ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)

1989 год Выпуск 129

УДК 517.15

π-АВТОНОМНЫЕ НУМЕРАЦИИ

А.Н.Гамова

Один из способов построения рекурсивных иерархий (классов вычислимых объектов) - итерированная клиниевская вычислимость, в основе которой лежит Π_1^1-вычислимость, проитерированная вдоль начального отрезка ординалов [1].

Интерес представляют эффективные ординальные нумерации ν, на которые навешиваются семейства оракулов итерированной клиниевской вычислимости $\{H_\nu^\tau\}_{\tau\leq|\nu|}$. Одним из критериев эффективности нумерации ν может служить вычислимость оракулов H_ν^σ с оракулами $H_{\nu_1}^\sigma$ относительно произвольной регулярной нумерации ν_1 (свойство инвариантности вычислимых объектов).

В [1] доказана эффективность в этом смысле автономных нумераций ν, порождаемых равномерной процедурой, основанной на конечной экстраполяции на фиксированное число шагов k вдоль вспомогательной нумерации $\nu' = \nu\restriction\sigma \cup \{\langle 0,\sigma\rangle, \langle 1,\sigma+1\rangle, \ldots, \langle k,\sigma+k\rangle\}$. Здесь понятие автономности обобщается до π-автономности с предвосхищением на бесконечное число шагов, равное длине нумерации π. Чтобы иметь свойство инвариантности для таких нумераций ν, берем в качестве π автономную нумерацию и применяем π-автономные процедуры порождения номеров нумерации ν лишь в точках, кратных

$|\pi|$, используя для остальных точек нумерации ν автономный процесс. Доказательство теоремы об инвариантности π-авто - номных нумераций составит содержание статьи.

Сообщим необходимые сведения об итерированной клиниевской вычислимости из [1].

Под ординальной нумерацией ν будем понимать одно-однозначное отображение числового множества $K[\nu]$ на начальный отрезок ординалов длины $|\nu|$. Обозначим через $\nu\upharpoonright\tau$ нумерацию до ординала τ , тогда $K[\nu\upharpoonright\tau] = K_\tau[\nu]$.

На нумерацию ν навешены оракулы семейства $\{H_\nu^\tau\}_{\tau\leq|\nu|}$, в котором частичные функции H_ν^τ определены как минимальные неподвижные точки некоторого монотонного оператора Θ_ν^τ , так что выполняются условия:

$$H_\nu^\tau(3^{\langle j,t\rangle}) = \begin{cases} 0, \text{ если } t\in \text{ графику } H_\nu^{\nu j}; \\ 1 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $j\in K_\tau[\nu]$, $H_\nu^\tau(5^y) = E(\lambda t\{y\}^{H_\nu^\tau}(t))$, $y\in B^*(H_\nu^\tau)$ и $B^*(H_\nu^\tau)$ есть множество кодов H_ν^τ-вычислимых тотальных функций, а функционал E определен как

$$E(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists t(\alpha(t)= 0); \\ 1 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для семейства оракулов итерированной клиниевской вычислимости имеем по построению:

$$H_\nu^\tau = \sup\,\{H_\nu^{\tau,\gamma}\},$$

где $H_\nu^{\tau,0} = \emptyset$, $H_\nu^{\tau,\gamma+1} = \Theta_\nu^\tau(H_\nu^{\tau,\gamma})$, для предельных γ $H_\nu^{\tau,\gamma} = \bigcup_{\gamma'<\gamma} H_\nu^{\tau,\gamma'}$.

Введем понятие рангов вопросов оракула H_ν^τ :

$$\rho_\nu^\tau(x) = \gamma \leftrightarrow x \in \delta H_\nu^{\tau,\gamma+1} \setminus \delta H_\nu^{\tau,\gamma} ,$$

$$\rho_\nu^\tau(z) = |H_\nu^\tau| = \sup\{\rho_\nu^\tau(x) : x \in \delta H_\nu^\tau\}, \quad \text{если} \quad z \notin \delta H_\nu^\tau .$$

Отсюда следует, что $\rho_\nu^\tau(5^y) = \sup\{\rho_\nu^\tau(x) : x \in Q_y\}$, где Q_y есть множество вопросов, задаваемых машиной $y[H_\nu^\tau]$ (соединенной с оракулом H_ν^τ).

Рассмотрим некоторые свойства оракулов.

1. Множество $K_\tau[\nu]$ H_ν^τ-перечислимо, а множества $K_{\nu j}[\nu]$ H_ν^τ-разрешимы равномерно по $j \in K_\tau[\nu]$.

Оракул F называют слабо фундированным, если множество $T(F)$ (кодов F-вычислимых фундированных деревьев) F-перечислимо.

2. Оракулы H_ν^τ ($\tau \leq |\nu|$) слабо фундированные.

3. Если F - слабо фундированный оракул, функционал E F-вычислим, множество $K_\tau[\nu]$ F-перечислимо и графики H_ν^σ F-разрешимы равномерно по ν-номерам, $\sigma < \tau$, то оракул H_ν^τ F-вычислим (лемма 2 из [1]).

Оракул F называется регулярным, если существует машина c (регулятор), выдающая по коду каждого непустого F-перечислимого множества его элемент. Нумерации с регулярной иерархией оракулов, навешиваемых на них, называются регулярными.

По определению, оракулы H_ν^σ зависят от номеров ординалов уже построенного куска нумерации $\nu\restriction\sigma$. Можно представить себе эффективный способ вычисления ν-номера σ с помощью вспомогательного семейства оракулов итерированной клиниевской вычислимости, навешенных на продолжение (на конечное число шагов k) нумерации $\nu\restriction\sigma$, т.е. $\{H_{\nu'}^{\sigma+1}\}_{0\le 1\le k}$, где $\nu' = \nu\restriction\sigma \cup \{\langle 0,\sigma\rangle, \ldots, \langle k,\sigma+k\rangle\}$ и $H_\nu^\sigma = H_{\nu'}^\sigma$. Так как ν'-номера продолжения $\nu\restriction\sigma$ также уже имеются, то семейство вспомогательных оракулов полностью определено. Тогда с заключительным оракулом $H_{\nu'}^{\sigma+k}$ этого семейства, соединенным с некоторой машиной w (генератором), вычислим $\nu^{-1}\sigma = w[H_{\nu'}^{\sigma+k}](0)$. Так определяемые нумерации ν называются автономными степени k с генератором автономной процедуры w.

4. Если ν есть автономное продолжение нумерации $\mu\restriction\sigma$, ν_1 есть регулярное продолжение нумерации $\mu_1\restriction\sigma$ и оракул H_μ^σ $H_{\mu_1}^\sigma$-вычислим, то для всех $\tau > \sigma$ оракулы H_ν^τ $H_{\nu_1}^\tau$-вычислимы (лемма об инвариантности для автономных продолжений).

Для доказательства основной теоремы нам потребуются две леммы, которые мы сейчас докажем.

ЛЕММА 1. *Нумерация* ν', *получаемая сдвигом нумерации* π *на произвольную нумерацию* $\nu\restriction\sigma$, *т.е. нумерация* $\nu' = \nu\restriction\sigma \cup \{\langle\pi^{-1}\xi, \sigma+\xi\rangle : \xi < |\pi|\}$ *(для сокращения будем писать* $\nu' = \nu\restriction\sigma \overset{0}{\cup} \pi$ *) такова, что оракулы* H_π^ξ $H_{\nu'}^{\sigma+\xi}$-*вычислимы равномерно по* π-*номерам* ξ, $0 \le \xi < |\pi|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получим по лемме Роджерса. Пусть ξ, $0 \le \xi < |\pi|$, - фиксированный параметр индукционного шага и для всех $\xi' < \xi$ оракулы $H_\pi^{\xi'}$ $H_{\nu'}^{\sigma+\xi'}$-вычислимы равномерно по π-номерам ξ', т.е. существует рекурсивная процедура e для вычисления функций $H_\pi^{\xi'}$ на соответствующих машинах $e(\pi^{-1}\xi')[H_{\nu'}^{\sigma+\xi'}]$. Условия леммы Роджерса будут выполнены,если эффективно по паре $\langle e, \pi^{-1}\xi\rangle$ построить машину, вычисляющую с оракулом $H^{\sigma+\xi}_{\nu'}$ функцию H^{ξ}_{π}.

Из индукционного допущения следует, что графики $H^{\xi'}_{\pi}$ $H^{\sigma+\xi}_{\nu'}$-разрешимы равномерно по π-номерам ξ' и соответствующая рекурсивная разрешающая процедура e' эффективно находится по паре $\langle e, \pi^{-1}\xi\rangle$.

Номерное множество $K_{\xi}[\pi] = K_{\sigma+\xi}[\nu'] \setminus K_{\sigma}[\nu']$ $H^{\sigma+\xi}_{\nu'}$-перечислимо на машине, строящейся эффективно по перечисляющей машине множества $K_{\sigma+\xi}[\nu']$, по коду $(\nu')^{-1}\sigma = \pi^{-1}0$ и разрешающей машине множества $K_{\sigma}[\nu']$ (которые, в свою очередь, найдены эффективно по паре $\langle 1, \pi^{-1}\xi\rangle$ и фиксированному коду $\pi^{-1}0$).

Тем самым условия леммы 2 из [1] выполнены и оракул H^{ξ}_{π} $H^{\sigma+\xi}_{\nu'}$-вычислим (на машине, эффективно построенной по $\langle e, \pi^{-1}\xi\rangle$). По лемме Роджерса для всех ξ, $0 \le \xi < |\pi|$, оракулы H^{ξ}_{π} $H^{\sigma+\xi}_{\nu'}$-вычислимы равномерно по π-номерам ξ (существует равномерная рекурсивная процедура, эффективно строящаяся по коду $\pi^{-1}0$, не зависящая ни от σ, ни от ν).

ЛЕММА 2. *Нумерация* $\nu' = \nu \restriction \sigma \overset{0}{\cup} \pi$, *где* π – *автономная нумерация, есть автономное продолжение нумерации* $\nu \restriction \sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π - автономная нумерация степени k с генератором P и $\pi' = \pi \restriction \xi \cup \{\langle 0,\xi\rangle, \dots, \langle k, \xi+k\rangle\}$, соответствующая вспомогательная нумерация для вычисления π-номера ординала ξ для $0 \le \xi < |\pi|$, а именно: $\pi^{-1}\xi = P[H^{\xi+k}_{\pi'}](0)$.

Мы хотим организовать автономную процедуру степени k для вычисления ν'-номеров $\sigma+\xi$. Возьмем вспомогательную нумерацию $\nu'' = \nu' \restriction (\sigma+\xi) \cup \{\langle 0, \sigma+\xi\rangle, \dots, \langle k, \sigma+\xi+k\rangle\}$ с навешенным на нее семейством оракулов $H^{\sigma+\xi+l}_{\nu''}$ $(l = 0, \dots, k)$. Генератор новой автономной процедуры W, соединенный с оракулом $H^{\sigma+\xi+k}_{\nu''}$, должен вычислить ν'-номер ординала $\sigma+\xi$, причем, по условию, $(\nu')^{-1}(\sigma+\xi)=\pi^{-1}\xi$. Применяя лемму 1 к нумерациям π' и $\nu''=\nu\restriction\sigma\overset{0}{\cup}\pi$, эффективно по номеру $(\pi')^{-1}0=\pi^{-1}0$ построим равномерную рекурсивную процедуру e для вычисления оракулов $H_{\pi'}^{\xi+1}$ с временными оракулами $H_{\nu''}^{\sigma+\xi+1}$ равномерно по π'-номерам ординалов $\xi+1$ (т.е. равномерно по 1). В частности, эффективно по $\pi^{-1}0$ строится машина $e(k)$, вычисляющая с оракулом $H_{\nu''}^{\sigma+\xi+k}$ функцию $H_{\pi'}^{\xi+k}$ и не зависящая от ξ.

Встраивая в генератор P автономной нумерации π машину $e(k)$ таким образом, что вопросы, задаваемые машиной P, поступают на вход машины $e(k)$ и полученный результат используется в качестве ответа оракулу при последующем моделировании работы машины P, получим эффективный процесс порождения ν'-номера ординала $\sigma+\xi$ с оракулом $H_{\nu''}^{\sigma+\xi+k}$ (не зависящий от ординала $\xi, 0\le\xi<|\pi|$), который можно принять за генератор W нумерации ν', а саму нумерацию $\nu'=\nu\restriction\sigma\overset{0}{\cup}\pi$ за автономное продолжение нумерации $\nu\restriction\sigma$.

Как уже отмечалось, главной особенностью π-автономных нумераций является предвосхищение на бесконечное число шагов вдоль вспомогательной нумерации $\nu'=\nu\restriction\sigma\overset{0}{\cup}\pi$ в точках $\sigma=|\pi|\cdot\zeta$, для которых $\nu^{-1}\sigma=W[H_{\nu'}^{\sigma+|\pi|}](0)$, где W есть генератор π-автономной процедуры, а $H_{\nu'}^{\sigma+|\pi|}$ - заключительный оракул вспомогательного семейства $\{H_{\nu'}^{\sigma+\xi}\}_{0\le\xi<|\pi|}$.

В точках, не кратных $|\pi|$, работает автономная процедура с автономным генератором W.

ТЕОРЕМА. *Пусть* ν *- нумерация, порождаемая* π*-автономной процедурой в точках, кратных* $|\pi|$, *и автономной процедурой в остальных точках. Если* π *- автономная нумерация, а* ν_1 *- произвольная регуляр-*

ная нумерация той же длины, что и нумерация ν , *то для всех* $\tau \leq |\nu|$ *оракулы* H^{τ}_{ν} $H^{\tau}_{\nu_1}$*-вычислимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 2 из [1]. Сделаем индукционное допущение, что для всех $\sigma < \tau$ оракулы H^{σ}_{ν} $H^{\sigma}_{\nu_1}$ -вычислимы. Отсюда сразу имеем $|H^{\sigma}_{\nu}| < |H^{\tau}_{\nu}|$ (для всех $\sigma < \tau$).

Для случая, когда τ – *непредельный ординал,* условия леммы 2 из [1] легко выполнить. Существует ординал $\tau - 1$, и по индукционному допущению оракул $H^{\tau-1}_{\nu}$ $H^{\tau-1}_{\nu_1}$-вычислим, следовательно, график $H^{\tau-1}_{\nu}$ $H^{\tau}_{\nu_1}$ -разрешим, а графики H^{σ}_{ν} $H^{\tau-1}_{\nu}$-разрешимы равномерно по ν-номерам σ для всех $\sigma < \tau - 1$:

$$H^{\tau-1}_{\nu}(3^{\langle j,t\rangle}) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \in \text{ графику } H^{\nu j}_{\nu}; \\ 1 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $j \in K_{\tau-1}[\nu]$. Отсюда для всех $\sigma < \tau$ графики H^{σ}_{ν} $H^{\tau}_{\nu_1}$ -разрешимы равномерно по ν-номерам σ .

Множество $K_{\tau-1}[\nu]$ $H^{\tau-1}_{\nu}$ -перечислимо, поэтому оно $H^{\tau}_{\nu_1}$-перечислимо, а следовательно, и множество $K_{\tau}[\nu] = K_{\tau-1}[\nu] \cup \{\nu^{-1}(\tau-1)\}$ $H^{\tau}_{\nu_1}$ -перечислимо. По лемме 2 из [1], оракул H^{τ}_{ν} $H^{\tau}_{\nu_1}$-вычислим.

Случаи, когда τ – *предельный ординал, не кратный* $|\pi|$ *, и* $\tau = |\pi| \cdot \zeta$, где ζ – *непредельный ординал,* можно объединить, так как в обоих случаях найдется такое $\xi < \tau$, что продолжения от $\nu \upharpoonright \xi$ до $\nu \upharpoonright \tau$ автономные. Ввиду разрешимости диаграммы нумерации $\Gamma[\pi] = \{\langle i,j\rangle : \pi i \leq \pi j\}$ и множества $\{|\pi| \cdot \eta\}_{\eta < \tau}$ с оракулом $H^{\tau}_{\nu_1}$, можно выбрать среди ординалов, кратных $|\pi|$ и меньших τ , наибольший; если такого ординала σ нет, выбираем 0. Такое продолжение нумерации $\nu \upharpoonright (\sigma+1)$ до нумерации $\nu \upharpoonright \tau$, а во втором случае весь кусок $\nu\restriction\tau$ автономны. По лемме об инвариантности для автономных нумераций, замыкающий нумерацию $\nu\restriction\tau$ оракул H_ν^τ $H_{\nu_1}^\tau$-вычислим.

Наибольшую трудность представляет случай, когда $\tau = |\pi|\cdot\zeta$, где ζ - *предельный ординал* (τ назовем π-*предельным*).

Достаточно доказать следующие два утверждения:

1) графики оракулов H_ν^σ $H_{\nu_1}^\tau$-разрешимы равномерно по ν_1-номерам $\sigma<\tau$;

2) ν-номера ординалов $\sigma<\tau$ находятся эффективно по их ν_1-номерам (с оракулом $H_{\nu_1}^\tau$).

Докажем эти утверждения при индукционном допущении леммы Роджерса, что при фиксированном параметре $\sigma<\tau$ для всех $\sigma'<\sigma$ графики $H_\nu^{\sigma'}$ $H_{\nu_1}^\tau$-разрешимы равномерно по ν_1-номерам σ', т.е. посредством некоторой равномерной рекурсивной процедуры φ, так что $\varphi(\nu_1^{-1}\sigma)$ есть машина, разрешающая график $H_\nu^{\sigma'}$, а ν-номер ординала σ' соответственно эффективно находится посредством равномерной процедуры ψ на машине $\psi(\nu_1^{-1}\sigma')$. Эффективно по тройке $\langle\varphi,\psi,\nu^{-1}\sigma\rangle$ построим машину a, $H_{\nu_1}^\tau$-разрешающую график H_ν^σ, и машину b, $H_{\nu_1}^\tau$-вычисляющую номер $\nu^{-1}\sigma$.

Напомним, что $H_\nu^\sigma = \sup\{H_\nu^{\sigma,\gamma}\}$, где $\gamma<|H_\nu^\sigma|<|H_{\nu_1}^\tau|$, $\gamma=\rho_{\nu_1}^\tau(x)$, $x\in\delta H_{\nu_1}^\tau$. Покажем, что графики $H_\nu^{\sigma,\gamma}$ $H_{\nu_1}^\tau$-разрешимы равномерно по γ. Сделаем индукционное допущение для леммы Роджерса о том, что имеется равномерная рекурсивная процедура e' такая, что для всех $\gamma'<\gamma$ $(\gamma'=\rho_{\nu_1}^\tau(x')$, $x'\in\delta H_{\nu_1}^\tau$ графики $H_\nu^{\sigma,\gamma'}$ $H_{\nu_1}^\tau$-разрешимы на соответствующих машинах $e'(x')$. И по тройке $\langle e', x, \nu_1^{-1}\sigma\rangle$ эффективно построим машину, разрешающую график $H_\nu^{\sigma,\gamma}$.

Для $x = 3^{\langle j,t\rangle}$, $\gamma = 0$, график $H_\nu^{\sigma,0} = \emptyset$, т.е. $H_{\nu_1}^\tau$ -разрешим.

Для $x = 5^y$ надо уметь различать предельный или непредельный ординал γ (что эффективно устанавливается с оракулом $H_{\nu_1}^\tau$ из построения семейства $\{H_\nu^{\sigma,\gamma}\}$). Для предельных γ график

$$H_\nu^{\sigma,\gamma} = \bigcup_{\gamma'<\gamma} H_\nu^{\sigma,\gamma'} = \bigcup_{x'\in Q_y} H_\nu^{\sigma\cdot\rho_{\nu_1}^\tau(x')}$$

$H_{\nu_1}^\tau$ -разрешим, что следует из индукционного допущения по γ, разрешимости множества Q_y (см. с.185) и вычислимости с оракулом $H_{\nu_1}^\tau$ функционала E. Для непредельных γ $H_\nu^{\sigma,\gamma-1} = \bigcup_{\gamma'<\gamma} H_\nu^{\sigma,\gamma'}$ и график

$$H_\nu^{\sigma,\gamma} = H_\nu^{\sigma,\gamma-1} \cup \{\langle 5^z, v\rangle :$$

$$z \in B^*(H_\nu^{\sigma,\gamma-1}) \wedge v = E(\lambda t\{z\}^{H_\nu^{\sigma,\gamma-1}}(t))\},$$

т.е. график $H_\nu^{\sigma,\gamma}$ $H_{\nu_1}^\tau$ -разрешим по индукционному допущению, разрешимости множества $B^*(H_\nu^{\sigma,\gamma-1})$ и вычислимости E с оракулом $H_{\nu_1}^\tau$, и разрешающая машина строится эффективно по указанным параметрам. По лемме Роджерса для всех $\gamma<|H_{\nu_1}^\tau|$ графики $H_\nu^{\sigma,\gamma}$ $H_{\nu_1}^\tau$ -разрешимы равномерно по γ на соответствующих машинах $e(x)$, где e - код равномерной рекурсивной процедуры, полученной эффективно по тройке $\langle\varphi,\psi,\nu_1^{-1}\sigma\rangle$.

По тем же параметрам эффективно построим машину $\mathbb{M}$, разрешающую график $H_\nu^\sigma = H_\nu^{\sigma,\gamma_0}$, где γ_0 - момент стабилизации семейства $\{H_\nu^{\sigma,\gamma}\}$, и, как было уже установлено, $\gamma_0 < |H_{\nu_1}^\tau|$, поэтому множество

$$X = \{x:\ x \in \delta H_{\nu_1}^\tau,\ \rho_{\nu_1}^\tau(x) = \gamma,\ H_\nu^{\sigma,\gamma} = H_\nu^{\sigma,\gamma+1}\ \}$$

непусто. А так как по X можно эффективно построить x^* , для которого $\rho_{\nu_1}^\tau(x^*) = \gamma+1$ (достаточно построить машину y^*, задающую вопрос X и останавливающуюся), тогда $x^* = 5^{y^*}$ и графики $H_\nu^{\sigma,\gamma}$ и $H_\nu^{\sigma,\gamma+1}$ разрешимы с оракулом $H_{\nu_1}^\tau$ соответственно на машинах $e(x)$ и $e(x')$; множество X $H_{\nu_1}^\tau$ -перечислимо, и его код z эффективно находится по коду e и перечисляющей машине множества $\delta H_{\nu_1}^\tau$. Искомая машина a работает следующим образом:

$$a:\ t \vdash c(z) = x_0 \vdash e(x_0) \vdash \{e(x_0)\}(t) = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases}$$

где c - регулятор оракула $H_{\nu_1}^\tau$. Тем самым график H_ν^σ $H_{\nu_1}^\tau$ -разрешим на машине a , эффективно построенной по параметрам $\langle\varphi,\ \psi,\ \nu_1^{-1}\sigma\rangle$.

Переходим ко второй части задачи - построению машины b . Продолжение нумерации $\nu\restriction\sigma$ зависит соответственно от вида ординала $\sigma < \tau$: π-автономное или просто автономное. Рассмотрим эти возможности.

Для σ , *кратного* $|\pi|$, вспомогательная нумерация ν' π-автономной процедуры, порождающей ν-номер σ , имеет вид $\nu' = \nu \restriction \sigma \overset{0}{\cup} \pi$ и по доказанной лемме 2 автономна. Тогда по лемме об инвариантности для автономных продолжений оракулы $H_{\nu'}^{\sigma+\xi}$ $H_{\nu_1}^{\sigma+\xi}$-вычислимы для всех ξ, $0 \le \xi < |\pi|$. Ввиду π-предельности ординала τ , для всех $\sigma < \tau$ имеем $\sigma + |\pi| < \tau$, поэтому графики $H_{\nu'}^{\sigma+\xi}$ $H_{\nu_1}^{\tau}$ -разрешимы и их модули $|H_{\nu'}^{\sigma+\xi}| < |H_{\nu_1}^{\tau}|$.

По лемме Роджерса можно доказать $H_{\nu_1}^{\tau}$ -разрешимость графиков $H_{\nu'}^{\sigma+\xi}$ равномерно по ν_1-номерам $\sigma+\xi$ и π-номерам ξ . Для $\xi = 0$ это верно, так как графики H_{ν}^{σ} $H_{\nu_1}^{\tau}$-разрешимы равномерно по ν_1-номерам $\sigma < \tau$. Пусть это верно для всех $\xi' < \xi < |\pi|$ равномерно по π-кодам ординалов ξ' и пусть φ^* есть код соответствующей равномерной рекурсивной процедуры $\varphi \restriction (\sigma+\xi)$.

Равномерная разрешимость по γ графиков $H_{\nu'}^{\sigma+\xi,\gamma}$ (с оракулом $H_{\nu_1}^{\tau}$) доказывается, как для графиков $H_{\nu}^{\sigma,\gamma}$. Код e^* этой процедуры находится эффективно по параметрам $\langle \varphi, \psi, \varphi^*, \nu_1^{-1}\sigma, \pi^{-1}\xi, \pi^{-1}0 \rangle$. Аналогично строится машина a^* , разрешающая график $H_{\nu'}^{\sigma+\xi}$, и машина d^* для разрешения графика замыкающего оракула $H_{\nu'}^{\sigma+|\pi|}$ (с учетом π-предельности ординала τ). Встраивая машину d^* вместе с порождающими ее конструкциями в генератор w π-автономной нумерации ν, эффективно по параметрам $\langle \varphi, \psi, \nu_1^{-1}\sigma \rangle$ получим рекурсивную процедуру b для вычисления с оракулом $H_{\nu_1}^{\tau}$ ν-номера σ .

Случай σ , *не кратного* $|\pi|$, номер которого получается автономной процедурой, можно считать частным случаем предыдущего, где равномерная разрешимость графика по π-номерам ξ будет соответствовать равномерной разрешимости по l, $0 \le l \le k$, и может быть легко доказана без применения леммы Роджерса последовательно по k шагам.

Индукционный шаг сделан. По лемме Роджерса существуют рекурсивные процедуры φ, ψ, равномерные по ν_1-номерам $\sigma < \tau$.

Теперь, учитывая, что оракул $H^{\tau}_{\nu_1}$ – регулярный и функция $\psi\colon \nu_1^{-1}\sigma \mapsto \nu^{-1}\sigma$ $H^{\tau}_{\nu_1}$-вычислима, построим обратную ей $H^{\tau}_{\nu_1}$-вычислимую функцию $\psi^{-1}\colon \nu^{-1}\sigma \mapsto \nu_1^{-1}\sigma$. Отсюда утверждение 1) выполняется равномерно по ν-номерам $\sigma < \tau$, а множество $K_{\tau}[\nu]$ $H^{\tau}_{\nu_1}$-перечислимо как область определения $H^{\tau}_{\nu_1}$-вычислимой функции. Условия леммы 2 из [1] выполнены, поэтому оракул H^{τ}_{ν} $H^{\tau}_{\nu_1}$-вычислим.

Литература

1. БЕЛЯКИН Н.В. Итерированная клиниевская вычислимость и суперджамп //Мат. сб. -М., 1978. - Т.101, №1. - С. 21-43.

Поступила в ред.-изд.отд.
1 августа 1988 года