ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1989 год Выпуск 129

УДК 517.12

О СВЯЗИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ С ТРАДИЦИОННЫМИ ПОДХОДАМИ

С.П.Одинцов

Понятие "относительно конструктивные системы" было введено К.Ф.Самохваловым [1]. Определяя эти системы, автор [1] исходил из того, что конструктивный смысл сложной формулы определяется только ее внешней связкой и структурой дедуктивного аппарата теории. Это принципиальное отличие от таких традиционных подходов, как реализуемость по Клини [2], где конструктивный смысл формулы редуцируется к конструктивным смыслам ее конституэнтов, и от теории конструктивных моделей [3,гл.6], где решается вопрос об алгоритмической сложности проблемы истинности для различных классов формул на модели. Во втором случае мы вообще имеем дело только с массовыми проблемами и вопрос о конструктивном смысле конкретной формулы оказывается лишенным смысла.

Цель данной статьи - проследить связь предложенного подхода с двумя упомянутыми традиционными.

Основные понятия работы [1] не общеприняты, поэтому имеет смысл привести их полностью.

Мы будем работать с обычным языком первого порядка $\mathbf{L}$ сигнатуры σ с логическими символами $\&$, $\vee$, $\supset$, $\forall$, $\exists$, $\perp$, где $\perp$ - атомное высказывание "ложь". "Равенства" нет, если это специально не оговорено; $U_{\mathbf{L}}$ - множество замкнутых термов языка $\mathbf{L}$.

Пусть $\mathbf{T}$ - исчисление в языке $\mathbf{L}$ [4, с.21-22]. Назовем $\mathbf{T}$ формальным, если множество $\mathrm{Thm}(\mathbf{T})$ теорем $\mathbf{T}$ эффективно перечислимо; противоречивым, если $\mathrm{Thm}(\mathbf{T}) = \mathbf{F}(\mathbf{L})$, где $\mathbf{F}(\mathbf{L})$ - множество всех формул языка $\mathbf{L}$, и непротиворечивым, если $\perp \notin \mathrm{Thm}(\mathbf{L})$. Вместо $\varphi \in \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$ будем иногда писать $\mathbf{T} \vdash \varphi$.

Следуя [1], для любого формального $\mathbf{T}$ в $\mathbf{L}$ определим специальное множество $C(\mathbf{T})$ формул в $\mathbf{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

(i) Если φ - атомная формула $\mathbf{L}$, то $\varphi \in C(\mathbf{T})$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$;

(ii) если φ имеет вид $(\varphi_1 \& \varphi_2)$, то $\varphi \in C(\mathbf{T})$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 \in \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$ и $\varphi_2 \in \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$;

(iii) если φ имеет вид $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, то $\varphi \in C(\mathbf{T})$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 \in \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$ или $\varphi_2 \in \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$;

(iv) если φ имеет вид $(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, то $\varphi \in C(\mathbf{T})$ тогда и только тогда, когда существует эффективное (вообще говоря, частичное) отображение $\mathbf{A}_{\varphi_1 \supset \varphi_2}$ из множества всех в $\mathbf{T}$ доказательств в себя, такое что если $\mathbf{x}$ - доказательство в $\mathbf{T}$ формулы φ_1, то $\mathbf{A}_{\varphi_1 \supset \varphi_2}$ определено на $\mathbf{x}$ и $\mathbf{A}_{\varphi_1 \supset \varphi_2}(\mathbf{x})$ - доказательство в $\mathbf{T}$ формулы φ_2;

(v) если φ имеет вид $\forall \mathbf{x}\, \varphi_1(\mathbf{x})$, то $\varphi \in C(\mathbf{T})$ тогда и только тогда, когда существует эффективное тотальное отображение $\mathbf{A}_{\forall \mathbf{x} \varphi_1(\mathbf{x})}$ из $\mathbf{U_L}$ во множество всех доказательств в $\mathbf{T}$ такое, что $\mathbf{A}_{\forall \mathbf{x} \varphi_1(\mathbf{x})}(\mathbf{t})$ - доказательство в $\mathbf{T}$ формулы $\varphi_1(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{U_L}$;

(vi) если φ имеет вид $\exists \mathbf{x}\, \varphi_1(\mathbf{x})$, то $\varphi \in C(\mathbf{T})$ тогда и только тогда, когда для некоторого замкнутого терма $\mathbf{t}$ в $\mathbf{L}$ имеем $\varphi_1(\mathbf{t}) \in \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$.

Формулы из $C(T)$ будем называть конструктивно истинными относительно T (T-истинными).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формальное исчисление T в L называется конструктивной системой, если всякая теорема T является конструктивно истинной относительно T. Конструктивная система называется точной, если всякая конструктивно истинная относительно T формула доказуема в T.

Напомним, что эрбрановым универсумом U_L языка L называется множество замкнутых термов этого языка. На U_L естественным образом заданы сигнатурные операции: $f^{U_L}(t_1,\ldots,t_n)=f(t_1,\ldots,t_n)$. Под эрбрановой моделью языка L понимаем любую модель этого языка, заданную на универсуме U_L так, что сигнатурные операции совпадают с заданными выше. Таким образом, всякая эрбранова модель $\mathfrak{M}$ полностью определяется множеством замкнутых атомных формул $\{P(\bar{t}) \mid \mathfrak{M} \models P(\bar{t})\}$. Эрбранова модель называется разрешимой (эффективной), если разрешимо множество гёделевых номеров (бескванторных) формул, истинных в этой модели. Понятие разрешимой (эффективной) эрбрановой модели является частным случаем понятия сильно конструктивной (конструктивной) модели. Это следствие того, что эрбранов универсум и стандартные операции на нем допускают естественное эффективное представление. Связь между точными конструктивными системами и разрешимыми эрбрановыми моделями устанавливает

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* T *- непротиворечивое формальное исчисление в* L. *Исчисление* T *является точной конструктивной системой тогда и только тогда, когда* $Thm(T) = Th(\mathfrak{M})$, *где* $\mathfrak{M}$ *- некоторая разрешимая эрбранова модель языка* L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T - точная конструктивная система, т.е. имеет место равенство $C(T) = Thm(T)$. Модель $\mathfrak{M}_T$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{M}_T \rightleftharpoons \{P(\bar{t}) \mid P(\bar{t}) \in Thm(T)\}.$$

Докажем индукцией по сложности формулы, что истинность в $\mathfrak{M}_T$ совпадает с доказуемостью в T.

i) Если φ - замкнутая атомная формула, то $\mathfrak{M}_T \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $T \vdash \varphi$ по определению $\mathfrak{M}_T$.

ii) Пусть $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$. Если $T \vdash \varphi$, то $\varphi \in C(T)$. Следовательно, $T \vdash \varphi_1$ или $T \vdash \varphi_2$, и, по индукционному предположению, $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1$ или $\mathfrak{M}_T \models \varphi_2$, поэтому $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1 \vee \varphi_2$. Если $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1 \vee \varphi_2$, то $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1$ или $\mathfrak{M}_T \models \varphi_2$ и, по индукционному предположению, $T \vdash \varphi_1$ или $T \vdash \varphi_2$, значит, $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in C(T) = Thm(T)$.

iii) Пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Этот случай рассматривается точно так же, как и предыдущий.

iv) Пусть $\varphi = \varphi_1 \supset \varphi_2$. Если $T \vdash \varphi_1 \supset \varphi_2$, то из выводимости $T \vdash \varphi_1$ следует выводимость $T \vdash \varphi_2$, так как $\varphi_1 \supset \varphi_2 \in C(T)$, значит, из истинности $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1$ слудует истинность $\mathfrak{M}_T \models \varphi_2$, поэтому $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1 \supset \varphi_2$. Если $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1 \supset \varphi_2$, то возможны случаи $\mathfrak{M}_T \not\models \varphi_1$ либо $\mathfrak{M}_T \models \varphi_1$ и $\mathfrak{M}_T \models \varphi_2$, т.е., по индукционному предположению, $T \nvdash \varphi_1$ либо $T \vdash \varphi_1$ и $T \vdash \varphi_2$. В любом случае $\varphi_1 \supset \varphi_2 \in C(T) = Thm(T)$, так как в качестве $A_{\varphi_1 \supset \varphi_2}$ в первом случае можно взять произвольную частично-рекурсивную функцию. Во втором случае в качестве $A_{\varphi_1 \supset \varphi_2}$ можно взять постоянную функцию, значение которой есть код доказательства формулы φ_2.

v) Пусть $\varphi = \exists x\, \varphi_1(x)$. Выводимость $T \vdash \exists x \varphi_1(x)$ эквивалентна существованию терма $t \in U_L$ такого, что $T \vdash \varphi_1(t)$. Это следует из равенства $C(T) = Thm(T)$. Формула $\varphi_1(t)$ проще, поэтому

$$\mathfrak{M}_T \models \varphi_1(t) \Leftrightarrow T \vdash \varphi_1(t).$$

Требуемая эквивалентность следует из того, что всякий элемент модели $\mathfrak{M}_T$ является значением замкнутого терма.

vi) Последний случай $\varphi = \forall x\ \varphi_1(x)$. Имеем цепочку эквивалентностей

$$T \vdash \forall x \varphi_1(x) \Leftrightarrow \forall x \varphi_1(x) \in C(T) \Leftrightarrow (\forall t \in U_L) T \vdash \varphi_1(t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall t \in U_L)\ \mathfrak{M}_T \models \varphi_1(t) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_T \models \forall x\ \varphi_1(x).$$

Итак, если конструктивная система T удовлетворяет условию точности, то определение конструктивной истинности относительно T становится индуктивным. Действительно, конструктивная истинность формулы φ определяется через доказуемость более простых формул, которая совпадает с их конструктивной истинностью. Получим индуктивное определение, совпадающее с обычной классической теоретико-модельной семантикой.

Разрешимость модели $\mathfrak{M}_T$ следует из перечислимости $Thm(T)$ и из полноты теории модели $\mathfrak{M}_T$.

Если $\mathfrak{M}$ - разрешимая эрбранова модель, то $Th(\mathfrak{M})$ - точная конструктивная система. Теперь это становится очевидным.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* T *- точная конструктивная не-противоречивая система, то* T *- классическая полная разрешимая теория.*

Мы доказали, что точные конструктивные системы являются классическими, следовательно, допускают стандартную теоретико-модельную семантику. Это дает возможность поставить вопрос о точных конструктивных системах с равенством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть T - непротиворечивое исчисление в L. Двухместный предикатный символ $\approx \in \sigma$ допускает равенство относительно T, если существует $\mathfrak{M}$ - модель для $Thm(T)$, в которой "$\approx$" интерпретируется как равенство.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathbf{T}$ *- точная конструктивная система и предикат* " $\approx$ " *допускает равенство относительно* $\mathbf{T}$ *, тогда* $\mathbf{T}$ *имеет сильно конструктивную модель, порожденную сигнатурными константами, в которой* " $\approx$ " *интерпретируется как равенство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M} \models \mathrm{Thm}(\mathbf{T})$ и в $\mathfrak{M}$ предикат " $\approx$ " интерпретируется как равенство. Система $\mathbf{T}$ полна по следствию 1, поэтому $\mathrm{Thm}(\mathbf{T}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. В $\mathfrak{M}$ выполнены аксиомы равенства для $\mathbf{T}$, поэтому они являются теоремами $\mathbf{T}$. Имеем

1) $\mathrm{T} \vdash x \approx x$,

2) $\mathrm{T} \vdash x \approx y \supset y \approx x$,

3) $\mathrm{T} \vdash x \approx y \wedge y \approx z \supset y \approx z$,

4) $\mathrm{T} \vdash x_1 \approx y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \approx y_n \supset f(x_1, \ldots, x_n) \approx$
$\approx f(y_1, \ldots, y_n)$,

5) $\mathrm{T} \vdash x_1 \approx y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \approx y_n \supset (P(x_1, \ldots, x_n) \supset$
$\supset P(y_1, \ldots, y_n))$.

Рассмотрим эрбранову модель $\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}$, построенную в теореме 1. Условия 1-4 означают, что предикат " $\approx$ " является конгруэнцией на $\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}$, поэтому мы можем определить фактор-систему по этой конгруэнции. Обозначим ее через $\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}^{\approx}$. Предикат " $\approx$ " интерпретируется на $\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}^{\approx}$ как равенство. Условие 5 гарантирует, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}^{\approx})$. Модель $\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}^{\approx}$ порождается константами, так как она - фактор-система $\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}$, и сильно конструктивна, так как $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}^{\approx})$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Итак, полная теория сильно конструктивной модели $\mathfrak{M}$, порожденной сигнатурными константами, является точной конструктивной системой. Отметим, что для таких моделей тривиальным образом решается проблема рекурсивной устойчивости.

Если модель порождается сигнатурными константами, то любые две конструктивизации такой модели эквивалентны. Более того, если полная теория такой модели разрешима, т.е. это модель точной конструктивной системы, то любая ее конструктивизация является сильной.

Теперь займемся изучением связи относительной конструктивности и клиниевской реализуемости.

Пусть $\mathfrak{M}$ - произвольная модель языка $\mathbf{L}$. По аналогии с реализуемостью формул арифметики, введенной Клини [2], определим реализуемость замкнутых формул языка $\mathbf{L}$ относительно модели $\mathfrak{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

i) Число 0 является реализацией атомной формулы $P(\bar{t})$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{M} \models P(\bar{t})$;

ii) число e реализует формулу $\varphi_1 \,\&\, \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $e = 2^a \cdot 3^b$, где a реализует φ_1, а b реализует φ_2 ;

iii) число e реализует $\varphi_1 \vee \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $e = 2^0 \cdot 3^a$, где a реализует φ_1 , или $e = 2^1 \cdot 3^b$, где b реализует φ_2 ;

iv) число e реализует $\varphi_1 \supset \varphi_2$, если e является номером частично-рекурсивной функции φ_e такой, что если a реализует φ_1 , то $\varphi_e(a)$ реализует φ_2 ;

v) число e реализует $\exists x\, \varphi(x)$, если $e = 2^x \cdot 3^a$, где x - гёделев номер терма t и a реализует $\varphi(t)$;

vi) число e реализует формулу $\forall x\, \varphi(x)$, если e является гёделевым номером чистично-рекурсивной функции φ_e такой, что для любого числа x значение $\varphi_e(x)$ реализует формулу $\varphi(t)$, где t - терм с номером x .

Формула называется реализуемой, если существует число, реализующее эту формулу. Это определение отличается от определе -

ния, предложенного Клини [2, с. 443-444], только в п.i. Мы заменили стандартную модель арифметики произвольной моделью, оставив неизменными принципы построения реализации формулы по реализациям ее конституентов. Другие обобщения понятия реализуемости рассматривали ранее В.Е. Плиско [5] и А.А.Воронков [6,7]. Наиболее близка к оригиналу и, следовательно, к нашему определению конструктивная семантика, предложенная А.А.Воронковым [7]. Он основное внимание уделил расшифровке понятия реализации. Реализация формулы это уже не число, а специальным образом сконструированная информационная система. Однако для наших целей вполне достаточно предложенного выше более простого определения.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\mathbf{T}$ *- точная конструктивная система* $\mathbf{Thm}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}(\mathfrak{M}_{\mathbf{T}})$ *, где* $\mathfrak{M}_{\mathbf{T}}$ *- порожденная константами разрешимая модель для* $\mathbf{T}$ *. Тогда множество реализуемых относительно* $\mathfrak{M}_{\mathbf{T}}$ *формул совпадает с* $\mathbf{Th}(\mathfrak{M}_{\mathbf{T}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение доказывается индукцией по сложности формул. Причем параллельно с доказательством эквивалентности истинности и реализуемости осуществляется построение алгоритма, который по истинной в $\mathfrak{M}_{\mathbf{T}}$ формуле строит ее реализацию. Опустим технические подробности.

Теорема Нельсона [2, с. 444] устанавливает связь между доказуемостью в интуиционистской арифметике и реализуемостью формул. Только что доказанное утверждение является аналогом теоремы Нельсона для точных конструктивных систем.

Теперь перейдем к анализу конструктивных систем без условия точности, т.е. $\varphi \in \mathbf{Thm}(\mathbf{T})$ влечет $\varphi \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$, но обратная импликация, вообще говоря, неверна. Примером такой системы является арифметика Гейтинга [1].

Непосредственно из определений получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Формальное исчисление* $\mathbf{T}$ *является конструктивной системой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) если $\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \in \mathrm{Thm}(T)$, *то* $\varphi_1 \in \mathrm{Thm}(T)$ *и* $\varphi_2 \in \mathrm{Thm}(T)$ *;*

2) если $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathrm{Thm}(T)$ *, то* $\varphi_1 \in \mathrm{Thm}(T)$ *или* $\varphi_2 \in \mathrm{Thm}(T)$ *;*

3) если $\varphi_1 \supset \varphi_2 \in \mathrm{Thm}(T)$ *, то* $\varphi_1 \in \mathrm{Thm}(T)$ *влечет* $\varphi_2 \in \mathrm{Thm}(T)$ *;*

4) если $\exists x\, \varphi(x) \in \mathrm{Thm}(T)$ *, то найдется замкнутый терм* t *такой, что* $\varphi(t) \in \mathrm{Thm}(T)$ *;*

5) если $\forall x\, \varphi(x) \in \mathrm{Thm}(T)$ *, то для любого* $t \in U_L$ *имеем* $\varphi(t) \in \mathrm{Thm}(T)$ *.*

Мы будем говорить, что исчисление $\mathbf{T}$ допускает правило вывода, если, применяя это правило к теореме $\mathbf{T}$,мы снова получаем теорему $\mathbf{T}$. Будем называть исчисление интуиционистским (классическим), если оно допускает аксиомы и правила вывода интуиционистского (классического) исчисления предикатов.

Конструктивные системы не обязательно являются классическими, например, арифметика Гейтинга, и мы не можем, в общем случае, говорить о теоретико-модельной семантике для таких систем. Поэтому вместо понятия реализуемости относительно модели $\mathfrak{M}$ разумнее ввести понятие реализуемости относительно исчисления $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}$-реализуемости). Оно получается из определения 4 заменой пункта "i" пунктом "i'".

i') Число 0 является реализацией атомной формулы $P(\bar{t})$, если и только если $T \vdash P(\bar{t})$.

Опять называем формулу $\mathbf{T}$ -реализуемой, если для нее существует реализация.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\mathbf{T}$ *- конструктивная система. Если формула* φ *доказуема в* $\mathbf{T}$ *, то* φ *является* $\mathbf{T}$ *-реализуемой. Существует частично-рекурсивная функ-*

ция F *такая, что* $F(x)$ *определено тогда и только тогда, когда* x *— гёделев номер доказуемого в* T *предложения* φ *, причем* $F(x)$ *— реализация* φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО упомянутой выше импликации и построение алгоритма приводятся параллельно индукцией по сложности формулы. Рассмотрим подробно только случаи импликации и универсального квантора.

Пусть $\varphi = \varphi_1 \supset \varphi_2$ и $\varphi \in Thm(T)$, тогда, по предложению 1, либо $\varphi_1 \notin Thm(T)$, либо $\varphi_1 \in Thm(T)$ и $\varphi_2 \in Thm(T)$. Пусть x, y, z - гёделевы номера φ, φ_1 и φ_2 соответственно. По индукционному предположению мы уже знаем, как вычислять $F(y)$ и $F(z)$. Полагаем $F(x)$ равным номеру следующей частично-рекурсивной функции:

$$\phi(t) = \begin{cases} F(z) & \text{, если } F(x) \text{ определено и } \varphi \in Thm(T); \\ \text{не определено} & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $\phi(t)$ частично-рекурсивна, так как это либо константа, либо нигде не определенная функция и $F(x)$ - реализация φ .

Пусть $\varphi = \forall x\ \varphi_1(x)$ и $\varphi \in Thm(T)$, тогда для любого $t \in U_L$ имеем $\varphi_1(t) \in Thm(T)$. По индукционному предположению, $\varphi_1(t)$ реализуема для любого $t \in U_L$, и уже определены инструкции для вычисления $F(y)$, где y - гёделев номер $\varphi_1(t)$. Полагаем $F(x)$ равной гёделеву номеру общерекурсивной функции ϕ такой, что $\phi(x) = F(y)$, где y - гёделев номер $\varphi_1(t)$ и x - гёделев номер t .

Теорема доказана.

При доказательстве последней теоремы интенсивно использовалась формальность системы T , т.е. перечислимость множества теорем T . Пусть T - произвольная система, не обязательно формальная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Исчисление $\mathbf{T}$ называется конструктивной системой, если множество $\mathrm{Thm}(\mathrm{T})$ удовлетворяет условиям 1-5 предложения 1.

Несложно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *- модель языка* $\mathbf{L}$ *. Совокупность* $\mathfrak{M}$ *-реализуемых формул является конструктивной системой (неформальной).*

Литература

1. САМОХВАЛОВ К.Ф. Относительно конструктивные системы //Языки спецификаций и логическое программирование. - Новосибирск, 1988. - Вып. 124: Вычислительные системы. -С. 99-113.

2. КЛИНИ С.В. Введение в метаматематику. - М.: Иностранная литература, 1957. - 526 с.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980. - 416 с.

4. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. - М.: Наука, 1979. - 320 с.

5. ПЛИСКО В.Е. Абсолютная реализуемость предикатных формул //Изв. АН СССР, сер.мат. - 1983. - Т. 47, №2. -С. 315-334.

6. ВОРОНКОВ А.А. Конструктивная семантика для теории моделей //Всесоюзная конференция по прикладной логике.-Новосибирск, октябрь, 1985 г.: Тез. докл. - Новосибирск,1985. -С.42-44.

7. ВОРОНКОВ А.А. Теория моделей, основанная на конструктивном понимании истинности //Теория моделей и ее применения. - Новосибирск: Наука, СО, 1988. - Т. 8: Труды Института математики. - С. 25-42.

Поступила в ред.изд.отд.

24 апреля 1989 года