ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ
(Вычислительные системы)
1990 год Выпуск 133

УДК 519.68

ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

М.В.Коровина

Введение

Вопросы определения вычислимости на несчетных структурах привлекают в последние годы внимание многих авторов, так как в связи с использованием в программировании абстрактных типов данных, отношений высших типов возникает необходимость дать на них определение вычислимых объектов безотносительно к их конкретной реализации.

В теории алгоритмов и математической логике эта проблема интересна в связи с конструированием различных моделей с заданными свойствами. Наибольшую известность в этом направлении получили работы Я.Московакиса, Д.Скордева и др. Данная работа примыкает к этой тематике. В ней изучаются различные подходы к понятию вещественных вычислимых функций и их взаимоотношения между собой.

§1. Функции, определимые в списочной надстройке и вычислимые по Московакису

В теории списочного расширения модели $\mathfrak{M}$ одним из вопросов, представляющих интерес, является характеризация классов функций, описываемых формулами различных типов.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma_0 \rangle$. Над моделью $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ_0 строим надстройку $S(\mathfrak{M}) = \bigcup\limits_{n<\omega} S^n(\mathfrak{M})$, где $S^0(\mathfrak{M})$ - конечные слова (линейные списки) из элементов M ; $S^{n+1}(\mathfrak{M})$ - линейные списки из элементов $S^n(\mathfrak{M}) \cup M$.

Введем обозначение $HW(\mathfrak{M}) = \langle \mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}) \rangle$. Для работы с элементами модели используем формальный язык, описанный в [1]:

$$\sigma = \sigma_0 \cup \{\mathrm{head}, \mathrm{tail}, \mathrm{cons}, \mathrm{nil}\}.$$

Из свойств алгебраической системы $\langle HW(\mathfrak{M}), \sigma \rangle$ следует, что любой список можно представить в виде

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{cons}\ (\mathrm{cons}(\ldots(\mathrm{nil}, \alpha_1) \ldots)).$$

Остановимся на рассмотрении $M = R$, где R - поле действительных чисел с сигнатурой $\sigma_0 = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$, $HW(R) = \langle R, S(R) \rangle, \sigma = \{+, \cdot, 0, 1, \leq, \mathrm{head}, \mathrm{tail}, \mathrm{nil}, \mathrm{cons}\}$. Будем работать с теорией, аксиомами которой является совокупность аксиом действительных чисел и аксиом надстройки. Напомним, что класс формул Δ_0 есть замыкание атомарных формул относительно $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall u \in \delta, \exists u \in \delta$. Класс Σ-формул есть замыкание Δ_0 относительно $\wedge, \rightarrow, \vee, \forall u \in v, \exists u \in v, \exists u$. Π-формулы суть отрицание Σ-формул.

ЗАМЕЧАНИЕ. При построении надстройки над действительными числами появляются такие интересные свойства, как возможность с помощью Σ-формулы выделить натуральные числа из действительных (без надстройки формульно выделить натуральные числа нельзя, иначе было бы противоречие с разрешимостью $TR(R)$).

ЛЕММА 1. *Существует Σ-формула такая, что* $x \in N \leftrightarrow \Phi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим оператор $\varphi(A) = \{A\} \cup \{0\} \cup \{x+1 \mid x \in A\}$. По теореме 5 [1] для операторов, к типу которых относится φ , существует Σ-формула $\Phi(x)$, определяющая наименьшую неподвижную точку. Наименьшая неподвижная точка φ есть N . Следовательно, $x \in N \leftrightarrow \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - Σ-формула.

Рассмотрим функции типа $f\colon R \to R$, определимые с помощью различных классов формул.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f\colon R \to R$ называется Σ-определимой, если существует Σ-формула $\Phi(x,y)$ такая, что

$$f(x) = y \longleftrightarrow (HW(R)) \models \Phi(x,y) \,\&\, [\Phi(x,y_1) \,\&\, \Phi(x\ y_2) \to y_1 = y_2].$$

Аналогично определяются понятия Π-определимой и Δ-определимой функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

1) Σ-определимые функции совпадают с Δ-определимыми;

2) функция $y = |x|$ Δ_0-определима;

3) Σ-определимые функции замкнуты относительно композиции;

4) если $q_1,\ldots,q_n$ - Σ-операции, $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ - Σ-формулы и

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} q_1(x_1\ldots x_n), \text{ если } & \varphi_1(x_1\ \ldots\ x_n),\\ \ldots & \\ q_k(x_1\ldots x_n), \text{ если } & \varphi_k(x_1\ \ldots\ x_n),\end{cases}$$

то $F(x)$ - Σ-определима;

5) если P - Σ-предикат $\to \chi_P$ Σ-определима (χ_P - характеристическая функция); f Σ-определима $\to \chi_{\Gamma_f}$ Σ-определима (Γ_f - график функции).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Функция F Δ-определима $\to F$ Σ-определима (по определению); F Σ-определима:

$$F(x) = y \longleftrightarrow HW(R) \models \exists z\, \Phi(x,y,z) \leftrightharpoons \Psi(x,y),$$

тогда

$$F(x) \neq y \longleftrightarrow HW(R) \models \exists z\, \Psi(x,z) \,\&\, y \neq z,$$

тогда

$$F(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models \Psi(x,y)\text{, где } \Psi \text{ - } \Sigma\text{-формула},$$

$$F(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models \varphi(x,y)\text{, где } \varphi \text{ - } \Pi\text{-формула}.$$

По определению, F - Δ-формула.

2) Пусть

$$\chi_{\leq}(x,y) = z \leftrightharpoons (z=0 \,\&\, x\leq y) \vee (z=1 \,\&\, x\leq y),$$

тогда

$$|x| = y \leftrightarrow HW(R) \models (y = x \,\&\, \chi_{\leq}(x,0) = 1) \vee$$
$$\vee (y = -x \,\&\, \chi_{\leq}(x,0) = 0).$$

3) Пусть $f(x)=y \leftrightarrow HW(R) \models F(x,y)$, где $F(x,y)$ - Σ-формула, $q(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models G(x,y)$, где $G(x,y)$ - Σ-формула, тогда

$$\Psi(x) = f(q(x)) = y \leftrightarrow HW(R) \models \exists z G(x,z) \,\&\, F(z,y).$$

4) Пусть $q_i(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models G_i(x,y)$, где G_i - Σ-формула;

$$F(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models \bigvee_{i\leq k} (G_i(x,y) \,\&\, \varphi_i(x)).$$

5) Пусть P - Σ-предикат. Допустим противное: χ_P Σ-определима $\rightarrow$ χ_P Δ-определима $\rightarrow$ $\chi_{\neg P}$ Δ-определима, $\chi_{\neg P}$ Σ-определима, $\neg P$ Σ-определим. Имеем P - Σ-предикат $\leftrightarrow$ P - Δ-предикат. Противоречие с тем, что существует Σ-предикат, но не Δ-предикат (см [4]). Далее, f Σ-определима $\rightarrow$ f Δ-определима

$$f(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models \Psi(x,y),$$

где Ψ - Σ-формула,

$$f(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models \varphi(x,y),$$

где φ - Π-формула.

Тогда

$$\chi_{\Gamma_f}(x,y) = z \leftrightarrow HW(R) \models (z=0 \ \& \ \Psi(x,y)) \vee$$

$$\vee (z=1 \ \& \ \neg\varphi(x,y)).$$

Пусть χ_{Γ_f} Σ-определима: $\chi_{\Gamma_f}(x,y)=z \leftrightarrow G(x,y,z)$, следовательно, $f(x)=y \leftrightarrow HW(R) \models G(x,y,0)$.

Напомним понятие вычислимой по Московакису функции, введенное в [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

а) $R^0 = R$;

б) R^* - замыкание R^0 относительно взятия пар $\langle\alpha,\beta\rangle = cons(cons(nil,\alpha),\beta)$;

в) последовательность $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle = \langle\alpha_1\ldots\langle\alpha_{n-1},\alpha_n\rangle\ldots\rangle$;

г) если $x = \langle x_1 \ldots x_n\rangle$, $ln(x) = n$, $(x)_i = x_i$, $1 \le i \le n$;

д) $s,t \in R^*$ $\pi(\langle s,t\rangle) = s$; $\delta(\langle s,t\rangle) = t$, $x \in R^0$ $\pi(x) = \delta(x) = \langle 0,0\rangle$.

Базисными функциями объявим $+$, $\cdot$, $\check{x}$, δ, π. Базисными отношениями $=$, $\le$. Операциями над функциями будут следующие:

1) композиция φ_1 и φ_2: $\varphi_1 \circ \varphi_2(x) = \varphi_1(\varphi_2(x))$;

2) сочетание φ_1 и φ_2: $\Pi(\varphi_1\varphi_2)(x) = \langle\varphi_1(x),\varphi_2(x)\rangle$;

3) итерация φ, управляемая χ:

$$[\varphi,\chi](s) = t \leftrightharpoons \exists m\, \exists p_0 \ldots \exists p_m\, (p_0 = s \ \& \ p_m =$$

$$= t \ \& \ \chi(p_m) \in R^0 \ \& \ \forall i_{i<m} (p_{i+1} = \varphi(p_i) \ \&$$

$$\& \ \chi(p_i) \in R^* \setminus R^0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция φ просто вычислима относительно +,·, если получается из ·,+, δ, π, $\check{x}$ с помощью конечного числа применения операций композиции, сочетания, итерации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция φ вычислима по Московакису, если существует просто вычислимая функция θ такая, что

$$\varphi(s) = t \longleftrightarrow \exists\tau \quad \theta(\langle s,\tau\rangle) = t \quad \forall s,t \in R^{*}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно провести аналогию между просто вычислимыми и рекурсивными, вычислимыми по Московакису и частично-рекурсивными функциями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Предикат P просто вычислим, если χ_P просто вычислима; P вычислим по Московакису, если χ_P вычислима по Московакису, где χ_P - характеристическая функция.

ЛЕММА 2.

1) $x \in N$ *- просто вычислимый предикат;*

2) *отношение "*x *есть список" просто вычислимо;*

3) *предикаты* $-(x,y,z)$, $/\!/(x,y,z)$ *просто вычислимы, где* $-(x,y,z) \longleftrightarrow x - y = z$; $/\!/(x,y,z) \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow |x-y| = z$;

4) *просто вычислимые предикаты замкнуты относительно* $\vee$, $\&$ *и подстановки просто вычислимых функций;*

5) *пусть* S *просто вычислима*

$$R(i,x) \longleftrightarrow [i \in N \ \& \ \exists j < i \quad S(i,x)]$$

или

$$R(i,x) \longleftrightarrow [i \in N \ \& \ \forall j < i \quad S(j,x)],$$

тогда R *просто вычислима;*

6) *если* S *вычислима по Московакису и*

$$\forall x[R(x) \longleftrightarrow \exists y \quad S(x,y)],$$

то R *вычислима по Московакису;*

7) *функции* $\mathbf{Ln}$, $(\mathbf{x})_j$ *просто вычислимы, где*

$$\mathbf{Ln}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \text{длина, если } \mathbf{x} \text{ - последовательность;} \\ 0 \text{ - в противном случае;} \end{cases}$$

$$(\mathbf{x})_j = \begin{cases} \mathbf{x}_j, & \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \rangle,\ j \in \omega,\ j \le n; \\ 0 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случаях 1-5 построим для предикатов характеристические функции, из определения которых явным образом следует их просто вычислимость или вычислимость по Московакису. Для этого введем вспомогательные функции:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} - 1, & \mathbf{x} \ge 0, \\ -1, & \mathbf{x} < 0, \end{cases}$$

и

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, & \mathbf{x} \ne 0,\ \mathbf{x} \ne -1, \\ 0, & \mathbf{x} = 0 \vee \mathbf{x} = -1, \end{cases}$$

имеющие формальное определение: $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-1) \cdot \chi_{\le}(\mathbf{x},0) + (1 - \chi_{\le}(\mathbf{x},0))$; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle \cdot \chi_{=}(\mathbf{x},0) \cdot \chi_{=}(\mathbf{x},1)$.

Легко показать, что следующие функции просто вычислимы:

1. $\chi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) = [\varphi, \mathbf{f}](\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathbf{N}, \\ -1, & \mathbf{x} \notin \mathbf{N}; \end{cases}$

2. $\chi_{\mathbf{List}}(\mathbf{x}) = (1 - \chi_{=}(\pi(\mathbf{x}), \langle 0,0 \rangle)) \times$
$\times\ \chi_{=}(\mathbf{x}, \langle\langle 0,0 \rangle, \alpha \rangle)$;

3. а) $\chi_{-}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \chi_{+}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x})$;

б) $\chi_{-}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \chi_{+}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\chi_{\le}(\mathbf{z},0) + \chi_{+}(-\mathbf{x},-\mathbf{y},\mathbf{z})\chi_{\le}(-\mathbf{x},-\mathbf{y},0)$;

4. а) пусть $\Phi = A_1 \,\&\, A_2$, тогда

$$\chi_{\Phi}(\mathbf{x}) = \chi_{A_1}(\mathbf{x}) \cdot \chi_{A_2}(\mathbf{x});$$

б) пусть $\Phi = A_1 \vee A_2$, тогда

$$\chi_{\Phi}(x) = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x) - \chi_{A_1}(x)\cdot\chi_{A_2}(x);$$

в) $\chi_{P(f(\cdot))}(x) = \chi_P(f(x)) = \begin{cases} 0, & f(x) \in P, \\ 1, & f(x) \notin P. \end{cases}$

5. Построим вспомогательные функции:

$$\varphi(x) = x - 1,$$

$$f(\tau_i) = \langle \tau_i, \tau_i \rangle \cdot \chi_{S(\cdot, x)}(\tau_i) = \begin{cases} 0, & S(\tau_i, x), \\ \langle \tau_i, \tau_i \rangle, & \neg S(\tau_i, x), \end{cases}$$

тогда $\chi_R(x) = [\varphi, f](x)$.

6. $R(x) \leftrightarrow \exists y\ S(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists z\ P(x, y, z)$ просто вычислимы $\leftrightarrow \exists k\ P(x, \pi(k), \delta(k))$, где S вычислимы по Московакису, а P просто вычислимы. Следовательно, R вычислима по Московакису.

7. $\mathrm{Ln}(x) = \ln(x)\cdot(1 - \chi_{List}(x))$.

Интересен вопрос сравнения функций, вычислимых по Московакису в R^* и Σ-определимых в $HW(R)$. Для его рассмотрения построим функцию τ из R^* на $HW(R)$:

$$\tau(x) = x, \quad \text{если} \quad x \in R^0,$$

$$\tau(\langle x_1 \ldots x_n \rangle) = (x_1 \ldots x_n), \quad n \neq 0 .$$

С каждым отношением P на $HW(R)$ ассоциируем отношение P^* на R^*:

$$P^*(u_1 \ldots u_k) \leftrightarrow P(\ (u_1) \ldots t(u_k)) .$$

ЛЕММА 3. *Отношение "* $x \in \mathrm{dom}\ \tau$ *" просто вычислимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое следствие леммы 2.

ЛЕММА 4. *Если* P – Δ_0*-отношение на* $HW(R)$ *, то* P^* *просто вычислимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по сложности формулы. Базисные отношения вычислимы по определению. Замкнутость относительно &, $\vee$ - по лемме 1.

Пусть $P \leftrightharpoons \exists x \in y\ S(x,y)$, где S просто вычислима, тогда

$$P^*(y,u) \leftrightarrow HW(R) \models$$
$$= [y \in \mathrm{dom}\ \tau \ \& \ \exists i < \ln(y) \cdot S((y)_{i+1}, u)] .$$

Следовательно, P^* просто вычислима по лемме 2.

ТЕОРЕМА 1. *Если* R - Σ-*отношение, то* R *вычислимо по Московакису.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \leftrightharpoons \exists y\ S(u_1 \ldots u_k, y)$, где S - Δ_0 -отношение. Отсюда S просто вычислимо. Так как $R(u)$ имеет место для $\bar{u} \in R$, то $\tau(u_i) = u_i \rightarrow R(u) \leftrightarrow \exists y\ S^*(u,y)$; по определению, R вычислима по Московаки - су.

ТЕОРЕМА 2. *Для просто вычислимых функций сущест - вует универсальная, вычислимая по Московакису.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем Σ-определимую функцию φ : $R \underset{\text{на}}{\overset{1-1}{\rightarrow}} [0,1]$ такую, что $\varphi(x) = (x+1)/|x| + 1/2$. Строим универсальную

$$F(n,x) = \begin{cases} \mathrm{head}(x), & n = 0, \\ \mathrm{tail}(x), & n = 1, \\ f_a(x) + f_b(x), & n = \langle 2,a,b \rangle, \\ f_a(x)\ f_b(x), & n = \langle 3,a,b \rangle, \\ [f_a, f_b](x), & n = \langle 5,a,b \rangle, \\ \Pi(f_a, f_b)(x), & n = \langle 7,a,b \rangle, \\ \check{x}, & n = \varphi(\check{x}), \end{cases}$$

формальное определение которой имеет вид:

$$F(n,x) = \begin{cases} F(\mathrm{tail}(\mathrm{head}(n)),x) + F(\mathrm{head}(n,x) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } \mathrm{tail}(\mathrm{tail}(n)) = 2, \\ \dots \\ \check{x} \quad \text{при} \quad n = \varphi(\check{x}). \end{cases}$$

По теореме 1 [2] и лемме 1, функция $F(n,x)$ Σ-определима, следовательно, по теореме 1 вычислима по Московакису.

§2. Быстро вычислимые функции

Выделение класса быстро вычислимых функций продиктовано следующими соображениями. В Σ-определениях (особенно в Δ_0-определениях), описывающих функции, достаточно быстро (во всяком случае с теоретической точки зрения) осуществляется проверка истинности условий, но поиск значений для таких функций очень не эффективен из-за возникающего при этом ненаправленного перебора элементов модели без учета преследуемой цели. Выбор стратегии поиска значения функции как раз и есть средство борьбы с этим недостатком. Поскольку стратегия вновь задается Σ-определением, то и возникает задача выделения быстро вычислимых функций. Данный класс, названный в [5] ПРИМ, строится следующим образом. Предположим, что в нашем распоряжении уже имеется некий набор "базисных" быстро вычислимых функций. Класс ПРИМ получается замыканием базисного набора функций посредством:

а) рекурсии по спискам. Если h, f - быстро вычислимые функции, то функция g, определенная следующим образом:

$$g(\mathrm{nil},x) = f(x),$$

$$g(\mathrm{cons}(a,y),x) = h(a,y,g(a,x)),$$

также является быстро вычислимой. Соответствующий конструктор обозначают РЕК (f,g);

б) подстановки. Если $h, f_1, \ldots, f_n$ - быстро вычислимые функции, то функция $g(y)=h(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ - быстро вычислима. Обозначают ПОДСТ $(h, f_1 \ldots f_n)$.

Введем конструкцию направленного поиска $UNTIL(f, \varphi) = h$. Определяем так: если f - быстро вычислимая функция, а φ - Δ-формула, характеристическая функция которой быстро вычислима, то функция $h(x) = \alpha$ - такая функция, что α является первым элементов в последовательности $\alpha_0 = nil, \alpha_{n+1} = f(\alpha_n, x)$, для которого $\varphi(\alpha)$, $[h,\varphi](x) = \alpha$.

ТЕОРЕМА 3. *Класс* ПРИМ *совпадает с классом базисных функций, замкнутых посредством подстановки и* UNTIL.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону см.[5]. Обратное включение. Определим вспомогательные функции:

$$1)\ \chi_{nil}(x) = \begin{cases} 1, & x \neq nil, \\ 0, & x = nil; \end{cases}$$

$$2)\ head1((\alpha_1 \ldots \alpha_n)) = \alpha_1,$$

$$head1 = head([\Psi, \Phi]((\alpha_1 \ldots \alpha_n))),$$

где

$$\Psi(x,y) = cons(cons(nil,x), y)\cdot(1-\chi_{nil}) +$$
$$+ cono(cono(cons(nil, head, head(x)), tail(x)), tail(head(x)))\cdot\chi_{nil}(x);$$

$$\Phi(x):\ (tail(head(x)) = nil);$$

$$3)\ tail1(y) = head(tail([\Psi, \Phi](y)));$$

$$4)\ \Pi(f_1, f_2)(x) = cons(cons(nil, f_1(x)), f_2(x)),$$
$$\Pi(f_1 \ldots f_n)(x) = cons(\Pi(f_1 \ldots f_{n-1})(x), f_n(x)).$$

Основная функция имеет вид: $H = \Pi(f_1, f_2, f_3)(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, где

$$f_1(x)=\mathrm{tail1}\,(\mathrm{head1}\,(x))\cdot\chi_{nil}+\alpha\cdot\chi_{nil};$$

$$f_2(x)=\mathrm{cons}(\mathrm{head1}\,(\mathrm{tail1}\,(x),\mathrm{head1}\,(\mathrm{head1}\,(x))\times$$

$$\times\,\chi_{nil}(x)+nil\ \chi_{nil};$$

$$f_3(x)=h(\mathrm{head1}(\mathrm{tail1}(x),\mathrm{head}(x))\chi_{nil}+\chi_{nil}\cdot x\ .$$

Легко показать, что если g = PEK(f,h) , тогда

$$g(\alpha,x)=\mathrm{head}([H,\Phi](\alpha,f(x)),$$

где $\Phi:(\mathrm{tail}(\mathrm{head1}\,(x))=nil)$.

Сформулируем основную теорему о соотношении классов функций.

Пусть

$D1$ - функции, определимые без надстройки,

$D2$ - функции, определимые Σ-формулами,

$D3$ - функции, определимые Δ-формулами,

$D4$ - функции, вычислимые по Московакису,

$D5$ - функции, определимые Π-формулами,

$D6$ - ПРИМ,

$D7$ - базисные функции, замкнутые относительно подстановки и UNTIL.

ТЕОРЕМА 4. *Для всюду определенных функций выполнены следующие соотношения:*

$$D1\subseteq D6=D7\subseteq D2=D3=D4\subset D5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $D6=D7$ доказано в теореме 3; $D2=D3$ следует из леммы 2; $D2\subseteq D4$ - из теоремы 2; $D2\supseteq D4$ - индукцией по сложности построения функций (действительно, функции $+,\cdot$ - базисные; $\check{x}$ - Δ_0-определимые, конструкции произведения, композиции, итерации записываются Σ-формулами, и поэтому из леммы 2 следует $D2\supseteq D4$); $D2\subseteq D5$ - из того, что $D2=D3\subseteq D5$.

Докажем строгое включение. Пусть A — П-отношение $x \in A \leftrightarrow \forall z\ P(x,z)$, тогда

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \forall z\ \ P(x,z), \\ y, & \neg P(x,y)\ \&\ (\forall t \le y\ P(x,\tau), \end{cases}$$

- функция П-, но не Σ-определимая.

§3. Эффективно аппроксимируемые и П-функции

Коснемся функций, связанных с понятием предела бесконечности:

а) функций, аппроксимируемых "хорошим" классом функций;

б) аналитических функций, заданных эффективным рядом, т.е. рядом с общим членом, записываемым формулой.

Для нумерации не более чем счетных семейств рассмотрим аналог натуральных чисел Nat - непредельные ординалы, но уже Δ-определимые.

ЛЕММА 5. Nat — *Δ-определимый предикат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Вспомогательные Δ-определимые предикаты:

x - транзитивный список:

$$\mathrm{Tran}(x) \leftrightharpoons \forall y \in x\ \forall z \in x\ (z \in x)\ ;$$

x - ординал:

$$\mathrm{Ord}(x) \leftrightharpoons \mathrm{Tran}(x)\ \&\ \ \forall y \in x\ \mathrm{Tran}(y);$$

2) $x \in \mathrm{Nat}$: $\ \mathrm{Nat}(x) \leftrightharpoons \mathrm{Ord}(x);$

$\alpha < \beta$: $\ \mathrm{Ord}(\alpha)\ \&\ \mathrm{Ord}(\beta)\ \&\ \alpha \in \beta\ ;$

$\alpha \le \beta$: $\ \alpha < \beta \lor \alpha = \beta.$

Введем обозначения: $\ \mathrm{nil} \leftrightharpoons \bar{0}$

$$\langle \mathrm{nil} \rangle \leftrightharpoons \bar{1}$$

$$\dots$$

Естественным образом вводятся сложение и умножение.

ТЕОРЕМА 5. *Функции, заданные эффективным бесконечным рядом,* Π*-определимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть функцию $f(x) = \mathrm{Sin}(x)$. Рассмотрим вспомогательные функции.

1. $f(\bar{n}) = \bar{n}!$ с рекурсивным определением:

$$f(nil) = 0,$$

$$f(cons(\alpha,\delta)) = \chi_{Nat}(cons(\alpha,\delta))\cdot ln(cons(\alpha,\delta))\cdot f(\alpha).$$

По определению быстро вычислимых функций, $f(\bar{n}) = \bar{n}!$ быстро вычислима $\rightarrow$ Δ-определима.

2. $f(x,\bar{n}) = x^{\bar{n}}$ с рекурсивным определением:

$$f(x,0) = 1,$$

$$f(x,cons(\alpha,\delta)) = \chi_{Nat}(cons(\alpha,\delta))\cdot x\cdot f(x,\alpha).$$

По определению быстро вычислимых функций, $f(x,\bar{n}) = x^{\bar{n}}$ быстро вычислима $\rightarrow$ Δ-определима.

Используя вспомогательные функции $f(\bar{n}) = \bar{n}!$ и $f(x,\bar{n}) = x^{\bar{n}}$, имеем:

$$\mathrm{Sin}(x) = y \leftrightarrow HW(R) = \forall\varepsilon\, \forall\bar{n}(ln(\bar{n}) \geq \tau(\varepsilon)\ Nat(\bar{n})\ \&$$

$$\&\ \chi_{list}(\varepsilon) = 0\ \&\ \left| \sum_{i=1}^{ln(\bar{n})} (-1)^{\bar{n}+\bar{1}} \frac{x^{\bar{2}\bar{n}+\bar{3}}}{(\bar{2}\bar{n}+\bar{3})!} - y \right| < \varepsilon,$$

где $\tau(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ - регулятор сходимости синуса. Это Π-формула.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $\varphi: [0,1] \rightarrow R$ вычислима в смысле аппроксимации, если существует эффективная последовательность сплайн-функций $f_1,\ldots,f_n,\ldots$ такая, что

$$\forall x\, \forall\varepsilon > 0\, \forall\bar{n} \geq \tau(\varepsilon)\ Nat(\bar{n})\ \&\ |\varphi(x) - f_{\bar{n}}(x)| < 1/\varepsilon,$$

где τ — Σ-определимая функция.

ТЕОРЕМА 6. *Существует функция Π-определимая, но не аппроксимируемая сплайн-функциями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (методом диагонализации). Пусть g : $Nat \to P$ - эффективная функция, нумерующая все сплайны; $f_{\bar{k}}(x,y,z)$ - ч.р.ф. с номером $\bar{k}$, $h_{\bar{n}}(x)$ - ч.р.ф. с номером $\bar{n}$. Определим функцию

$$G(z)=y \leftrightarrow HW(R) \models \forall \bar{k}_1 \forall \bar{k}_2 \forall \varepsilon >0 \forall \bar{n} >f_{\bar{k}_1}(z,\bar{k}_2,\varepsilon)$$

$$|y-g(h_{\bar{k}_2}(n))(z)| >1/\varepsilon \ \& \ y \le H(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{n},\varepsilon).$$

Очевидно,что эта формула определяет функцию. Допустим, что существует аппроксимация, т.е. существует эффективная последовательность сплайн-функций такая, что

$$\forall \bar{k}_1 \forall \bar{k}_2 \forall \bar{n} > f_{\bar{k}_1}(z,\bar{k}_2,\varepsilon) |\ y-g(h_{\bar{k}_2}(n))(z)\ | < 1/\varepsilon.$$

Противоречие.

ТЕОРЕМА 7. *Для функций вида* $f: [0,1]\to R$ *выполнимо* $D8 \subset D5$, *где* $D8$ - *функции, вычислимые в смысле аппроксимации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, f аппроксимируема сплайн-функциями $f_1,\dots,f_n,\dots$; существует (следует из эффективности последовательности) $\Phi(\bar{n},x,y)$ такая,что $f_i(x) = y \leftrightarrow \Phi(i,x,y)$, тогда

$$f(x)=y \leftrightarrow HW(R) \models \forall\varepsilon>0 \ \forall\bar{n}>\tau(\varepsilon)\ |y-z| < 1/\varepsilon \ \& \ \Phi(\bar{n},x,z),$$

где τ - Σ-определимая функция. Это - Π-формула. Строгое включение следует из теоремы 6.

§4. Связь $\exists$-определимости в модели R с Σ-определимостью в модели R с надстройкой

ТЕОРЕМА 8. *Пусть существует* Σ-*формула* $\varphi(x)$ *такая, что* $a\in A \leftrightarrow HW(R) \models \varphi(a)$, *тогда найдется*

$\exists$-формула $\Psi(x)$, определяющая в R непустое подмножество $A_0 \subset A$, т.е. $a_0 \in A_0 \leftrightarrow R \models \Psi(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, существует Σ-формула $\varphi(x) \leftrightharpoons \exists y\, \Phi(x,y)$, где Φ – Δ_0-формула такая, что

$$a \in A \leftrightarrow HW(R) \models \exists y\, \Phi(a,y).$$

В этом случае найдется $b \in HW(R)$ такое, что

$$HW(R) \models \Phi(a,b) \to a \in A.$$

Формула $\Phi(x,b)$ выделяет какое-то непустое подмножество $A_0 \subseteq A$, т.е. $a \in A_0 \leftrightarrow HW(R) \models \Phi(a,b)$. Из определения стандартной списочной надстройки следует представимость любого элемента надстройки в виде терма элементов модели. Для b найдутся $b_1, \dots, b_n \in R$ и терм τ такие, что $b = \tau(b_1 \dots \dots b_n)$. Если $b \in R$, то берется b.

Справедлива импликация:

$$\exists b_1 \dots \exists b_n\, \Phi(\ (b_1 \dots b_n), x) \to \exists b\, \Phi(b,x).$$

Из выбора $b_1 \dots b_n$ и терма τ:

$$HW(R) \models \Phi(\tau(b_1 \dots b_n), x) \leftrightarrow a \in A_0.$$

Введем обозначение $\bar{b}_n \leftrightharpoons b_1 \dots b_n$.

В общем случае Φ имеет вид:

$$\Phi \leftrightharpoons Qx_1 \odot t_1(\bar{b}_n, x) \dots Qx_n \odot$$

$$\odot\, t_n(\bar{b}_n, \bar{x}_{n-1}, x) \Psi(\bar{b}_n, \bar{x}_n, x),$$

где Ψ - бескванторная формула.

Индукцией по сложности терма t_1 и длине кванторной приставки перейдем к $\chi(\bar{b}_n, x)$ такой, что выполняются следующие требования:

(1) $\exists b_1 \dots \exists b_n\, \Phi(t(\bar{b}_n)\ x) \to \exists b_1 \dots \exists b_n\, \chi(\bar{b}_n, x)$;

(2) $HW(R) \models \chi(\bar{b}_n, x) \leftrightarrow x \in A_0$;

(3) длина кванторной приставки равна нулю.

Индукция проводится по паре $\langle n,m\rangle$, где n - слож - ность терма t_1, m - длина кванторной приставки.

Случай $\langle 0,0\rangle$ очевиден.

Рассмотрим переход $\langle n,m\rangle \to \langle n+1,m\rangle$:

a) $\Phi \leftrightharpoons \exists x_1 \in t_1 (\bar{b}_n, x)\eta(\bar{b}_n, x_1, x)$.

Случай 1.

$$t_1 = \mathrm{cons}\,(t_1^1, t_1^2);$$

$$\bar{\eta} = \exists x_1 \in t_1^1 (\bar{b}_n, x)\eta(\bar{b}_n, x_1, x) \vee \eta(\bar{b}_n, t_1^2(\ldots), x);$$

$$\exists \bar{b}_n\ \bar{\eta}(\bar{b}_n, x) \to \exists \bar{b}_n\ [\exists x_1\ (x_1 \in t_1^1 \to \eta(\bar{b}_n, x_1, x) \vee$$
$$\vee \exists x\ (x = t_1^2 \to \eta(\bar{b}_n, x_1, x)] \to \exists \bar{b}_n [\exists x\ (x \in t_1^1 \vee x = t_1^2) \to$$
$$\to \eta(\bar{b}_n, x_1, x)] \to \exists \bar{b}_n\ \exists x\ [(x \in \mathrm{cons}(t_1^1, t_1^2) \to$$
$$\to \eta(\bar{b}_n, x_1, x)] \to \exists \bar{b}_n\ \Phi(\bar{b}_n, x).$$

Из определения операций cons и $\in$ следует эквивалентность:

$$HW(R) \models \exists x_1 \in \mathrm{cons}\,(t_1^1, t_2^1)\eta \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow HW(R) \models \exists x_1 \in t_1^1 \eta\,(\bar{b}_n, x_1, x) \vee \eta(\bar{b}_n, t_1^2, x),$$

$$HW(R) \models \exists x_1 \in t_1^1\ (\bar{b}_n, x)\eta(\bar{b}_n, x_1, x)$$

либо

$$HW(R) \models \eta(\bar{b}_n, t_1^2\ (\bar{b}_n, x), x).$$

Сложность терма t_1^1 в формуле $\bar{\eta}$ меньше $n+1$. По индук - ционному предположению, найдется формула χ такая, при которой выполняются требования 1-3.

Случай 2. $t_1 = t_1^1(\mathrm{tail}(\mathrm{cons}(t_1^k, t_1^{k+1})))$, где cons не входит в t_1^1; $\overline{\eta} \leftrightharpoons \exists x_1 \in t_1^1\ (t_1^k)\eta$.

Случай 3. $t_1 = t_1^1(\mathrm{head}(\mathrm{cons}(t_1^k, t_1^{k+1})))$, где cons не входит в t_1^1; $\overline{\eta} \leftrightharpoons \exists x_1 \in t_1^1\ (t_1^{k+1})\eta$.

Случаи 2 и 3 доказываются аналогично первому, основываясь на определениях операций head, tail, cons .

б) $\Phi \leftrightharpoons \exists x_1 \subseteq t_1\ (\overline{b}_n, x)\eta(\overline{b}_n, x_1, x)$.

Случай 1.

$$t_1 = \mathrm{cons}(t_1^1, t_1^2);$$

$$\overline{\eta} \leftrightharpoons \exists x_1 \subseteq t_1^1\ (\overline{b}_n, x)\eta(\overline{b}_n, x_1, x) \vee$$
$$\vee \eta\ (\overline{b}_n, \mathrm{cons}(t_1^1, t_1^2), x);\quad \exists \overline{b}_n \overline{\eta}\ (\ldots) \to \exists \overline{b}_n$$
$$[\exists x_1 (x_1 \subseteq t_1^1(\overline{b}_n, x) \to \eta\ (\overline{b}_n, x_1, x)) \vee$$
$$\vee \exists x_1\ (x_1 = \mathrm{cons}(t_1^1\ t_1^2) \to \eta)] \to \exists \overline{b}_n\ \exists x_1\ (x_1 \subseteq \mathrm{cons}(t_1^1, t_1^2) \to$$
$$\to \exists b\ \Phi(b, x).$$

Из определения операций cons и $\subseteq$ следует эквивалентность:

$$HW(R) \models \exists x_1 \subseteq \mathrm{cons}(t_1^1, t_2^1)\eta \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow HW(R) \models \exists x_1 \subseteq t_1^1\ \eta \vee \eta\ (\overline{b}, \mathrm{cons}(t_1^1, t_1^2), x).$$

Сложность первого, ограничивающего терма меньше $n+1$. По индукционному предположению, найдется формула χ такая, что выполняются требования 1-3.

Случаи 2 и 3 для п. "б" доказываются аналогично случаям 2 и 3 для п. "а".

Переход $\langle n, m\rangle \to \langle n+1, m\rangle$ при $Q = \forall$ доказывается аналогично предыдущему.

Рассмотрим переход $\langle n,m\rangle \to \langle 1,m+1\rangle$:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x_1 \in cons(nil,b_i)\eta(\bar{b}_n,x_1,x);$$

$$\bar{\eta} \leftrightharpoons \eta(\bar{b}_n,b_i,x);$$

$$1. \exists\bar{b}_n\eta(\bar{b}_n,b_i,x) \to \exists\bar{b}_n\ x \in cons(nil,b_i)\eta \to \exists b\ \Phi(b,x);$$

$$2.\ HW(R) \models \exists x_1 \in cons(nil,b_i)\eta(\bar{b}_n,x_1,x) \leftrightarrow HW(R) \models$$

$$\models \eta(\bar{b}_n,b_i,x).$$

При $Q \leftrightharpoons \forall$ доказательство повторяется.

Итак, имеем формулу $\chi(\bar{b},x)$, не содержащую ограниченных кванторов.

Воспользуемся тем, что если формула Φ_2 получена из формулы Φ_1, заменой вхождений подформулы Φ_1^1 на подформулу Φ_2^1 и $\Phi_1^1 \leftrightarrow \Phi_2^1$, тогда $\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$; индукцией по количеству вхождений cons, head, tail перейдем к эквивалентным формулам, их не содержащих. Рассмотрим три случая:

Случай 1.

$$\Phi_1^1 \leftrightharpoons cons(t_1^1(\bar{b}_n,x),t_1^2(\bar{b}_n,x)) = cons(t_2^1,t_2^2),$$

$$\Phi_2^1 \leftrightharpoons t_1^1 = t_2^1 \ \&\ t_1^2 = t_2^2 \ .$$

Случай 2.

$$\Phi_1^1 \leftrightharpoons cons(t_1^1,t_2^1) = t_2(head(cons(t^1,t^2))),$$

t^2 не содержит cons,

$$\Phi_2^1 \leftrightharpoons cons(t_1^1\ t_2^1) = t_2(t^2).$$

Случай 3.

$$\Phi_1^1 \leftrightharpoons cons(t_1^1,t_2^1) = t_2(tail(cons(t_1^1,t^2))),$$

$$\Phi_2^1 \leftrightharpoons \mathrm{cons}\,(t_1^1, t_2^1) = t_2(t^1).$$

Аналогичным образом в формулах

$$\sum_{i=0}^{n} t_i(\bar{b}_n)x^i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} t_i(\bar{b}_n)x^i \le 0,$$

$$t_1(x) \le t_2(\bar{b}_n)$$

от термов t_i, содержащих $\mathrm{cons}, \mathrm{tail}, \mathrm{head}$, переходим к t_i^1 без них. Это возможно сделать, так как $t_i(\bar{b}_n) \in R$.

Итак, получим $\mu\,(\bar{b}_n, x)$, где μ записана в терминах теории $Th(R)$:

$$\exists b_1 \ldots \exists b_n \ \mu(\bar{b}, x) \to \exists b \ \Phi(b, a),$$

$$a \in A_0 \leftrightarrow HW(R) \models \exists b \ \Phi\,(b, a),$$

т.е. найдется $A_0 \subseteq A$ такое, что $a \in A_0 \leftrightarrow R \models \exists b_1 \ldots$ $\ldots \exists b_n \ \mu(\bar{b}_n, a)$.

Рассмотрим следствия к теореме 8.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть* A *- одноточечное множество, существует* Σ*-формула* $\varphi(x)$ *такая, что* $a \in A \leftrightarrow$ $\leftrightarrow HW(R) \models \varphi(x)$ *тогда и только тогда, когда существует* $\exists$*-формула* Ψ *такая, что* $a \in A \leftrightarrow \Psi(a) \dashv R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\leftarrow$) очевидно.

$\to$). По предыдущей теореме существует $\Psi(x)$ - $\exists$-формула, выделяющая в R непустое подмножество $A_0 \subseteq A$, так как A одноточечное, то $A_0 = A$ и Ψ - искомая.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Функция* $f(x) = \mathrm{Sin}(x)$ *не является* Σ*-определимой в* $HW(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: существует Σ-формула $\Phi(x,y) \leftrightharpoons \exists z \ \Phi(x,y,z)$ такая, что

$$f(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models \exists z\, \Psi(x,y,z).$$

Построим Σ-определение для одноточечного множества $A = \{\pi\}$:

$$x \in A \leftrightarrow HW(R) \models \exists z\, \Psi(x,0,z)\ \&\ 0 < x < 4 .$$

Тогда, по следствию 1, существует $\exists$-формула Ψ такая, что $x \in A \leftrightarrow R \models \Psi(x)$, т.е. в R $\exists$-определимо трансцендентное число. Противоречие (следует из работы [6]).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* f *- вещественная функция такая, что существует* $x_0 \in Q$ *, и* $f(x_0)$ *- трансцендентное число, тогда* f *не* Σ*-определима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично предыдущему.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть* f *- вещественная функция такая, что* $tr(\{f(x) \mid x \in Q\}) > 0$ *, тогда* f *не* Σ*-определима* (из следствия 3).

СЛЕДСТВИЕ 5. *Функции* $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ *не* Σ *-определимы с конечным числом параметров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ - множество параметров. Предположим противное, $f(x) = e^x$ Σ-определима. Из теоремы 8 следует, что в этом случае для любого x $f(x)$ алгебраично над $Q \cup \{a_1, \ldots, a_n, x\}$. Возьмем $\mu_1 \ldots \mu_{n+1}$ линейно-независимые и алгебраичные над Q . С одной стороны, по теореме Линдемана [7], $f(\mu_1), \ldots, f(\mu_{n+1})$ линейно-независимы; с другой стороны, каждое из них алгебраично над $\{a_1, \ldots$ $\ldots, a_n\} \cup Q$. Противоречие.

Для доказательства случая $g(x) = \sin x$ расширим действительные числа до комплексных. Возьмем $\mu_1 \ldots \mu_{n+1}$ линейно-независимые и алгебраические над Q . Тогда $i\mu_1 \ldots i\mu_{n+1}$ тоже линейно-независимы. По теореме Линдемана [7], $e^{i\mu_1} \ldots$ $\ldots e^{i\mu_{n+1}}$ алгебраически независимы и $e^{\mu_1} \ldots e^{\mu_{n+1}}$ алгебраически независимы. Заметим, что $e^{ix} - e^{-ix}/2i = \operatorname{Sin} x$, поэтому $\operatorname{Sin}\mu_1 \ldots \operatorname{Sin}\mu_{n+1}$ алгебраически независимы, с одной стороны, с другой стороны, каждое из них алгебраично над $Q \cup \{a_1 \ldots a_n\}$. Противоречие.

§5. Расширение оператором неподвижной точки Δ-формул

Класс Δ_0-формул расширим до $\Delta_0 + \mathrm{LFP}$, введя формальное правило:

1. $\Delta_0 \subset \Delta_0 + \mathrm{LFP}$.

2. Если $\varphi(P,x)$ – $\Delta_0+\mathrm{LFP}$-формула, где арность P совпадает с длиной x, P входит позитивно в φ и $F(P) = \{x:\ \varphi(P,x)\}$, тогда $\mathrm{LFP}_{P;x}\ \varphi(P,x) = \bigcup\limits_{n<\omega} F^n(\emptyset)$ принадлежит классу $\Delta_0+\mathrm{LFP}$.

Тогда $\Delta_0+\mathrm{LFP}$-определимые предикаты и функции определяются естественным способом. Проиллюстрируем возможности построенного расширения. Рассмотрим натуральные числа со стандартной списочной надстройкой.

ЛЕММА 6. *Пусть* g, h *– функции и существуют* $\Delta_0+\mathrm{LFP}$ *-формулы* $G(x,y)$, $H(x,y)$ *такие, что* $HW(N) \models G(x,y) \leftrightarrow g(x) = y$ *и* $HW(N) \models H(x,y) \leftrightarrow h(x) = y$. *Тогда существует* $\Delta_0+\mathrm{LFP}$ *-формула* $\Phi(x,n,y)$, *определяющая функцию* f : $f(x,n) = z \leftrightarrow HW(N) \models \Phi(x,n,z)$ *такую, что* $f(x,0) = g(x)$ *и* $f(x,n) = h(f(x,n-1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим формулу:

$$\chi(\varphi,x,y,z) \leftrightharpoons (y=0\ \&\ G(x,z)) \vee$$
$$\vee (\exists \alpha\ \varphi(x,y-1,\alpha)\ \&\ H(\alpha,z)).$$

Для формулы $\exists\alpha\ \varphi(x,y-1,\alpha) \& H(\alpha,z)$ построим оператор F_1:

$$\Psi(P,x,y,z) \leftrightharpoons \varphi(x,y,z) \ \& \ H(\alpha,z) \vee P(x,y,z+1);$$

$$\bigcup_{n<\omega} F_1^n(\emptyset) = \mathrm{LFP}_{P,x,y,z}\ \Psi\ (P;x,y,0)$$

такой, что

$$HW(N) \models \exists\alpha\ \varphi(x,y-1,\alpha)\ \&\ H(\alpha,z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mathrm{LFP}_{P;x,y,z}\ \Psi\ (P,x,y,0).$$

Тогда

$$\chi(\varphi,x,y,z) \longleftrightarrow (y = 0\ \&\ G(x,z)) \vee$$
$$\vee\ \mathrm{LFP}_{P;x,y,z}\ \Psi\ (P,x,y,0) \leftrightharpoons \overline{\chi}(\varphi,x,y,z).$$

Оператор $F_2(\varphi) = \{(x,y,z) \mid \overline{\chi}(\varphi,x,y,z)\}$ имеет наименьшую неподвижную точку:

$$\mathrm{LFP}_{\varphi;x,y,z}\ \overline{\chi}\ (\varphi,x,y,z) = \bigcup_{n<\omega} F_2^n(\emptyset),$$

которая и будет Δ_0+LFP-определением для функции f. Вернемся к рассмотрению действительных функций. Возникает вопрос о соотношении Δ_0+LFP- и Σ-определимых действительных функций.

ТЕОРЕМА 9. *Класс Δ_0+LFP-определимых действительных функций совпадает с классом Σ-определимых действительных функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону см. [1]. Для доказательства в обратную сторону введем функцию $t\colon \mathrm{List} \to N$, кодирующую структуру списка $t(\alpha)=t(\langle\alpha_1\ldots\alpha_n\rangle)=2^{t(\alpha_1)}\ldots P_n^{t(\alpha_n)}$. Как будет видно из дальнейшего, это Δ_0+LFP-определимая функция. Построим формулу

$$\chi(T,\alpha,k) \leftrightharpoons (\chi_{\mathrm{List}}(\alpha) = 0\ \&\ k=1) \vee (\exists z\,\exists l\, N(z)\ \&\ N(l))\ \&$$

$$\& T(tail(\alpha),z) \;\&\; T(head(\alpha),l) \;\&\; z\cdot p(ln(\alpha)+1)^{l} = k \leftrightharpoons$$
$$\leftrightharpoons (\chi_{List}(\alpha) = 0 \;\&\; k = 1) \vee \Phi(\alpha,k).$$

Пусть $\Phi(\alpha,k) = \exists z \exists l \;\; \Phi_1(\alpha,k,z,l)$, тогда

$$\exists\alpha \; \Phi_1(\alpha,k,z,l) \longleftrightarrow \underset{P_1;x,y,z,l}{LFP} \;\; \Psi_1 \;\; (P_1,\alpha,k,z,0),$$

где

$$\Psi_1(P_1,x,k,y,z) \leftrightharpoons \Phi_1(x,k,y,z) \vee P_1(x,k,y,z+1)$$

и

$$\Phi(\alpha,k) = \underset{P_2;x,k,y}{LFP} \;\; \Psi_2 \;\; (P_2,\alpha,k,0),$$

где

$$\Psi_2(P_2,x,k,y) \leftrightharpoons$$
$$\leftrightharpoons \underset{P_1;x,k,z,l}{LFP} \;\; \Psi_1 \;\; (P_1,x,k,z,0) \vee P_2(x,k,z+1).$$

Пусть $p(n) = p_n$ – n-е простое число, $ln(\alpha)$ - длина списка α, $n^{\alpha} = \underbrace{n\cdot \;\ldots\; \cdot n}_{\alpha \text{ раз}}$. По лемме 6, $p(n)$, $ln(\alpha)$, n^{α} – Δ_0+LFP-определимы. Поэтому в формуле Ψ_2 их можно заменить на соответствующие определения. Получим формулу $\bar{\chi}$, эквивалентную и принадлежащую классу Δ_0+LFP . Тогда

$$t(\alpha) = k \longleftrightarrow HW(R) \models \underset{T;x,y}{LFP} \;\; \bar{\chi} \;\; (T,\alpha,k)$$

Таким образом, t – Δ_0+LFP-определима. Пусть $f\colon\; R \to R$ - Σ-определимая,всюду определенная действительная функция такая, что

$$f(x) = y \longleftrightarrow HW(R) \models \exists z \;\; \Phi(x,y,z) \leftrightharpoons L(x,y).$$

Построим оператор, наименьшая неподвижная точка которого и будет

Δ_0 + LFP -определением нашей функции. Определим

$$\chi(Q,x,y,n) \leftrightharpoons [\exists z\ (t(z)=n)\ \&\ \Phi(x,y,z)] \vee$$
$$\vee Q(x,y,n+1) = \Psi(x,y,n) \vee Q(x,y,n+1).$$

Построим Δ_0+LFP -формулу, эквивалентную Ψ. Первый конъюнктивный член формулы $\Psi(x,y,n)$ фиксирует структуру списка z.

Из определения стандартной списочной надстройки следует представимость любого элемента надстройки в виде терма от элементов модели $\mathbf{R}$. По n определяются $k \in \mathbf{N}$ и φ-терм такие, что

$$\Psi(x,y,n) \leftrightarrow \exists z_1 \dots \exists z_k\ P(x,y,\varphi(z_1,\dots,z_k)),$$

где $z_1,\dots,z_k$ - переменные над $\mathbf{R}$. В общем виде формула P имеет вид:

$$P(x,y,\varphi(z_1 \dots z_k)) = Qx_1 \odot t_1(z_1 \dots z_k,x,y) \dots$$
$$\dots Qx_n \odot t_n(\bar{z}_k,\bar{x}_{n-1},x,y)\Psi(\bar{z}_k,\bar{x}_n,x,y),$$

где Q - квантор $\exists$ или $\forall$; $\odot$ - знак $\in$ или $\subseteq$.

Индукцией по сложности терма t_1 и длине кванторной приставки перейдем к $\bar{\eta}(\bar{z}_k,x,y)$ такой, что

$$(1)\ \exists z_1 \dots \exists z_k\ P(x,y,\varphi(\bar{z}_k)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists z_1 \dots \exists z_k\ \bar{\eta}(\bar{z}_k,x,y);$$

(2) длина кванторной приставки равна нулю.

Индукция проводится по паре $\langle n,m\rangle$, где n - сложность терма, m - длина кванторной приставки.

Случай $\langle 0,0\rangle$ очевиден.

Переход $\langle n,m\rangle \to (n+1,m\rangle$:

$$\text{а) } P \leftrightharpoons \exists x_1 \in t_1\ (\bar{z}_k,x,y)\eta(\bar{z}_k,x_1,x,y).$$

<u>Случай 1</u>. $t_1 = cons(t_1^1,t_1^2)$, тогда

$$\bar{\eta} \leftrightharpoons \exists x_1 \in t_1^1\ (\bar{z}_k,x,y)\eta(\bar{z}_k,x_1,x,y) \vee \eta(\bar{z}_k,t_1^2(\dots),x,y).$$

Случай 2. $t_1 = t_1^1(\mathrm{tail}(\mathrm{cons}(t_1^k, t_1^{k+1}))$, где в t_1^1 операция cons не входит, тогда

$$\bar{\eta} \leftrightharpoons \exists x_1 \in t_1^1\ (t_1^k(\bar{z}_k, x, y))\eta(\bar{z}_k, x_1, x, y).$$

Случай 3. $t_1 = t_1^1(\mathrm{head}(\mathrm{cons}(t_1^k, t_1^{k+1}))$, где в t_1^1 операция cons не входит, тогда

$$\bar{\eta} \leftrightharpoons \exists x_1 \in t_1^1\ (t_1^{k+1}(\bar{z}_k, x, y))\eta(\bar{z}_k, x_1, x, y).$$

Случаи с ограниченными кванторами $\exists x_1 \subseteq t_1$, $\forall x_1 \subseteq t_1$, $\forall x_1 \in t_1$ рассматриваются аналогично.

Из свойств операций cons, tail, head и индукционного предположения следует возможность построения формулы $\bar{\eta}$, обладающей свойствами (1), (2).

Переход $\langle n, m \rangle \to \langle 1, m+1 \rangle$:

$$P \leftrightharpoons \exists x_1 \in \mathrm{cons}(\mathrm{nil}, z_i)\ \eta(\bar{z}_k, x_1, x, y),$$

в этом случае $\bar{\eta} = \eta(\bar{z}_k, z_i, x, y)$.

Длина кванторной приставки в формуле $\bar{\eta}$ меньше или равна m. По индукционному предположению следует возможность построения формулы, обладающей свойствами (1), (2). Итак, построили формулу $\bar{\eta}(\bar{z}_k, x, y)$ без ограниченных кванторов, эквивалентную Ψ.

Используя свойства списочных операций, легко доказать, что индукцией по количеству вхождений cons, tail, head можно перейти к эквивалентной формуле, их не содержащей.

Получим формулу $\Phi(\bar{z}_k, x, y)$

$$\exists z_1 \dots \exists z_k\ \Phi(\bar{z}_k, x, y) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists z_1 \dots \exists z_k\ P(x, y, \varphi(\bar{z}_k)),$$

где Φ записана в терминах теории $\mathrm{Th}(R)$, т.е.

$$HW = \Psi(\dots) \leftrightarrow R \models \exists z_1 \dots \exists z_k\ \Phi(x, y, z_1 \dots z_k).$$

Легко показать, что $\exists \bar{z}_k\ \Phi$ представима в виде $\exists z_1 \ldots \ldots \exists z_k\ A(\bar{z}_k, x, y)$, где A – полиномиальное отношение, т.е. булева комбинация отношений вида $p(\bar{z}_k, x, y)$, где p – полином с целыми коэффициентами.

Индукцией по длине кванторной приставки элиминируем кванторы.

Напомним определения и свойства из статьи [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Действительнозначная функция $f(x_1 \ldots x_n)$ эффективна, если существует примитивно-рекурсивная процедура, которая каждому полиномиальному отношению $A(y, t_1 \ldots t_m)$ ставит в соответствие полиномиальное отношение $B(x_1 \ldots x_n,\ t_1 \ldots t_m)$ такое, что $A(f(\bar{x}_n), \bar{t}_m) \leftrightarrow B(\bar{x}_n, \bar{t}_m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как полиномиальные отношения могут быть перенумерованы естественным способом, то понятно, что имеется в виду под примитивно-рекурсивной процедурой. Индукцией по числу термов в полиномиальном отношении легко показать, что $f(x)$ эффективна, если существует примитивно-рекурсивная функция, ставящая в соответствие каждому d полиномиальное отношение

$$A(d, x, \lambda) \longleftrightarrow \lambda = \mathrm{sgn}(c_0 f^d + \ldots + c_d).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $p(x)$ - полином. Графом для $p(x)$ назовем n-ку $t_1 < \ldots < t_n$ такую, что в каждом из интервалов $(-\infty, t_1)$, (t_i, t_{i+1}), $(t_n, +\infty)$ полином монотонен. Датой графа назовем совокупность n-ки $\langle t_1 \ \ldots \ t_n \rangle$ с функциями $\mathrm{sgn}\ p(t_i), 1 \le i \le n$; $\mathrm{sgn}\ p(t_1 - 1)$, $\mathrm{sgn}\ p(t_n + 1)$.

Пусть $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$.

ТЕОРЕМА A_n. *Найдутся эффективные функции от* $a_0, \ldots, a_n$, *которые составляют дату графа, т.е.* $2n$ *эффективных функций* $t_i(a)$, $\mathrm{sgn}\ p(t_i(a))$, $t_1(a) < \ldots \ldots < t_{n-1}(a)$ *- граф для* p.

ТЕОРЕМА B_n. *Найдется* $n+1$ *эффективных функций от* $a_0 \ldots a_n$: $k(a)$, $\xi_1(a) < \ldots < \xi_n(a)$ *такие, что* $\xi_1, \ldots \ldots, \xi_{k(a)}$ *- корни многочлена* p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по n .

Случай $n = 0$ очевиден.

Переход $n-1 \to n$.

A_n . Коэффициенты полинома $p'(x)$ эффективных функций от $a_0 \ldots a_n$. По B_{n-1} найдутся $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ -корни, тогда $\operatorname{sgn}(\xi_i)$, $\operatorname{sgn} p(\xi_1 - 1)$, $\operatorname{sgn} p(\xi_{n-1}-1)$ - эффективные функции и вместе с $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ составляют дату графа для p (из свойства производной полинома).

B_n . По A_n найдется граф $t_1 < \ldots < t_{n-1}$ из эффективных функций. Экзаменуя $\operatorname{sgn} p(t_i)$, $\operatorname{sgn} p(t_1 - 1)$, $\operatorname{sgn} p(t_{n-1} + 1)$, определяем число корней.

На каждом интервале $(-\infty, t_1), (t_i, t_{i+1}), (t_{n-1}, +\infty)$ - не более одного корня или какой-то t_i-корень. Пусть ξ - корень и $t_i < \xi < t_{i+1}$. По замечанию (см.с. 64) ξ эффективна, если для любого $q(x) = c_0 x^m + \ldots + c_m$; $\operatorname{sgn} q(\xi)$ эффективна от $\bar{c}_i, \bar{a}_j$. Если $\deg(q) > \deg(p)$, то рассмотрим $\tilde{q}$ - остаток от деления $q(x) = l(x)p(x) + \tilde{q}(x)$, так как $\tilde{q}(\xi) = q(\xi)$ и такое, что $\deg \tilde{q} < \deg p$.

По индукционному предположению существуют эффективные функции $u_1 < \ldots < u_n$, образующие граф для $\tilde{q}$. Покажем, что возможно эффективно определять $u_j > \xi$ или $u_j = \xi$. Это и будет означать эффективность $\operatorname{sgn} q(\xi)$. Рассмотрим случаи:

(1) в $[t_i, t_{i+1}]$ нет u_j ;

(2) в $[t_i, t_{i+1}]$ только $u_\alpha \ldots u_{\alpha+1}$.

Так как u_j, t_i, t_{i+1} - эффективные функции, то в (1) эффективно определяется позиция ξ относительно u_j из позиций t_i, t_{i+1} относительно u_j ; в (2), проверяя $\operatorname{sgn} p(u_\alpha) \ldots$ $\ldots \operatorname{sgn}(p(u_{\alpha+1}))$, $\operatorname{sgn} p(t_i)$, $\operatorname{sgn} p(t_{i+1})$, определим $u_j > \xi$ или $u_j = \xi$.

Итак, A_n , B_n доказаны.

Используя эти теоремы, установим справедливость теоремы Тарского.

ТЕОРЕМА (Тарского). *Пусть* A *- полиномиальное отношение, тогда с помощью примитивно-рекурсивной процедуры можно построить* $B(x_2 \ldots x_n)$ *такое, что* $\exists x_1 A(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow B(x_2 \ldots x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить справедливость теоремы для $A \leftrightharpoons (p_1>0 \,\&\ldots\&\, p_n > 0)$. По теореме B_n найдутся эффективные функции $f_1^1(x_2 \ldots x_n), f_k^n(x_2 \ldots x_n)$, являющиеся корнями полиномов $p_1 \ldots p_n$.

Введем обозначения:

$$f_i(\bar{x}) \in Uf \leftrightharpoons f_i(\bar{x}) = f_1^1(\bar{x}) \vee \ldots \vee f_i(\bar{x}) = f_k^n(\bar{x});$$

$$\exists f_i(\bar{x}) \in UfP \leftrightharpoons [f_i(\bar{x}) = f_1^1(\bar{x}) \vee \ldots \vee f_i(\bar{x}) = f_k^n(\bar{x})] \,\&\, P(f_i(\bar{x}));$$

$$\forall f_i(x) \in UfP(f_i(\bar{x})) \leftrightharpoons P(f_1^1(\bar{x})) \,\&\, \ldots \,\&\, P(f_k^n(\bar{x}));$$

тогда из предыдущих теорем следует эквивалентность

$$A \leftrightarrow \exists f_1(\bar{x}) \in Uf\, \exists f_2(\bar{x}) \in Uf\, \forall f_3 \in Uf\, (f_3(\bar{x}) \neq f_1(\bar{x}) \,\&\, f_3(\bar{x}) \neq f_2(\bar{x})) \to f_3(\bar{x}) \geq f_1(\bar{x}) \vee f_2(\bar{x}) \geq f_3(\bar{x}) \,\&\, \left(\mathop{\&}_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) \geq 0\right).$$

Из определения эффективных функций найдется полиномиальное отношений B такое, что $\exists x_1 A(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow B(x_2 \ldots x_n)$.

Индукцией по длине кванторной приставки элиминируем все кванторы.

Вернемся к определению

$$\chi(Q, x, y, n) \leftrightharpoons \Psi(x, y, n) \vee Q(x, y, n+1).$$

Формулу Ψ заменяем на эквивалентную бескванторную формулу $B(x,y,n)$, записанную в терминах $Th(R)$. Тогда имеем:

$$\chi(Q,x,y,n) \leftrightarrow B(x,y,n) \vee Q(x,y,n+1) \leftrightharpoons \bar{\chi}(Q,x,y,n);$$
$$f(x) = y \leftrightarrow HW(R) \models LFP_{Q;x,y,z}\ \bar{\chi}\ (Q,x,y,1),$$

т.е. f – Δ_0+LFP-определима.

Итак, мы получили некоторую иерархию классов функций, выделяемых при различных подходах к абстрактной вычислимости. Работа в данном направлении продолжается.

Автор благодарен С.С.Гончарову, О.В.Кудинову, А.С.Морозову, С.С.Старченко за советы, оказавшиеся чрезвычайно полезными.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико-математические проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 107: Вычислительные системы. -С. 3-30.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Замечания об аксиомах списочной надстройки GES //Логические вопросы теории типов данных. - Новосибирск, 1986. -Вып. 114: Вычислительные системы. -С. 1-16.

3. ДИЧЕВ А.В. О гипотезе Д.Скордева //Алгебра и логика. - 1985. -Т. 24, №4. -С. 3-25.

4. BARWISE I. Admissible sets and structure. - Berlin, 1975.

5. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование и его семантики //Логические методы в программировании. - Новосибирск, 1987. -Вып. 120: Вычислительные системы. -С. 24-52.

6.DRIES L., van den. Remark's on Tarski's problem concerning (R,+, ,exp) //Logic colloquium ' 82, 1984.-P.240-266.

7. ШИДЛОВСКИЙ А.Б. Трансцендентные числа. -М.: Наука, 1987.

8. COHEN P.J. Procedures for Real and p-Adic Fields //Pure and Applied Mathematics. - 1969. -Vol. 22, N 2. -P.131-150.

9. GORDON C.E. Comparisons between some generalizations of recursion theory //Composition mathematica. - 1970.-Vol.22, N 3. -P. 333-345.

Поступила в ред.-изд.отд.
19 марта 1990 года