ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ
(Вычислительные системы)
1990 год Выпуск 133

УДК 510

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ "НАИВНОЙ" ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ Г.КАНТОРА

А.С. Нудельман

Введение

Известно, что одним из фундаментальных принципов, лежащих в основе канторовских теоретико-множественных представлений, является неограниченный принцип свертывания: "любому заданному условию всегда соответствует некоторый могущий быть членом класс, а именно класс всех тех и только тех предметов, для которых выполнено это условие" [1, с.174]. Однако известно и то, что неограниченность принципа свертывания приводит к появлению теоретико-множественных парадоксов (парадоксы Рассела, Кантора и др.). Если придерживаться точки зрения, согласно которой сама по себе идея универсальности принципа свертывания признается и фундаментальной, и естественной, то в качестве идеального решения проблемы теоретико-множественных парадоксов может быть принято только такое решение, при котором постулируется почти неограниченный принцип свертывания, почти неограниченный в том смысле, что из всех условий, охватываемых неограниченным принципом, исключены те и только те условия, которые приводят к возникновению противоречий.

В данной работе предпринята попытка формализации почти неограниченного принципа свертывания и построения на основе такого принципа "почти канторовской" теории множеств. В качестве интуитивного критерия $\mathbf{R}$, классифицирующего условия для свертывания на сводимые (приемлемые для свертывания) и несводимые, взят следующий критерий: условие будет сводимым тогда и только тогда, когда предположительное множество всех предметов, удовлетворяющих этому условию, не будет содержать предметы, определимые только в терминах этого множества. Несомненна связь такого критерия с расселовским принципом порочного круга: "Если в предположении, что некоторое семейство образует совокупность, в него входили бы члены, определимые только в терминах этой совокупности, то члены этого семейства не образовали бы никакой совокупности" [1, с.213].

Поскольку в рамках теории, "говорящей" только о множествах, почти неограниченный принцип свертывания выразить, по-видимому, невозможно, здесь будет построена теория, в рамках которой можно будет "говорить" не только о множествах, но и о других совокупностях, называемых классами. При формулировке этой теории - теории множеств и классов, обозначенной через SCT, использован опыт построения К.Гёделем его системы аксиом Σ [2].

§1. Теория SCT

Формулами (теории) SCT будут формулы сигнатуры $\sigma = \langle \in , \mathbf{M} \rangle$, содержащей двухместный предикатный символ $\in$, и одноместный предикатный символ $\mathbf{M}$. Переменными в формулах SCT будут буквы T, X, Y, Z (возможно, с индексами).

Предметная область (носитель модели) U теории SCT есть совокупность объектов, называемых классами. Первоначальные понятия теории суть: двухместное отношение принадлежности между классами, обозначаемое через $\in$, и свойство классов "быть множеством", обозначаемое через $\mathbf{M}$.

Логической основой теории SCT служит исчисление предикатов (с равенством) сигнатуры σ.

Аксиомы теории $\mathbf{SCT}$ распадаются на четыре группы: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$.

Группа А.

$$A_1: \forall X, Y(\forall Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \to X = Y),$$

$$A_2: \forall X(\exists Y(Y \in X) \to \exists Y(Y \in X \mathbin{\&} \forall Z(Z \in Y \to Z \notin X))),$$

$$A_3: \forall X, Y(X \in Y \to M(X) \vee \neg M(Y)),$$

$$A_4: \forall X, Y(\forall Z(Z \in X \to Z \in Y) \to M(X) \vee \neg M(Y)).$$

Аксиома A_1 в этой группе есть аксиома экстенсиональности для классов. Аксиома A_2 - аксиома фундирования (регулярности) для классов.

Класс, не являющийся множеством, будет называться собственным классом, т.е., по определению, $\mathrm{Pr}(X) \leftrightarrow \neg M(X)$. Аксиома A_3 (A_4) утверждает, что элементом (частью) может быть как множество, так и собственный класс, причем собственный класс не может быть элементом (частью) множества.

В дальнейшем буквами t, x, y, z (возможно, с индексами) будем обозначать переменные, областью изменения которых является совокупность U_M всех множеств, входящих в область U. Такие переменные будем называть M-переменными. Разумеется, всякая замкнутая формула сигнатуры σ, содержащая M-переменные, будет сокращенной записью некоторой формулы $\mathbf{SCT}$, которую можно восстановить (с точностью до эквивалентности) обычным способом, заменяя каждую формулу (подформулу) вида $\forall x\, \Phi(x)$ на $\forall X(M(X) \to \Phi(X))$ и каждую формулу (подформулу) вида $\exists x\, \Phi(x)$ на $\exists X(M(X) \mathbin{\&} \Phi(X))$. Формулы сигнатуры σ, содержащие M-переменные, будем называть (конечно, условно) формулами $\mathbf{SCT}$. В отличие от M-переменных переменные T, X, Y, Z будем называть C-переменными. Формулу, не содержащую символа M и содержащую только M-переменные (только C-переменные), будем называть M-формулой (C-формулой).

Формулу SCT $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \exists \nu \forall \xi (\xi \in \nu \leftrightarrow \varphi(\xi, \mu_1, \dots, \mu_n)), n \geq 0$, где подформула $\varphi(\xi, \mu_1, \dots, \mu_n)$ не содержит ν свободно и не содержит свободных переменных, отличных от $\xi, \mu_1, \dots, \mu_n$, будем называть сверткой, а подформулу $\varphi(\xi, \mu_1, \dots, \mu_n)$ - ядром этой свертки. Ясно, что если $\varphi(\xi, \mu_1, \dots, \mu_n)$ является ядром свертки Φ, то φ выражает (средствами языка теории SCT) некоторое семейство $S_\varphi = \{ S^\varphi_{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n} \mid \bar{\mu}_1 \in U, \dots, \bar{\mu}_n \in U \}$ свойств классов, а Φ выражает утверждение "для всякого свойства из семейства S_φ существует класс всех классов, обладающих этим свойством". Свертку, являющуюся M-формулой (C-формулой), будем называть M-сверткой (C-сверткой). Совокупность всех M-сверток будем обозначать через SW.

Примем следующие соглашения. Если Φ - формула SCT, то запись $\Phi[\overline{\mu_1, \dots, \mu_k}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_{k+l}]$ будет означать, что переменные $\mu_1, \dots, \mu_{k+l}$ попарно различны, $\mu_1, \dots, \mu_k$ есть перечень всех связанных переменных, входящих в Φ, и $\mu_{k+1}, \dots, \mu_{k+l}$ есть перечень всех переменных, свободных в Φ. Если в одном контексте после записи $\Phi[\overline{\mu_1, \dots, \mu_k}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_{k+l}]$ встречается запись $\Phi[\overline{\nu_1, \dots, \nu_k}, \nu_{k+1}, \dots, \nu_{k+l}]$, то последняя будет обозначать результат подстановки переменных $\nu_1, \dots, \nu_{k+l}$ вместо всех вхождений в $\Phi[\overline{\mu_1, \dots, \mu_k}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_{k+l}]$ переменных $\mu_1, \dots, \mu_{k+l}$ соответственно.

Если Ψ_1 есть M-формула $\Phi[\overline{x_1, \dots, x_k}, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}]$, а Ψ_2 есть (C-формула) $\Phi[\overline{X_1, \dots, X_k}, X_{k+1}, \dots, X_{k+l}]$, то формулы Ψ_1 и Ψ_2 будем называть двойственными.

Аксиомы группы B представимы схемой аксиом (предполагающей, естественно, некоторую нумерацию соответствующих формул SCT).

Группа B.

$$B_n : \forall t_1,\dots,t_{k_n} \exists y \forall x \, (x \in y \leftrightarrow \Phi_n[\overline{z_1,\dots,z_{l_n}}, x,$$

$$t_1,\dots,t_{k_n}]) \to \forall T_1,\dots,T_{k_n} \exists Y \forall X \, (X \in Y \leftrightarrow \Phi_n[\overline{Z_1,\dots,Z_{l_n}},$$

$X, T_1,\dots,T_{k_n}])$, где Φ_n - формула SCT , не содержащая символа M .

Аксиомы этой группы есть аксиомы переноса. Ими утверждается, что для всякой M-свертки Ψ ,если Ψ истинна в U_M , то двойственная этой Ψ C-свертка истинна в U .

Свойство множеств (классов) S будем называть M-свойством (C-свойством), если существует M-свертка (C-свертка) Φ такая, что свойство S принадлежит семейству, выражаемому ядром этой Φ .

Аксиомы группы C устанавливают существование классов. Аксиомы этой группы представимы схемой аксиом.

Группа C.

$$C_n : \forall t_1,\dots,t_{k_n} \exists Y \forall X \, (X \in Y \leftrightarrow M(X) \& \Phi_n[\overline{z_1,\dots,z_{l_n}},$$

$X, t_1,\dots, t_{k_n}])$, где Φ_n - формула SCT , не содержащая символа M .

Аксиомами этой группы утверждается, что для всякого M-свойства множеств существует класс всех множеств, обладающих этим свойством.

Пусть $\varphi(x, t_1,\dots,t_k)$ - ядро M-свертки Φ , а $\psi(X, T_1,\dots,T_k)$ - ядро C-свертки, двойственной свертке Φ. Пусть ядро φ выражает семейство $\{S^{\varphi}_{\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_k} \mid \bar{t}_1 \in U_M, \dots$

$\dots, \bar{t}_k \in U_M \}$ свойств множеств, а ψ - семейство

$\{S^{\psi}_{\bar{T}_1,\ldots,\bar{T}_k} \mid \bar{T}_1 \in U,\ldots,\bar{T}_k \in U\}$ свойств классов. И пусть свойство множеств S_M есть $S^{\varphi}_{\bar{t}^0_1,\ldots,\bar{t}^0_k}$, где $\bar{t}^0_1,\ldots$ $\ldots, \bar{t}^0_k$ - некоторые множества из U_M. Тогда свойство классов S будем называть сопряженным со свойством множеств S_M, если $S = S^{\psi}_{\bar{t}^0_1,\ldots,\bar{t}^0_k}$.

Аксиомы группы D представимы схемой аксиом.

Группа D.

$$D_n : \forall t_1,\ldots,t_{k_n} \forall Y\{\forall X\ (X \in Y \leftrightarrow M(X) \,\&\, \Phi_n[\overline{Z_1,\ldots,Z_{1_n}}, X, t_1,\ldots,t_{k_n}]) \to [M(Y) \leftrightarrow \forall X\ (\Phi_n[\overline{Z_1,\ldots,Z_{1_n}}, X, t_1,\ldots,t_{k_n}] \to X \in Y)]\},$$

где Φ_n - формула SCT, не содержащая символа M.

Аксиомы этой группы есть аксиомы сводимости. Ими утверждается, что для всякого M-свойства множеств S_M класс Y всех множеств, обладающих свойством S_M, будет множеством тогда и только тогда, когда любой класс, обладающий сопряженным с S_M свойством, принадлежит классу Y.

§2. Об аксиомах SCT

Характеризуя аксиомы SCT в целом, покажем, что SCT является скорее всего непротиворечивой теорией и что аксиомами SCT постулирован некий критерий R_D, который можно рассматривать в качестве экспликата почти неограниченного принципа свертывания, почти неограниченного в следующем (теперь "конструктивном") смысле: все M-свойства множеств (т.е. все свойства множеств, формулируемые в терминах только множеств) сводимы, кроме тех, сводимость которых приводит к нарушению расселовского принципа порочного круга.

Определим две последовательности теорий, иллюстрирующие процесс "развертывания" теории SCT : последовательность L_M теорий множеств $ST^0, ST^1, \dots$ и последовательность L теорий классов CT^0, $CT^1, \dots$ Формулами теорий из L_M будут формулы сигнатуры $\sigma_M = \langle \in \rangle$, переменные в которых - буквы t, x, y, z (возможно, с индексами). Логическая основа теорий из L_M - исчисление предикатов (с равенством) сигнатуры σ_M. Формулами теорий из L будут формулы SCT . Логическая основа теорий из L - исчисление предикатов (с равенством) сигнатуры σ . В дальнейшем всякая формула теорий множеств из L_M будет отождествляться с графически идентичной M-формулой SCT и называться, когда это удобно для изложения, M-формулой SCT.

Для всякого $i = 0,1,\dots$ аксиомы теории ST^i распадаются на две группы: A_M, B_M^i , а аксиомы теории CT^i - на три группы: A, B^i, C .

<u>Группа A_M</u> .

1. $\forall x,y\ (\forall z(z\in x \leftrightarrow z\in y) \to x = y)$;

2. $\forall x\ (\exists y(y\in x) \to \exists y(y\in x\ \&\ \forall z(z\in y \to z\notin x)))$.

Группы A, C определены в предыдущем параграфе.

Группы B_M^i и B^i определяются следующим образом:

1) $B_M^0 = \emptyset$ (группа B_M^0 пуста);

2) $B^i = B_M^i \cup \{\Phi \mid \exists \Phi_M \in B_M^i$ (Φ двойственна Φ_M) $\}$

(группа B^i есть объединение группы B_M^i и семейства C-сверток, двойственных M-сверткам из B_M^i);

3) $B_M^{i+1} = B_M^i \cup \{\Phi \in SW \mid CT^i + D \vdash \Phi\}$ (группа B_M^{i+1} есть объединение группы B_M^i и семейства всех M-сверток, до-

казуемых в теории CT^i, пополненной аксиомами группы D определенной в предыдущем параграфе).

Будем обозначать через B_M семейство M-сверток, равное объединению $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_M^i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Всякая M-свертка доказуема в SCT тогда и только тогда, когда она принадлежит семейству* B_M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая M-свертка из B_M^1 (заметим, что $B_M^0 = \emptyset$) доказуема в SCT, поскольку она доказуема в CT^0+D и группа B^0 пуста. Кроме того, если все M-свертки из B_M^i, $i \geq 1$, доказуемы в SCT, то все M-свертки из B_M^{i+1} доказуемы в SCT, поскольку они доказуемы в CT^i+D и всякая аксиома группы B^i доказуема в SCT (возможно, с использованием аксиом группы B). Следовательно, выполняется $\Phi \in B_M \rightarrow SCT \vdash \Phi$.

Пусть теперь $P = \langle \Psi_1, \ldots, \Psi_n \rangle$ - доказательство в SCT M-свертки Φ_M $(\Psi_n = \Phi_M)$. Без ограничения общности будем считать доказательство B-каноническим в следующем смысле: если формула $\Psi_j \in P$ есть аксиома из группы B, то а) Ψ_{j-1} есть антецедент этой аксиомы, б) Ψ_{j+1} есть консеквент этой аксиомы, в) последовательность $\langle \Psi_1, \ldots, \Psi_{j-1} \rangle$ является доказательством в SCT M-свертки Ψ_{j-1} и г) формулы Ψ_{j-1}, Ψ_j и Ψ_{j+1} имеют только по одному вхождению в доказательство P. Пусть l - число аксиом из группы B, входящих в P. Если $l = 0$, то P будет доказательством в CT^0+D и, следовательно, $\Phi_M \in B_M^1$. Если $l > 0$ и $\Psi_{k_1}, \ldots, \Psi_{k_l}$ - перечень входящих в P аксиом из группы B в порядке их вхождения в P, то последовательность формул $P_1 = \langle \Psi_1, \ldots, \Psi_{k_1-1}, \Psi_1, \Psi_{k_1+1}, \ldots$

$\ldots,\Psi_{k_1-1},\Psi_1,\Psi_{k_1+1},\ldots,\Psi_n\rangle$ будет доказательством в CT^1+D и, следовательно, $\Phi_M\in B_M^{1+1}$ (заметим, что начальный отрезок $\langle\Psi_1,\ldots,\Psi_{k_1-1}\rangle$ есть доказательство в CT^0+D, начальный отрезок $\langle\Psi_1,\ldots,\Psi_{k_2-1}\rangle$ есть доказательство в CT^1+D, поскольку $\Psi_{k_1-1},\Psi_{k_1+1}\in B^1$, и т.д.). Таким образом, для всякой M-свертки Φ выполняется $SCT\vdash\Phi\to$ $\to\Phi\in B_M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если все теории классов из последовательности* L *непротиворечивы, то теория* SCT *непротиворечива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что SCT противоречива. Тогда в SCT будет доказуема любая формула и, в частности, расселовская M-свертка $\Phi=\exists y\forall x\,(x\in y\leftrightarrow x\notin x)$. Значит (ввиду утверждения 1), для некоторого j будет $\Phi\in B_M^j$. Из последнего следует противоречивость теории CT^j.

В дальнейшем о всяком упоминаемом в тексте семействе совокупностей будет предполагаться, что на нем определено естественное (стандартное) отношение принадлежности $\in$.

Обоснуем, имитируя доказательство по индукции, непротиворечивость теорий CT^i, $i=0,1,\ldots$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Теория* CT^0 *непротиворечива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предметной областью (носителем модели) теории CT^0 может служить двухэлементная совокупность $U^0=$ $=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, содержащая одно множество $\emptyset$ и один собственный класс $\{\emptyset\}$. Попутно отметим, что одноэлементная совокупность $\{\emptyset\}$ является предметной областью (U_M^0) теории множеств ST^0.

Индуктивный шаг будет подкреплен не доказательством (доказательства может вообще не существовать), а только обоснованием.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для всякого* $i = 0,1,\ldots,$ *если теория* CT^i *непротиворечива, то теория* CT^{i+1} *непротиворечива.*

ОБОСНОВАНИЕ. Пусть CT^i непротиворечива. Тогда CT^i имеет модель, т.е. другими словами, существует (непустая) предметная область теории CT^i, на которой определено одноместное отношение "быть множеством". Обозначим через U^i предметную область теории классов CT^i, а через U^i_M - совокупность классов из U^i, являющихся множествами. Ясно,что U^i_M будет предметной областью теории множеств ST^i.

Определим эпистемологическую интерпретацию теории классов CT^i. Но прежде чем сделать это, рассмотрим поясняющий пример. Пусть P - некоторое доказательство в теории множеств ST^i, j-й шаг которого (не первый и не последний) представляет собой допущение М-свертки $\forall t\exists y\forall x\ (x\in y \leftrightarrow \varphi(x,t))$, и пусть других допущений в P нет. Ясно, что на j-м шаге (доказательства P) утверждается q_j : "предположим, что для всякого $\bar{t}\in U^i_M$ существует $\bar{y}\in U^i_M$ такое, что $\bar{y} = \{\bar{x}\in U^i_M \mid S^{\varphi}_{\bar{t}}(\bar{x})\}$", где $S^{\varphi}_{\bar{t}}$ - М-свойство множеств, выраженное в (языке) ST^i формулой $\varphi(x,t)_{\bar{}}$, в которой переменная t фиксирована и именует множество $\bar{t}$. Через $\pi_{\bar{t}}$, $\bar{t}\in U^i_M$, будем обозначать те множества, существование которых в U^i_M предполагается на j-м шаге. Эти множества будем называть предполагаемыми множествами. Отметим следующий факт: до j-го шага и на самом j-м шаге областью значений переменных в формулах из P является U^i_M, а после j-го шага (и до элиминации допущения) областью значений переменных в формулах из P будет предполагаемая совокупность $(U^i_M)_j$ такая, что $U^i_M \subseteq (U^i_M)_j$, все $\pi_{\bar{t}}$, $\bar{t}\in U^i_M$, принадлежат совокупности $(U_M^i)_j$ и все аксиомы ST^i (и только они) постулированы на $(U_M^i)_j$. Если совокупность $(U_M^i)_j$ существует, то в эпистемологической ситуации после j-го шага доказательства P о предполагаемых множествах $\pi_{\bar{t}}$, $\bar{t} \in U_M^i$, будем говорить, что они как бы принадлежат области U_M^i.

Предположим, что совокупность $(U_M^i)_j$ существует. Тогда в ситуации после j-го шага утверждение q_j будет равнозначно утверждению Q_j: "для всякого $\bar{t} \in U_M^i$ существует предполагаемое множество $\pi_{\bar{t}} \in (U_M^i)_j$ такое, что $\pi_{\bar{t}} = \{ \bar{x} \in U_M^i \mid S_{\bar{t}}^{\varphi}(\bar{x}) \}$, $\pi_{\bar{t}}$ как бы принадлежит области U_M^i и предполагается, что $\pi_{\bar{t}} \in U_M^i$". Если, например, предположение, сделанное на j-м шаге, окажется в дальнейшем опровергнутым, то этим фактом будет доказано в ST^i отрицание допущенной М-свертки и этим же фактом будет доказано утверждение: "существует $\bar{t} \in U_M^i$ такое, что для всякого предполагаемого множества $\pi \in (U_M^i)_j$ выполняется следующее: если $\pi = \{ \bar{x} \in U_M^i \mid S_{\bar{t}}^{\varphi}(\bar{x}) \}$ и π как бы принадлежит области U_M^i, то $\pi \notin U_M^i$". Аналогичная двойственность будет иметь место и в том случае, когда предположение j-го шага окажется в дальнейшем подтвержденным.

Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ - перечень всех М-сверток. Заменим j-й шаг доказательства P на следующий: "предположим, что $\Phi_1 \& \Phi_2 \& \dots$". Полученную в результате такой замены последовательность назовем квазидоказательством в ST^i и обозначим через $\tilde{P}$. Через $(\tilde{U}_M^i)_j$ обозначим предполагаемую совокупность, в которую превращается совокупность $(U_M^i)_j$ при замене доказательства P на квазидоказательство $\tilde{P}$. Отождествим предметную область U^{i} теории CT^{i} с предполагаемой совокупностью $(\widetilde{U}^{i}_{M})_{j}$. Такое отождествление возможно ввиду того, что

а) $U^{i}_{M} \subseteq U^{i}$,

б) все $\pi_{\bar{t}}$, $\bar{t} \in U^{i}_{M}$, принадлежат области U^{i} (это обеспечивается аксиомами группы C),

в) все аксиомы ST^{i} выполняются на U^{i} (это обеспечивается тем обстоятельством, что все формулы CT^{i} , двойственные аксиомам ST^{i} , являются аксиомами CT^{i});

г) каждая аксиома CT^{i} , являющаяся C-формулой, двойственна некоторой аксиоме ST^{i} .

Заметим, что существование предметной области U^{i} влечет существование совокупности $(\widetilde{U}^{i}_{M})_{j}$ объектов, как бы принадлежащих предметной области U^{i}_{M} теории множеств ST^{i} .

Итак, эпистемологическая интерпретация I_{E} теории классов CT^{i} есть отождествление области U^{i} с совокупностью $(\widetilde{U}^{i}_{M})_{j}$, предполагаемой после j-го шага квазидоказательства $\widetilde{P}$ в теории множеств ST^{i} . При таком отождествлении для всякого M-свойства S_{M} класс $\{ x \in U^{i}_{M} | S_{M}(x) \}$ отождествляется с предполагаемым (на j-м шаге квазидоказательства $\widetilde{P}$) множеством $\{x \in U^{i}_{M} | S_{M}(x)\}$, принадлежащим совокупности $(\widetilde{U}^{i}_{M})_{j}$. Эпистемологическая интерпретация теории CT^{i} обладает следующим свойством: $\forall X \in U^{i}(M(X) \longleftrightarrow I_{E}(X) \in U^{i}_{M})$, где $I_{E}(X)$ - предполагаемое множество из $(\widetilde{U}^{i}_{M})_{j}$, отождествляемое при интерпретации I_{E} с классом X . При интерпретации I_{E} аксиома A_{3} (A_{4}) выражает тот очевидный факт, что элементами (частями) "реально" существующих множеств (т.е. множеств из U^{i}_{M}) могут быть только "реально" существующие множества. Об интерпретации I_E будем говорить, что она базируется на квазидоказательстве (в ST^1) $\tilde{P}$.

Выясним эпистемологический смысл аксиом группы D в контексте теории CT^1. Пусть S_M - некоторое M-свойство множеств из U_M^1. И пусть π — множество всех множеств из U_M^1, удовлетворяющих условию S_M, в предположении, что такое множество существует, а Y - класс всех множеств из U_M^1, удовлетворяющих S_M. В соответствии с интуитивным критерием R свойство S_M будет сводимым тогда и только тогда, когда любой элемент множества π не будет определим только через (о.т.ч.) множество π. Поскольку "S_M сводимо" означает то же, что и " Y - множество", а $\pi = \{x \in U_M^1 \mid S_M(x)\}$, то критерий R есть эквивалентность: (для всякого S_M)

$$M(Y) \leftrightarrow \forall x \in U_M^1 \,(S_M(x) \to \neg(x \text{ о.т.ч. } \pi)).$$

С другой стороны, в принятых сейчас обозначениях расселовский принцип порочного круга (точнее, экспликация этого принципа) представляет собой импликацию: (для всякого S_M)

$$\exists x \in U_M^1 \,(S_M(x) \,\&\, (x \text{ о.т.ч. } \pi)) \to \neg M(Y).$$

Отсюда ясно, что критерий R классификации M-свойств множеств на сводимые и несводимые согласован с расселовским принципом порочного круга и выражает почти неограниченный принцип свертывания.

Покажем равносильность критерия R и критерия R_D, сформулированного в аксиомах группы D: (для всякого S_M)

$$M(Y) \leftrightarrow \forall X \in U^1 \,(S(X) \to X \in Y),$$

где S- свойство классов, сопряженное со свойством S_M. Равносильность этих критериев следует из факта существования эпистемологической интерпретации I_E теории CT^1 и факта корректности квазидоказательства (в теории множеств ST^i) $\tilde{P}$ *). Действительно, пусть $\varphi(x, t_1, \ldots, t_k)$ - формула ST^i, выражающая M-свойство множеств S_M (переменные $t_1, \ldots, t_k$ фиксированы). Тогда областью значений всех переменных из $\varphi(x, t_1, \ldots, t_k)$ до j-го шага (квазидоказательства $\tilde{P}$) будет область U^i_M, а после j-го шага - предполагаемая совокупность $(\tilde{U}^i_M)_j$. Обозначим через $\tilde{S}_M$ свойстно предполагаемых множеств, выражаемое формулой $\varphi(x, t_1, \ldots, t_k)$ после j-го шага квазидоказательства $\tilde{P}$. Поскольку квазидоказательство $\tilde{P}$ логически корректно и в этом квазидоказательстве совокупности U^i_M и $(\tilde{U}^i_M)_j$ неразличимы и неразличимы свойства S_M и $\tilde{S}_M$, то логически корректным будет отождествление совокупностей U^i_M, $(\tilde{U}^i_M)_j$ и отождествление свойств S_M, $\tilde{S}_M$. Сделаем такое отождествление. Тогда при эпистемологической интерпретации I_E класс Y будет отождествлен с предполагаемым множеством π, область U^i будет отождествлена с областью U^i_M, а свойство S будет отождествлено со свойством S_M. Утверждение $S(X) \,\&\, X \notin Y$ при эпистемологической интерпретации будет означать то, что предполагаемое множество $I_E(X)$ входит в π (так как $S_M(I_E(X))$) и что $I_E(X)$ определимо только через π, поскольку множество $I_E(X)$ "появляется" в π только после "появления" (утверждения о существовании) предполагаемого множества π. Следова-

---

*) Поскольку во всяком доказательстве в CT^i+D, использующем критерий R_D, может встретиться только конечное число аксиом из группы C, то применение критерия R_D происходит всегда в контексте некоторой подтеории теории CT^i, эпистемологическая интерпретация которой будет базироваться на фактическом доказательстве в ST^i, включающем в себя допущение конъюнкции конечного числа M-сверток.

тельно, при интерпретации I_E правые части критериев R_D и R будут утверждать одно и то же.

Таким образом, критерий R_D, постулируемый аксиомами группы D в контексте теории CT^i, выражает почти неограниченный принцип свертывания. Согласованность критерия R_D с расселовским принципом порочного круга и то обстоятельство, что аксиомами ST^i не накладывается каких-либо ограничений на предполагаемую совокупность всех сводимых M-свойств множеств, является, по-видимому, достаточным основанием для принятия гипотезы h^i.

ГИПОТЕЗА h^i. *Если теория CT^i непротиворечива, то теория CT^i+D непротиворечива.*

Далее будет использована идея типизации множеств. Множества теории SCT будут множествами типа 0, классы теории SCT будут множествами типа 1, и будут рассмотрены множества вплоть до типа $(i+2)$.

Определим последовательность L_W теорий множеств

$$WT^0, WT^1, \ldots, WT^{i+1}.$$

Формулами теорий из L_W будут формулы сигнатуры $\sigma_W = \langle \in, W_0, \ldots, W_{i+1} \rangle$, где $W_0, \ldots, W_{i+1}$ - одноместные предикатные символы. Переменными в формулах теорий из L_W будут буквы τ, χ, ϕ, ω (возможно, с индексами). Предметной областью U_W^j теории WT^j, $j=0,\ldots,i+1$, будет семейство совокупностей, называемых множествами типа $(i+2)$, или, иначе, $(i+2)$-множествами. Первоначальными понятиями теории WT^j будут стандартное отношение принадлежности $\in$ и свойства $(i+2)$-множеств "быть множеством типа m" ("быть m-множеством") W_m, $m=0,\ldots,i+1$. Логической основой теории WT^j будет исчисление предикатов (с равенством) сигнатуры σ_W.

Для всякого $j = 0, \ldots, i+1$ аксиомы теории WT^j распадаются на три группы A_W, B_W^j, C_W.

Группа A_W.

1. $\forall \chi, \psi (\forall \omega (\omega \in \chi \longleftrightarrow \omega \in \psi) \to \chi = \psi)$.

2. $\forall \chi (\exists \psi (\psi \in \chi) \to \exists \phi (\phi \in \chi \,\&\, \forall \omega (\omega \in \phi \to \omega \notin \chi)))$.

3. $\forall \chi, \psi (\chi \in \psi \to W_0(\chi) \vee (W_1(\chi) \,\&\, \neg W_0(\psi)) \vee \ldots$
$\ldots \vee (W_{i+1}(\chi) \,\&\, \neg W_i(\psi)) \vee \neg W_{i+1}(\psi))$.

4. $\forall \chi, \psi (\forall \omega (\omega \in \chi \to \omega \in \psi) \to W_0(\chi) \vee (W_1(\chi) \,\&$
$\& \neg W_0(\psi)) \vee \ldots \vee (W_{i+1}(\chi) \,\&\, \neg W_i(\psi)) \vee \neg W_{i+1}(\psi))$.

Для любого $m = 0, \ldots, i+1$ буквами $t^{(m)}, x^{(m)}, y^{(m)}$, $z^{(m)}$ будем обозначать переменные (W_m-переменные), областью изменения которых является семейство всех m-множеств, входящих в область U_W^j, $j \leq i+1$. Переменные τ, χ, ψ, ω будем называть W_{i+2}-переменными и обозначать через $t^{(i+2)}$, $x^{(i+2)}$, $y^{(i+2)}$, $z^{(i+2)}$. Формулы сигнатуры σ_W, содержащие W_m-переменные, $m \leq i+2$, будем называть (конечно, условно) формулами теорий из I_W.

Прежде чем определять группы B_W^j, $j \leq i+1$, определим дополнительную группу аксиом D_W. Аксиомы этой группы представимы $(i+2)$-я схемами аксиом:

$$D_W^{(m)}: \ \forall t_1^{(m)}, \ldots, t_{k_n}^{(m)} \forall y^{(m+1)} \{\forall x^{(m+1)} (x^{(m+1)} \in$$

$$\in y^{(m+1)} \longleftrightarrow W_m(x^{(m+1)}) \,\&\, \Phi_n [\overline{z_1^{(m)}, \ldots, z_{l_n}^{(m)}}, x^{(m+1)},$$

$$t_1^{(m)}, \ldots, t_{k_n}^{(m)}]) \to [W_m(y^{(m+1)}) \longleftrightarrow \forall x^{(m+1)}$$

$$(\Phi_n[\overline{z_1^{(m+1)},\ldots,z_{l_n}^{(m+1)}},x^{(m+1)},t_1^{(m)},\ldots,t_{k_n}^{(m)}]\to$$

$\to x^{(m+1)}\in y^{(m+1)})]\}$, где $m\le i+1$, Φ_n - формула теорий из L_W, не содержащая символов $W_0,\ldots,W_{i+1}$.

Формулу (теорий из L_W) $\Phi=\forall\mu_1,\ldots,\mu_n\exists\nu\forall\xi(\xi\in\nu\leftrightarrow\leftrightarrow\varphi(\xi,\mu_1,\ldots,\mu_n)),n\ge 0$, где подформула $\varphi(\xi,\mu_1,\ldots,\mu_n)$ не содержит ν свободно, будем называть W_m-сверткой $m\le i+1$, если Φ не содержит символов $W_0,\ldots,W_{i+1}$ и все переменные, входящие в Φ, являются W_m-переменными.

Группы B_W^j определяются рекурсивно: $B_W^0=\emptyset$, а формула Φ входит в группу B_W^{j+1}, $j<i+1$, тогда и только тогда, когда Φ является W_m-сверткой (для некоторого $m\le i+1$) и Φ доказуема в теории WT^j+D_W.

Аксиомы группы C_W представимы $(i+2)$-я схемами аксиом:

$$C_W^{(m)}:\ \forall t_1^{(m)},\ldots,t_{k_n}^{(m)}\exists y^{(m+1)}\forall x^{(m+1)}(x^{(m+1)}\in$$

$$\in y^{(m+1)}\leftrightarrow W_m(x^{(m+1)})\ \&\ \Phi_n[\overline{z_1^{(m)},\ldots,z_{l_n}^{(m)}},x^{(m+1)},$$

$t_1^{(m)},\ldots,t_{k_n}^{(m)}])$, где $m\le i+1$, Φ_n - формула теорий из L_W, не содержащая символов $W_0,\ldots,W_{i+1}$.

Отметим факт: теория WT^0 непротиворечива. Действительно, предметной областью (носителем модели) теории WT^0 может служить совокупность U_W^0 $(i+2)$-множеств такая, что а) совокупность $U_{W_0}^0$ всех 0-множеств, входящих в U_W^0, есть единичное множество $\{\emptyset\}$ и б) если $U_{W_m}^0$, $m\le i+1$, - множество всех m-множеств, входящих в U_W^0, то совокупностью

$U^0_{W_{m+1}}$ будет множество всех подмножеств множества $U^0_{W_m}$ ($U^0_W = \bigcup_{m=0}^{i+2} U^0_{W_m}$) .

Заметим далее, что для любого $m = 0,\dots,i+1$ схема аксиом $D^{(m)}_W$ совпадает со схемой D , если в последней M-переменные заменить на W_m-переменные, C-переменные - на W_{m+1} -переменные, а символ M заменить на символ W_m . Следовательно, в контексте теории WT^j, $j \leq i$, схемой $D^{(m)}_W$, $m \leq i+1$, выражается критерий сводимости свойств m-множеств (формулируемых в терминах только m-множеств),аналогичный критерию R_D . Проведя рассуждения,аналогичные тем, которые мотивируют принятие (истинность) гипотезы h^i , можно убедиться в том, что существуют, по-видимому, достаточные основания для принятия гипотезы H^i.

ГИПОТЕЗА H^i . *Для всякого* $j = 0,\dots,i$, *если теория* WT^j *непротиворечива, то теория* WT^j+D_W *непротиворечива.*

Примем гипотезу H^i. Тогда (ввиду непротиворечивости WT^0) непротиворечивой будет теория WT^{i+1} .Пусть U^{i+1}_W - предметная область теории WT^{i+1} , а $U^{i+1}_{W_1}$ - совокупность всех 1-множеств, входящих в U^{i+1}_W. Легко убедиться, что $U^{i+1}_{W_1}$ будет предметной областью теории CT^{i+1} , если 1-множества назвать классами теории CT^{i+1} , 0-множества - множествами теории CT^{i+1}, а свойство 1-множеств "быть 0-множеством" назвать свойством класса "быть множеством" (индукцией по j доказывается, что для всякого $j \leq i+1$, если некоторая M-свертка принадлежит группе B^j_M , то соответствующая этой M-свертке W_0-свертка принадлежит группе B_W^j и группе B_W^j принадлежат соответствующие (двойственные) W_m-свертки при $m = 1,\ldots,(i+2)-j)$. Этим закончим обоснование утверждения 4.

Следствием утверждений 2-4 является

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Теория* SCT *непротиворечива.*

Разумеется, это утверждение не доказано, а только обосновано, причем обоснование этого утверждения опирается на принятие гипотез H^i, $i = 0,1,\ldots$, каждая из которых является, по сути, конечной конъюнкцией гипотез о допустимости той или иной разновидности почти неограниченного принципа свертывания.

Обозначим через ST теорию множеств, получающуюся из ST^0 заменой группы B_M^0 на группу B_M. Ясно, что ST - максимальная теория множеств, строящаяся средствами теории SCT. Ясно также, что U_M будет предметной областью теории ST. Если иметь в виду тот эпистемологический смысл, который имеют аксиомы группы D в контексте теорий $CT^i, i = 0,1,\ldots$, то можно сказать, что в теории SCT аксиомами группы D постулирован почти неограниченный принцип свертывания для ST-множеств.

§3. О некоторых теоремах SCT о существовании множеств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В* SCT *доказуема* M*-свертка* Sw_1:

$$\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \neq x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\, (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X)\ \&\ X \neq X)$$

(существование класса Y_0 следует из (подходящей) аксиомы группы C). Следствием (подходящей) аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\, (X \neq X \rightarrow X \in Y_0).$$

Поскольку выполняется $\forall X\ (X = X)$, то $M(Y_0)$.

Множество, определяемое M-сверткой Sw_1 , есть пустое множество $\emptyset$. Отметим, что в SCT доказуема (ввиду подходящей аксиомы из группы B) C-свертка $\exists Y\ \forall X\ (X \in Y \leftrightarrow X \neq X)$, определяющая пустой класс. В силу аксиом A_1 и A_3 пустое множество и пустой класс совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В* SCT *доказуема* M*-свертка* Sw_2 *:*

$$\forall t_1, t_2\ \exists y\ \forall x\ (x \in y \leftrightarrow x = t_1 \vee x = t_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X)\ \&\ (X = t_1 \vee X = t_2))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C). Следствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\ ((X = t_1 \vee X = t_2) \rightarrow X \in Y_0).$$

Предположим, что $\neg M(Y_0)$. Тогда существует класс X_0 такой, что $(X_0 = t_1 \vee X_0 = t_2)$ и $X_0 \notin Y_0$ - противоречие, поскольку $M(X_0)$.

Множество, определяемое M-сверткой Sw_2 , есть неупорядоченная пара $\{t_1, t_2\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *В* SCT *доказуема* M*-свертка* Sw_3 *:*

$$\forall t\ \exists y\ \forall x\ (x \in y \leftrightarrow \exists z\ (z \in t\ \&\ x \in z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X)\ \&\ \exists z\ (z \in t\ \&\ X \in z))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C). Следствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\ (\exists Z\ (Z \in t\ \&\ X \in Z) \rightarrow X \in Y_0).$$

Предположим, что $\neg M(Y_0)$. Тогда существуют классы X_0, Z_0 такие, что $(Z_0 \in t \;\&\; X_0 \in Z_0)$ и $X_0 \notin Y_0$. Из перво-го, используя аксиому A_3, последовательно выводим $M(Z_0)$ и $M(X_0)$. Учитывая определение класса Y_0, получаем $X_0 \in \in Y_0$. Противоречие.

Множество, определяемое M-сверткой Sw_3, есть мно-жество-сумма множества t.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В* SCT *доказуема* M-*свертка* Sw_4 :

$$\forall t\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \to z \in t)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\, (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X) \;\&\; \forall z\, (z \in X \to z \in t))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C).След-ствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\, (\forall Z\, (Z \in X \to Z \in t) \to X \in Y_0).$$

Предположим, что $\neg M(Y_0)$. Тогда существует класс X_0 та-кой, что $X_0 \subseteq t$ и $X_0 \notin Y_0$, где через $X_0 \subseteq t$ обозначе-но выражение $\forall Z\, (Z \in X_0 \to Z \in t)$. Из $X_0 \subseteq t$ и аксиомы A_4 выводим $M(X_0)$, что влечет $X_0 \in Y_0$.

Множество, определяемое M-сверткой Sw_4, есть множе-ство-степень множества t.

В дальнейшем формулу $\Phi[\overline{\mu_1, \ldots, \mu_k}, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_{k+l}]$, в которой переменные $\mu_1, \ldots, \mu_k$ являются M-переменными, бу-дем обозначать через $\Phi^M(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_{k+l})$, а формулу $\Phi[\overline{\nu_1, \ldots, \nu_k}, \nu_{k+1}, \ldots, \nu_{k+l}]$, в которой переменные $\nu_1, \ldots, \nu_k$ являются C-переменными, будем обозначать че-рез $\Phi^C(\nu_{k+1}, \ldots, \nu_{k+l})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Для всякой формулы* Φ, *не содер-жащей символа* M, *если в* SCT *доказуема формула*

$$\forall t_1,\ldots,t_k \forall x\ (\exists! y\ \Phi^M(x,y,t_1,\ldots,t_k)\ \&$$

$$\&\ \forall Y\ (Pr(Y) \to \neg\Phi^C(x,Y,t_1,\ldots,t_k))),$$

то в SCT *доказуема* M-*свертка* Sw_5^{Φ} :

$$\forall t_1,\ldots,t_k \forall t \exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists z\ (z \in t\ \&\ \Phi^M(z,x,t_1,\ldots,t_k))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ - формула, для которой выполняется условие предложения. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X)\ \&\ \exists z\ (z \in t\ \&\ \Phi^M(z,X,t_1,\ldots,t_k)))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C). Следствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\ (\exists Z\ (Z \in t\ \&\ \Phi^C(Z,X,t_1,\ldots,t_k)) \to$$

$$\to X \in Y_0).$$

Предположим, что $\neg M(Y_0)$. Тогда существуют классы X_0 , Z_0 такие, что $(Z_0 \in t\ \&\ \Phi^C(Z_0,X_0,t_1,\ldots,t_k))$ и $X_0 \notin Y_0$. Ясно, что $M(Z_0)$. Из $M(Z_0)$, $\Phi^C(Z_0,X_0,t_1,\ldots,t_k)$ и условия предложения следует $\neg Pr(X_0)$, т.е. $M(X_0)$. Значит, $X_0 \in Y_0$.

Из предложений 1-5 следует, что теория множеств ST , строящаяся в рамках SCT , не слабее теории множеств ZF_0 , получающейся из теории Цермело-Френкеля ZFC исключением аксиом выбора и бесконечности. Это обстоятельство далее будет использоваться. Будет использоваться также (ввиду аксиом группы B) то обстоятельство, что если M-формула Φ^M доказуема в ZF_0 (следовательно, в SCT), то двойственная ей C-формула Φ^C доказуема в SCT .

Определим свойства множеств "быть транзитивным" $\mathrm{Tr}^M(x)$, "быть линейно упорядоченным (отношением $\in$)" $\mathrm{Ln}^M(x)$, "быть фундированным" $\mathrm{Fn}^M(x)$ и "быть M-ординалом" $\mathrm{On}^M(x)$:

$$\mathrm{Tr}^M(x) \longleftrightarrow \forall z_1, z_2\ (z_1 \in x \ \&\ z_2 \in z_1 \to z_2 \in x),$$

$$\mathrm{Ln}^M(x) \longleftrightarrow \forall z_1, z_2\ (z_1 \in x \ \&\ z_2 \in x \to$$

$$\to z_1 = z_2 \vee z_1 \in z_2 \vee z_2 \in z_1),$$

$$\mathrm{Fn}^M(x) \longleftrightarrow \forall z\ (z \subseteq x \ \&\ z \neq \emptyset \to$$

$$\to \exists z_1\ (z_1 \in z \ \&\ \forall z_2\ (z_2 \in z \to z_2 \notin z_1))),$$

$$\mathrm{On}^M(x) \longleftrightarrow \mathrm{Tr}^M(x)\ \&\ \mathrm{Ln}^M(x)\ \&\ \mathrm{Fn}^M(x).$$

Если выполняется $\mathrm{On}^C(X)$, то класс X будем называть C -ординалом. Множество x будем называть конечным M-ординалом (писать $\mathrm{Of}^M(x)$) тогда и только тогда, когда выполняется

$$\mathrm{On}^M(x) \& \forall z\ (z \neq \emptyset \& (z = x \vee z \in x) \to \exists y\ (z = y \cup \{y\})).$$

Если выполняется $\mathrm{Of}^C(X)$, то класс X будем называть конечным C-ординалом. Заметим, что в $\mathrm{Of}^C(x)$ символы $\subseteq$, $\emptyset$, $\cup$ и $\{\ldots\}$ обозначают понятия, двойственные тем, которые обозначаются ими в формуле $\mathrm{Of}^M(x)$: $X \subseteq Y \longleftrightarrow \forall Z\ (Z \in X \to Z \in Y)$, $\emptyset = \{Z \mid Z \neq Z\}$, $X \cup Y = \{Z \mid Z \in X \vee Z \in Y\}$ и $\{X\} = \{Z \mid Z = X\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *В* SCT *доказуема* M-*свертка* Sw_6 *:*

$$\exists y \forall x\ (x \in y \longleftrightarrow \mathrm{Of}^M(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0 \longleftrightarrow M(X)\ \&\ \mathrm{Of}^M(X))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C).Следствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \longleftrightarrow \forall X\ (Of^C(X) \to X \in Y_0).$$

Предположим, что $\neg M(Y_0)$. Тогда найдется класс X_0 такой, что $Of^C(X_0)$ и $X_0 \notin Y_0$. Поскольку имеет место $\forall X\ (Of^C(X) \to M(X) \& Of^M(X))$ (что доказывается из $M(\emptyset)$ & & $Of^M(\emptyset)$ индукцией по конечным C-ординалам), то X_0 есть конечный M-ординал. Следовательно, $X_0 \in Y_0$.

Множество, определяемое M-сверткой Sw_6, есть минимальный бесконечный M-ординал. Доказуемость Sw_6 в SCT указывает на то, что в SCT доказуема аксиома бесконечности ZF. Отметим, что в SCT доказуема (ввиду подходящей аксиомы из группы B) C-свертка $\exists Y \forall X\ (X \in Y \longleftrightarrow Of^C(X))$, определяющая минимальный бесконечный C-ординал, который, однако, совпадает с минимальным бесконечным M-ординалом.

Теперь ясно, что теория множеств ST не слабее теории множеств ZF. Следовательно, если M-формула Φ^M доказуема в ZF, то в SCT доказуемы Φ^M и (ввиду аксиом группы B) двойственная ей Φ^C. В дальнейшем это обстоятельство будет, как правило, подразумеваться.

В дополнение к ранее принятым соглашениям об обозначениях примем новые, при этом (стандартные) понятия теории множеств ZF будут являться M-понятиями теории SCT, а двойственные им - C-понятиями SCT. Если через μ обозначена M-переменная с областью значений $\{x \in U_M \mid \Phi^M(x)\}$, то через μ^C будет обозначаться (двойственная) C-переменная с областью значений $\{X \in U \mid \Phi^C(X)\}$. Если в ZF доказуема формула $\exists!\, x\ \Phi^M(x)$ (значит, в SCT доказуема эта M-формула и двойственная ей $\exists! X\ \Phi^C(X)$) и если через μ обозначена M-константа такая, что $\Phi^M(\mu)$, то через μ^C будет обозначаться (двойственная) C-константа такая, что

$\Phi^C(\mu^C)$. Если через $\mu(x_1,\dots,x_k)$ обозначена M-функция, введенная в связи с доказуемой в ZF M-формулой $\forall x_1,\dots$ $\dots,x_k\ \exists!y\ \Phi^M(x_1,\dots,x_k,y)$, то через $\mu^C(X_1,\dots,X_k)$ будет обозначаться (двойственная) C-функция, введенная в связи с доказуемой в SCT C-формулой $\forall X_1,\dots,X_k\ \exists!Y\,\Phi^C(X_1,\dots$ $\dots,X_k,Y)$. Если через $\mu(x_1,\dots,x_k)$ обозначен M-предикат, выражаемый M-формулой $\Phi^M(x_1,\dots,x_k)$, то через $\mu^C(X_1,\dots$ $\dots,X_k)$ будет обозначаться (двойственный) C-предикат, выражаемый C-формулой $\Phi^C(X_1,\dots,X_k)$. Верхний индекс C у обозначения μ^C будем, как правило, опускать, если из контекста ясно, что это C-выражение (так уже ранее делалось при использовании обозначений $\subseteq$, $\emptyset$, $\cup$ и $\{\dots\}$).

Буквами α,β,γ (возможно, с индексами) будем обозначать (M-) ординалы. Ординалы-константы $\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\dots$ будем обозначать через $0,1,2,\dots$ Через $\alpha+1$ будем обозначать ординал $\alpha\cup\{\alpha\}$. Будем говорить, что ординал α меньше ординала β (писать $\alpha<\beta$), если и только если $\alpha\in\beta$. Запись $\alpha\le\beta$ будет означать $\alpha<\beta\vee\alpha=\beta$.

Начальные (т.е. минимальные из равномощных) M-ординалы будем называть (M-)кардиналами. Бесконечные кардиналы будем обозначать через ω_α и будем предполагать, что ω_0 есть счетный (минимальный бесконечный) кардинал и что для всякого отличного от 0 ординала α кардинал ω_α есть минимальный из кардиналов, превышающих все ω_β, $\beta<\alpha$. Отметим, что запись ω_γ является сокращением записи $\omega(\gamma)$, где символом ω обозначена M-функция (если множество x не является ординалом, то (например) $\omega(x)=\omega_0$).

Через $cf(\alpha)$ будем обозначать конфинальность α , т.е. наименьший ординал β такой, что найдется сохраняющее порядок ($<$) отображение $f:\ \beta\to\alpha$, область значений которого неограничена в α . Кардинал ω_α будем называть (слабо) недостижимым (писать $\mathrm{Nd}^{M}(\omega_\alpha)$), если и только если ω_α удовлетворяет трем условиям: а) ω_α регулярен, т.е. $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$; б) ω_α пределен, т.е. $\forall\beta\ (\omega_\beta < \omega_\alpha \to \omega_{\beta+1} < \omega_\alpha)$; и в) ω_α несчетен, т.е. $\omega_0 < \omega_\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *В* $\mathbf{SCT}$ *доказуемо существование слабо недостижимого* $\mathbf{M}$*-кардинала.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0 \longleftrightarrow M(X)\ \&\ \mathrm{On}^{M}(X)\ \&\ \forall z\ (z = X \vee z \in X \to \neg\mathrm{Nd}^{M}(\omega(z))))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы $\mathbf{C}$).Следствием аксиомы группы $\mathbf{D}$ будет

$$M(Y_0) \longleftrightarrow \forall X\ (\mathrm{On}^{C}(X)\ \&\ \forall Z\ (Z = X \vee Z \in X \to \neg\mathrm{Nd}^{C}(\omega(Z))) \to X \in Y_0).$$

Предположим, что $\neg M(Y_0)$. Тогда найдется C-ординал α_0^C такой, что $\forall\beta^C(\beta^C \leq \alpha_0^C \to \neg\mathrm{Nd}^{C}(\omega(\beta^C)))$ и $\alpha_0^C \notin Y_0$.Из последнего следует $\neg M(\alpha_0^C)$ (поскольку $M(\alpha_0^C)$ влечет $\alpha_0^C \in Y_0$). Используя трансфинитную индукцию по C-ординалам, из фактов $M(0)$ и $\neg M(\alpha_0^C)$ выводим существование C-ординала β_0^C такого, что $\beta_0^C \leq \alpha_0^C$, $\neg M(\beta_0^C)$ и $\forall\gamma^C < \beta_0^C\ M(\gamma^C)$. Ясно, что выполняется $\neg\mathrm{Nd}^{C}(\omega(\beta_0^C))$. Поскольку C-кардинал $\omega(\beta_0^C)$ не может быть счетным (ввиду $\beta_0^C \neq 0$) и не может быть непредельным (ввиду $\forall\alpha^C\ (M(\omega(\alpha^C)) \to M(\omega(\alpha^C+1)))$), то C-кардинал $\omega(\beta_0^C)$ нерегулярен, т.е. имеет место $\mathrm{cf}^{C}(\omega(\beta_0^C)) < \omega(\beta_0^C)$. Пусть $\gamma_0^C = \mathrm{cf}^{C}(\omega(\beta_0^C))$ и область значений C-отображения $f_0^C\colon \gamma_0^C \to \omega(\beta_0^C)$ неограничена в $\omega(\beta_0^C)$. Используя $\forall\gamma^C < \beta_0^C\ M(\gamma^C)$ и $\forall\alpha^C\ (M(\alpha^C) \to M(\omega(\alpha^C)))$, получаем сначала $\forall\gamma^C < \beta_0^C\ M(\omega(\gamma^C))$, затем (ввиду определения C-функции ω) $\forall\alpha^C < \omega(\beta_0^C)\ M(\alpha^C)$ и далее $M(\gamma_0^C)$. Два последних факта влекут $M(f_0^C(\alpha^C))$ для всех $\alpha^C < \gamma_0^C$. Поскольку область значений функции f_0^C неограничена в $\omega(\beta_0^C)$, то сумма класса $Z_0 = \{f_0^C(\alpha^C) \mid \alpha^C < \gamma_0^C\}$ совпадает с C-кардиналом $\omega(\beta_0^C)$. Ввиду $M(Z_0)$, сумма класса Z_0 есть множество. Следовательно, будет $M(\omega(\beta_0^C))$ и (так как $\beta_0^C \le \omega(\beta_0^C)$) $M(\beta_0^C)$. Предположение $\neg M(Y_0)$ привело к противоречию.

Таким образом, имеет место $M(Y_0)$. Отсюда следует, что в SCT доказуемо существование множества y_0, для которого выполняется

$$\forall x(x \in y_0 \leftrightarrow On^M(x) \,\&\, \forall z(z = x \vee z \in x \to \neg Nd^M(\omega(z))))\,.$$

Ясно, что y_0 - ординал (y_0 содержит только ординалы, и если некоторый ординал α не принадлежит множеству y_0, то все ординалы, превышающие α, тоже не принадлежат множеству y_0). Ясно также, что $\omega(y_0)$ является минимальным слабо недостижимым M-кардиналом ($\neg Nd^M(\omega(y_0))$ невозможно, поскольку влечет $y_0 \in y_0$).

Известно, что в ZF существование слабо недостижимого кардинала не доказуемо. Следовательно, теория множеств ST, строящаяся в рамках SCT, сильнее теории множеств ZF.

§4. О некоторых теоремах SCT о несуществовании множеств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *В* SCT *доказуемо отрицание* **M**-*свертки*

$$\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x = x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\, (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X)\ \&\ X = X)$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы **C**).Следствием аксиомы группы **D** будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\, (X = X \rightarrow X \in Y_0).$$

Предположим, что $M(Y_0)$. Тогда будет, в частности, выполняться $Y_0 = Y_0 \rightarrow Y_0 \in Y_0$, что влечет (ввиду $Y_0 = Y_0$) принадлежность $Y_0 \in Y_0$. Последнее невозможно ввиду аксиомы A_2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *В* SCT *доказуемо отрицание* **M**-*свертки*

$$\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\, (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X)\ \&\ X \notin X)$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы **C**).Следствием аксиомы группы **D** будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X (X \notin X \rightarrow X \in Y_0).$$

Предположим, что $M(Y_0)$. Тогда будет, в частности, выполняться $Y_0 \notin Y_0 \rightarrow Y_0 \in Y_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *В* **SCT** *доказуемо отрицание* **M**-*свертки*

$$\exists y \forall x \, (x \in y \leftrightarrow On^{M}(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X \, (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X) \,\&\, On^{M}(X))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы **C**).Следствием аксиомы группы **D** будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X \, (On^{C}(X) \rightarrow X \in Y_0).$$

Предположим, что $M(Y_0)$. Тогда будет, в частности, выполняться $On^{C}(Y_0) \rightarrow Y_0 \in Y_0$, что влечет (ввиду $On^{C}(Y_0)$) принадлежность $Y_0 \in Y_0$.

Предложения 8-10 показывают, что теория **SCT** свободна от логических антиномий Кантора, Рассела и Бурали-Форти.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *В* **SCT** *доказуемо отрицание* **M**-*свертки*

$$\forall t \exists y \forall x \, (x \in y \leftrightarrow t \subseteq x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X \, (X \in Y_0 \rightarrow M(X) \,\&\, t \subseteq X)$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы **C**).Следствием аксиомы группы **D** будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X \, (t \subseteq X \rightarrow X \in Y_0) .$$

Предположим, что $M(Y_0)$. Тогда будет, в частности, выполняться $t \subseteq X_0 \rightarrow X_0 \in Y_0$, где $X_0 = t \cup \{Y_0\}$.Поскольку $t \subseteq X_0$, то $X_0 \in Y_0$. Последнее противоречит аксиоме A_2 ввиду $Y_0 \in X_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *В* **SCT** *доказуемо отрицание* **M**-*свертки*

$$\exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow \exists z_1, z_2\ (x = \{z_1, z_2\})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0 \leftrightarrow M(X)\ \& \exists z_1, z_2\ (X = \{z_1, z_2\}))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C). Следствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\ (\exists Z_1, Z_2\ (X = \{Z_1, Z_2\}) \to X \in Y_0).$$

Предположим, что $M(Y_0)$ .. Тогда, в частности, будет выполняться $\exists Z_1, Z_2\ (X_0 = \{Z_1, Z_2\}) \to X_0 \in Y_0$, где $X_0 = \{Y_0, \emptyset\}$. Следовательно, будут выполняться $X_0 \in Y_0$ и $Y_0 \in X_0$.

Следующие два предложения показывают, что SCT свободна от двух (разнотипных) антиномий, найденных Д.А.Бочваром [3, с.349].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *В* SCT *доказуемо отрицание* $\mathbf{M}$*-свертки*

$$\exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow \forall z\ (z \in x \to z \notin z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0 \to M(X)\ \& \forall z\ (z \in X \to z \notin z))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C). Следствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\ (\forall Z (Z \in X \to Z \notin Z) \to X \in Y_0).$$

Предположим, что $M(Y_0)$. Тогда будет, в частности, выполняться $\forall Z\ (Z \in Y_0 \to Z \notin Z) \to Y_0 \in Y_0$. Ясно (ввиду аксиомы A_2) , что $\forall Z\ (Z \in Y_0 \to Z \notin Z)$. Следовательно, $Y_0 \in Y_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *В* SCT *доказуемо отрицание* $\mathbf{M}$*-свертки*

$$\exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow \neg\exists z\ (z \in x\ \&\ x \in z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y_0 такой, что

$$\forall X\ (X \in Y_0) \leftrightarrow M(X)\ \&\ \forall z\ (z \in X \rightarrow X \notin z))$$

(существование класса Y_0 следует из аксиомы группы C). Следствием аксиомы группы D будет

$$M(Y_0) \leftrightarrow \forall X\ (\forall Z\ (Z \in X \rightarrow X \notin Z) \rightarrow X \in Y_0).$$

Предположим, что $M(Y_0)$. Тогда будет, в частности, выполняться $\forall Z\ (Z \in Y_0 \rightarrow Y_0 \notin Z) \rightarrow Y_0 \in Y_0$. Ясно (ввиду аксиомы A_2), что $\forall Z\ (Z \in Y_0 \rightarrow Y_0 \notin Z)$. Следовательно, $Y_0 \in Y_0$.

Заключение

В теории SCT аксиомами групп A и C выражены, по сути, теоретико-множественные идеи, представленные аксиомами (конечно, не всеми) теории множеств Σ [2]. Из этих аксиом нельзя вывести ни одного предложения о существовании какого-либо конкретного множества. Ничего не говорит о существовании конкретных множеств и совокупность аксиом групп A, B и C. В SCT единственным теоретико-множественным постулатом, предопределяющим существование конкретных множеств (выраженным аксиомами группы D в контексте всех остальных аксиом теории SCT), является почти неограниченный принцип свертывания R_D: все свойства множеств, формулируемые в терминах только множеств, сводимы, кроме тех, сводимость которых приводит к нарушению расселовского принципа порочного круга. Оказалось, что следование этому постулату позволяет вывести существование не только тех множеств, существование которых доказуемо в ZF (и в Σ), но и тех, существование которых в ZF (и в Σ) не доказуемо (заметим, что из доказательства предложения 7 нетрудно усмотреть возможность доказательства в SCT существования целого ряда больших кардиналов [6, с.92-97]: сильно недостижимых, слабо/сильно гипернедостижимых и т.д.). Оказалось также, что следование этому постулату позволяет, по-видимому, обойти все тео-- ретико-множественные парадоксы.

Принятые в данной работе теоретико-множественные представления, приведшие к формулировке аксиом теории $\mathbf{SCT}$ недостаточны для обоснованного введения аксиомы выбора.Такая ситуация не является, по-видимому, случайной, поскольку принцип выбора имеет скорее всего логическую,а не теоретико-множественую природу. Логический характер принципа выбора продемонстрирован в [5], где использование в базовой логике теории логического оператора " τ_x " и (" x такой, что") позволило при построении теории множеств в объеме $\mathbf{ZFC}$ обойтись без теоретико-множественной разновидности принципа выбора. Естественно, такой же результат можно получить, если в качестве логической основы теории множеств взять исчисление предикатов с функциями (и равенством) и с "собственными неопределенными описаниями" [4, с. 199-205]. Таким образом,поскольку аксиомы $\mathbf{ZF}$,утверждающие существование конкретных множеств, и двойственные им $\mathbf{C}$-формулы $\mathbf{SCT}$ являются следствием (в контексте аксиом групп $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$) почти неограниченного принципа свертывания,то можно считать, что следствием этого же принципа будет и аксиома выбора для множеств (также и аксиома выбора для классов),но следствием не в рамках "чистого" исчисления предикатов, а в рамках исчисления предикатов с оператором " τ_x " или с функциями и "собственными неопределенными описаниями".

Поступая традиционным образом, введем аксиому выбора для классов ($\mathbf{C}$-формулу) $\mathbf{E}$ в аксиоматику теории $\mathbf{SCT}$. Полученную теорию обозначим через $\mathbf{SCTE}$. Ясно, что теория множеств $\mathbf{STE}$, строящаяся в рамках $\mathbf{SCTE}$,будет не слабее теории множеств $\mathbf{ST}$, пополненной аксиомой выбора для множеств $\mathbf{E}^{\mathbf{M}}$ ($\mathbf{M}$-формула $\mathbf{E}^{\mathbf{M}}$, двойственная формуле $\mathbf{E}$,доказуема в $\mathbf{SCTE}$). Следовательно, можно утверждать, что в контексте аксиом групп $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ принятие почти неограниченного принципа свертывания обусловливает (в расширенной логике) принятие как теории множеств ZFC , так и более сильной теории STE .

Вполне вероятно, что в SCTE (как и в ZFC) континуум-проблема неразрешима. Если это так,то для разрешения континуум-проблемы может оказаться полезной идея косвенной экстраполяции (переноса) свойств конечных множеств на бесконечные [7].

Автор выражает свою благодарность Н.В. Белякину за ряд его весьма ценных замечаний по данной работе.

Литература

1. ФРЕНКЕЛЬ А., БАР-ХИЛЛЕЛ И. Основания теории множеств. -М.: Мир, 1966. - 555 с.

2. ГЁДЕЛЬ К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств //Успехи мат. наук. - М.-Л., 1948. -Т.3, вып. 1(23). -С. 96-149.

3. БОЧВАР Д.А. Некоторые логические теоремы о нормальных множествах и предикатах //Мат. сб. - М., 1945. - Т. 16(58),№3. - С. 345-352.

4. КЛИНИ С. Математическая логика. - М.: Мир,1973.-450 с.

5. КЮНЕН К. Комбинаторика //Справочная книга по математической логике. -М.: Наука, 1982. -Ч. 2: Теория множеств.-С.64-98.

6. БУРБАКИ Н. Теория множеств. -М.: Мир, 1965. - 455 с.

7. НУДЕЛЬМАН А.С. Об одном расширении теории множеств Цермело-Френкеля //Методы анализа данных. - Новосибирск, 1985, -Вып. 111: Вычислительные системы. -С. 140-151.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 мая 1989 года,
после переработки поступила
29 марта 1990 года