будем устранять это нарушение. Таких нарушений требований будет конечное число раз, в противном случае не выполнится условие однородности. Доказательство леммы для остальных требований аналогично случаю $L_n(i)$. Лемма доказана.

Получим эффективные последовательности множеств:

$$\{\theta_0^n, \ldots, \theta_n^n \mid n \in \omega\}, \ \{I_n \mid n \in \omega\}, \ \{B_i^n \mid i \leq m_n\},$$

$$\{m_n \mid n \in \omega\}, \ \{C_i^n \mid i \in I_n\}.$$

Положим

$$\{\theta_i \mid i \in \omega\} \rightleftharpoons \lim_{n\to\infty}\{\theta_0^n, \ldots, \theta_1^n, \ldots\},$$

$$I \rightleftharpoons \lim_{n\to\infty}\{I_n\}, \quad B_i \rightleftharpoons \lim_{n\to\infty}\{B_i^n\},$$

$$g(i) = \lim_{n\to\infty} g^n(i)$$

и $T_\omega \rightleftharpoons \bigcup_{i\in\omega} \Delta_{g(i)}(B_i)$ - полное непротиворечивое расширение теории T. Пусть $\mathfrak{M}' \models T_\omega$ и $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}' | L$. Получили $\gamma^{-1}(T_\omega) \in \Delta_2^0$, или то же самое $\gamma^{-1}(T_\omega) \leq_T 0'$.

§3. О точности верхней оценки сложности

В §2 доказано существование нумерации ν однородной модели γ с вычислимым семейством типов такой, что

$$\gamma^{-1}(Th\ \mathfrak{M}_\nu) \leq_T 0'.$$

Покажем, что для любого $A < 0'$ существует полная разрешимая теория T такая, что $\gamma^{-1}(Th\ \mathfrak{M}_\nu) \nleq_T A$ для любой нумерации ν однородной модели $\mathfrak{M}$ этой теории с A-вычислимым семейством реализующихся типов.

Пусть $A \leq_T 0'$, тогда существует эффективная последовательность конечных множеств $\{A_i \mid i \in \omega\}$ такая, что

$$\forall n((n \in A) \Leftrightarrow (\exists i)(\forall j \geq i)(n \in A_j)),$$

$$\forall n((n \notin A) \Leftrightarrow (\exists i)(\forall j \geq i)(n \notin A_j)).$$

Семейство типов S называется A-вычислимым, если

$$\gamma^{-1}(S) = \{\gamma^{-1}(p) \mid p \in S\}$$

совпадает с $\mathrm{Val}\ \varphi_z^A$ для некоторого $z \in \omega$, где $\mathrm{Val}\ \varphi_z^A$ означает область значений частично-рекурсивной функции с оракулом A и индексом z.

В [2] был построен пример полной разрешимой теории, допускающей элиминацию кванторов. Будем использовать A-релятивизированный вариант этого примера.

Для произвольного $B \subseteq \omega$ обозначим через θ_B функцию

$$\theta_B(n) = \text{число элементов } \{0,1,\ldots,n-1\} \cap B .$$

Множество B назовем A-рекурсивно-перечислимым (A-р.п.), если $B = \mathrm{Val}\ \varphi_z^A$ для некоторого $z \in \omega$.

Пусть B – A-р.п. множество. Назовем B – A-аппроксимируемым множеством, если существует о.р.ф. $\varphi^A(x)$ такая, что

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \forall x(\varphi^A(x) \le \theta_B(x)), \\ &2)\ \exists^\omega x(\varphi^A(x) = \theta_B(x)), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\exists^\omega$ означает "существует бесконечно много".

Далее, S_B - это семейство типов, ассоциированных с множеством B (см. [2]).

ЛЕММА 2 (релятивизированный вариант леммы 2.4 из [2]). *Если B – A-р.п. множество и однородная модель $\mathfrak{M}$, реализующая в точности типы из S_B, A-конструктивизируема, то B – A-аппроксимируема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полные A-релятивизации множеств и функций из леммы 2.4 [2]. Заметим, что семейство типов S_B из условия леммы является A-вычислимым семейством. Более подробно нужно смотреть в [2] и использовать A-релятивизацию.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного множества* A *такого, что* $A <_T O'$, *существует* A-*р.п. множество* B, *которое не* A-*аппроксимируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через ${}^{+}O_n^i, {}^{-}O_n^i$ мы будем обозначать множества

$^{(-)+}O_n^i(x_i)=\{y|f_n^i(x_i)$ вычислились и использовались положительные (отрицательные) ответы на вопрос "$y\in A_i$?"$\}$.

Пусть $\{f_n^i(x)|n<\omega\}$ - клиниевская нумерация всех частично-рекурсивных функций с одной переменной и оракулом A_i, $i<\omega, f_n^{i,t}$ - конечная часть f_n^i, вычисленная к моменту t, причем $f_n^{i,t}=\emptyset$ при $i,n>t$. Предполагаем, что функция $\langle x,y\rangle$ - нумерация пар обладает свойством: для любого $x<\omega$ функция $\lambda y\langle x,y\rangle$ монотонно возрастает.

Пусть $\{f_n^A(x)|n\in\omega\}$ - клиниевская нумерация всех частично-рекурсивных функций с одной переменной и оракулом A, A из условия теоремы.

ЛЕММА 3. *Пусть* $f_n^A(x)$ *определена,* A *из условия теоремы 2, тогда существует функция* $f_n^{j_0}(x)$ *такая, что*

1) ${}^{+}O_n^{j_0}\subseteq A_j$ *для всех* $j\geq j_0$;

2) ${}^{-}O_n^{j_0}\cap A_j=\emptyset$ *для всех* $j\geq j_0$;

3) $f_n^{j_0}(x)=f_n^A(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переформулируем определение множества $A\leq_T O'$ следующим образом: $A\leq_T O' \overset{df}{\Leftrightarrow}$

1) для $\forall A'\ (|A'|<\omega)(A'\subseteq A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ i(\exists j \geq i)A' \subseteq A_j),$$

2) для $\forall A'\ (|A'|<\omega)(A'\cap A = \emptyset \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ i(\exists j \geq i)A'\cap A_j = \emptyset).$$

Если $f_n^A(x)$ сходится, то она использует лишь конечное число вопросов к оракулу, т.е. множества ${}^{+}O_n$, ${}^{-}O_n$ конечны и они с моментов j_1 и j_2 удовлетворяют условию ${}^{+}O_n \subseteq A_j$ для всех $j \geq j_1$ и ${}^{-}O_n \cap A_j = \emptyset$ для всех $j \geq j_2$. Таким образом, $j_0 = \max(j_1, j_2)$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.

Из условия леммы 3 можно получить следующее описание функции $f_n^A(x)$, если она всюду определена:

$$\mathrm{Val}\ f_n^A = \{f_n^{j_0}(0),\dots,f_n^{j_k}(k),\dots\}.$$

По шагам t, $t\in\omega$, будем строить множества I_t^n, B_t, $n<\omega$. Искомое не A-аппроксимируемое множество $B = \lim\limits_{t\to\infty} B_t$, $I^n = \lim\limits_{t\to\infty} I_t^n$, $i\in I^n \Leftrightarrow f_n^i(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3 для некоторого $x<\omega$.

<u>Шаг $t=0$.</u> $I_0^0 = \emptyset$, $B_0 = \emptyset$.

<u>Шаг $t>0$.</u> Пусть определены I_{t-1}^m, B_{t-1}, где все $m \leq$ $\leq t-1$.

Для $i,n,t<\omega$ определим предикат $P(i,n,t)$: $P(i,n,t)$ истинен $\Leftrightarrow f_n^{i,t}(x_i)$ вычислилось для некоторого $x_i<\omega$ и ${}^{+}O_n^i \subseteq A_j$, ${}^{-}O_n^i \cap A_j = \emptyset$ для $j:\ i<j\leq 2t$.

Рассмотрим два возможных случая.

Случай А. Пусть $P(i,n,t)$ истинен для всех i,n таких, что $n \le t-1$ и $i \in I^n_{t-1}$. Тогда положим

$$I^n_t = I^n_{t-1} \cup \{i \mid P(i,n,t)\},$$

$$I^t_t = \{i \mid P(i,t,t)\}, \qquad B_t = B_{t-1} \cup M_t,$$

где M_t - множество всех таких a, $a < \omega$, для которых выполнены условия (предварительно вычисляем $a = \langle n,k \rangle$, $b = \langle n, k+1 \rangle$).

1) существуют $i_{a+1},\ldots,i_b \in I^n_t$ такие, что $\{a+1,b\}$ образуют интервал $[a+1,b]$;

2) $\forall x \in [a+1,b]\ \ f_n^{i_x,t}(x) \le \theta_{B_{t-1}}(x)$.

Случай Б. Пусть $i_0,\ldots,i_{k_0}$ - это все значения i, при котором $P(i,n_0,t)$ ложен, $n_0 \le t-1$. Положим

$$I^{n_0}_t = (I^{n_0}_{t-1} \setminus \{i_0,\ldots,i_{k_0}\}) \cup \{t \mid P(t,n_0,t)\},$$

$$\vdots$$

$$\bar{I}^{n_j}_t = \{i \mid {}^{\neg} P(i,n_j,t)\}, \qquad j < t,$$

$$I^t_t = \{i \mid P(i,t,t)\},$$

$$\bar{I}^t_t = \emptyset.$$

Пусть t_0 - шаг конструкции, где впервые была использована функция с индексом i, $i \in \bigcup_{j<t} \bar{I}^{n_j}_t$, для того, чтобы положить некоторый элемент a в множество B_{t_0}.

Пусть $i \in \bar{I}_t^{n_0}$.

Рассмотрим шаг t_0 нашей конструкции. Переопределим множества:

$$\tilde{I}^n_{t_0} = I^n_{t_0} \setminus \bar{I}^n_t \quad \text{для всех} \quad n \le t_0,$$

$$\tilde{I}^n_{t_1} = I^n_{t_1} \setminus I^n_t \quad \text{для} \quad n \le t_1 < t ,$$

$$\tilde{I}^t_t = I^t_t .$$

Будем образовывать последовательность множеств $B'_{t_0}, \ldots$ $\ldots, B'_{t-1}$, как в случае А, но уже используя только элементы из множеств $\tilde{I}^{n_i}_{t_i}$. Естественно, что функция θ также изменится, т.е. $\theta_{B'_{t_0}}(x), \ldots, \theta_{B'_{t-1}}(x)$. Теперь будем строить B_t уже исходя из построенных $\tilde{I}^n_t$, B'_{t-1}, $\theta_{B'_{t-1}}$, как в случае А. Конструкция описана полностью.

По нашей конструкции ясно, что $B = W^A_x$ для некоторого $x \in \omega$. Покажем, что множество B есть искомое не А-аппроксимируемое множество. Пусть $f^A_n(x)$ - о.р.ф. и $\forall x\ (f_n(x) \le$ $\le \theta_B(x))$. Докажем, что

$$\forall x[x > \langle n,0\rangle \Rightarrow f^A_n(x) < \theta_B(x)].$$

Пусть $x_0 > \langle n,0\rangle$. Выберем k так, что

$$\langle n,k\rangle < x_0 \le \langle n,k+1\rangle .$$

Обозначим $a = \langle n, k\rangle$, $b = \langle n, k+1\rangle$. Рассмотрим такой шаг t_0, что выполняется

1) $a \notin B_{t_0-1}$; $a \in B_{t_0}$,

2) $\{0,\ldots,b\} \cap B_{t_0-1} \subseteq \{0,\ldots,b\} \cap B_{t_0} \subseteq B_t$

для всех $t > t_0$.

На этом же шаге имеем, что

$$f_n^A(x_0) = f_n^{i_0,t_0}(x_0) \le \theta_{B_{t-1}}(x_0) < \theta_{B_t}(x_0) =$$

$$= \theta_{B\cap\{0,\ldots,b\}}(x_0)$$

и $\forall i > i_0 \quad {}^{+}0_n^{i_0} \subseteq A_i$ и ${}^{-}0_n^{i_0} \cap A_i = \emptyset$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь $S = S_B$, где B - построенное множество. Тогда по лемме 3 однородная модель $\mathfrak{M}$, реализующая А-вычислимое семейство типов S_B, не может быть А-конструктивизируемой. Следовательно, $\mathfrak{M}$ не А-сильно конструктивизируема.

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого* A, $A < 0'$, *существуют полная разрешимая теория* T *и однородная модель* $\mathfrak{M}$ *этой теории, реализующая А-вычислимое семейство типов, такая что* $\gamma^{-1}(Th\,\mathfrak{M}_\nu) \not\le_T A$ *для любой нумерации* ν *этой модели.*

Выражаю большую признательность С.С.Гончарову за поставленную задачу и полезные советы.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С., ДРОБОТУН Б.Н. О нумерациях насыщенных и однородных моделей //Сиб.матем.ж. - Новосибирск. - 1980.-Т.21, № 2. - С. 25-41.

2. ПЕРЕТЯТЬКИН М.Г. Критерий сильной конструктивизируемости однородной модели //Алгебра и логика. - Новосибирск. -1978. - Т.17, №4. - С.436-454.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Сильная конструктивизируемость однородных моделей //Там же. - С. 363-388.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980. - С. 365-390.

5. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М.: Мир, 1972.

6. ТУСУПОВ Д.А. Предельно вычислимые однородные модели //Тезисы П конференции молодых ученых Сибири и Дальнего Востока. Новосибирск, 1988. - С. 162-164.

Поступила в ред.-изд.отд.

29 сентября 1988 года