СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 135

УДК 517-9

ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КАК ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННАЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ

Ю.И. Кулаков

Теория физических структур в какой-то степени представляет собой попытку "бурбакизации" физики, пересмотра ее оснований с единой точки зрения, в основу которой вместо нескольких различных полуинтуитивных понятий, таких как пространство и время, взаимодействие, частицы и поля, положено одно единственное понятие - физическая структура.

По сути дела, теория физических структур представляет собой особый раздел физики, в котором изучается специальный вид симметрии, накладывающий существенные ограничения на возможный вид физических законов. Основным объектом теории физических структур являются отношения равноправия и взаимосогласованности, сформулированные в наиболее общем и абстрактном виде. Благодаря этому данная теория позволяет, при соответствующей интерпретации, рассматривать с единой точки зрения самые различные физические теории, такие как геометрия, механика, электродинамика, квантовая механика, и, как показали последние работы Ю.С.Владимирова [1-3], квантовая электродинамика, теория электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама, квантовая хромодинамика. Главной задачей, стоящей перед теорией физических структур, является создание особой метатеории, объектом изучения которой являются не отдельные физические явления и конкретные объекты, а сами физические теории. При этом важнейший результат теории физических структур состоит не столько в описании и предсказании отдельных конкретных физических явлений, сколько в установлении общего принципа, позволяющего объединить пестрое многообразие различных физических теорий в единую систему, в понимании глубоких причин существования и единственности известных физических законов и соответствующих физических величин и понятий, в указании общего правила, по которому строятся физические законы. Таким образом, в отличие от всех существующих физических теорий, каждая из которых описывает вполне определенный круг конкретных явлений и фактов, теория физических структур позволяет увидеть и понять строение физического мира в целом.

Что же такое физическая структура?

К понятию физической структуры можно подойти с разных сторон. Физическую структуру можно рассматривать как:

1) обобщение понятия скалярного произведения и соответственно определителя Грама в линейной алгебре;

2) обобщение понятия квадрата расстояния и соответственно определителя Кэли-Менгера в евклидовой геометрии;

3) обобщение метрической геометрии на двух множествах различной природы (геометрия на множестве "белых" и "черных" точек);

4) обобщение понятия группы;

5) общую теорию бинарных отношений между объектами одинаковой или различной природы;

6) обобщение понятия инвариантности физического закона относительно выбора системы единиц;

7) чисто геометрическую теорию гиперповерхностей в многомерных пространствах, обладающих некоторой "внутренней" симметрией.

Остановимся на рассмотрении последней точки зрения.

Что такое физический закон?

В обычно понимаемом смысле этого слова физический закон - это связь между наблюдаемыми физическими величинами. Например: уравнение состояния реального газа $p = \varphi(V,T,m)$ или закон Ома $I = f(U,R)$ и т.п.

Другими словами, физический закон - это некоторая $(n-1)$-мерная гиперповерхность в n-мерном арифметическом пространстве. Эта гиперповерхность может быть задана либо в явном виде, как,например, $z = f(x,y)$, либо в неявном виде $\Phi(x,y,z) = 0$, либо в параметрическом виде

$$x = x(u,v),$$
$$y = y(u,v),$$
$$z = z(u,v).$$

Прежде всего рассмотрим вопрос о числе параметров p, необходимых для описания n-мерной гиперповерхности в $(n+1)$-мерном пространстве.

Обычно считается, что для этого необходимо задать $n+1$ функций n независимых параметров:

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_n),$$
$$\ldots$$
$$x_{n+1} = \varphi_{n+1}(u_1, \ldots, u_n)$$

таких, что

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_n} \\ & \ldots & \\ \dfrac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial u_n} \end{matrix} \right\| = n.$$

Действительно, для описания метрики внутренней геометрии n-мерной поверхности $ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$, $\alpha,\beta = 1,2,\ldots,n$, необходимо n (и только n) независимых параметров $u^1, \dots$ $\dots, u^n$. Однако если речь идет лишь о параметрическом задании n-мерной поверхности, то, в принципе, для ее задания можно взять $n+1$ функций $p>n$ параметров:

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_p),$$
$$\dots$$
$$x_{n+1} = \varphi_{n+1}(u_1, \dots, u_p).$$

Но в этом случае эти функции уже не могут быть совершенно произвольными, а должны быть согласованы между собой так, чтобы по-прежнему

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_p} \\ & \dots & \\ \dfrac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial u_p} \end{Vmatrix} = n.$$

Так, например, сфера единичного радиуса $x^2+y^2+z^2=1$ может быть записана в следующем параметрическом представлении:

$$x = u_1 \cos u_2 \cos u_3,$$
$$y = u_1 \cos u_2 \sin u_3,$$
$$z = \sqrt{1-u_1^2\cos^2 u_2}.$$

Заметим, что параметрическое задание какой-либо гиперповерхности предоставляет гораздо бóльшие возможности для ее изучения, нежели непосредственное ее задание с помощью координат в явном или неявном виде, чем описание ее в рамках внутренней геометрии, так как только введение тех или иных "избыточных" независимых параметров позволяет увидеть и описать ее внутренние, скрытые, "эзотерические" структуры. Как мы увидим ниже, задание n-мерной поверхности с помощью $p>n$ незави -

симых параметров может оказаться весьма плодотворным при решении некоторых общих проблем.

Среди различных форм физических законов особое место занимают фундаментальные законы.

Геометрическим образом фундаментальных физических законов являются гиперповерхности, обладающие особой "внутренней" симметрией.

Мы будем говорить, что поверхность

$$\Phi(x,y,z) = 0 \tag{1}$$

обладает тривиальной симметрией, если все переменные x,y,z, входящие в уравнение (1), равноправны между собой, т.е. если вид уравнений (1) остается неизменным при любой перестановке этих переменных. Например:

$$x + y + z = 0, \tag{2}$$

$$x^2+ y^2+ z^2= a^2, \tag{3}$$

$$x^2+y^2+z^2+ 4(xy+yz+zx) = a^2, \tag{4}$$

$$x^2+y^2+z^2- 2(xy+yz+zx) = 0 , \tag{5}$$

$$x^3+ y^3+ z^3+ 4xyz = a^3, \tag{6}$$

$$(x+y+z)^3- 27xyz = 0, \tag{7}$$

$$xyz = a^3 \tag{8}$$

и т.п.

Существует ли общий принцип, позволяющий осуществить дальнейшую классификацию тривиально симметричных поверхностей, т.е. сказать, какие из поверхностей (2)-(8) в каком-то смысле более симметричны, чем остальные?

Нечто подобное встречается в физике, когда речь идет о классификации радиально-симметричных потенциалов. Так, в принципе, все потенциалы вида

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \ -\frac{\alpha}{r^2}, \ ar, \ ar^2, \ a\cdot\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

и т.п. симметричны относительно группы пространственных вращений. Но среди перечисленных потенциалов есть потенциалы, в какой-то степени более симметричные, чем все остальные, т.е. обладающие дополнительной "внутренней" симметрией.

Так, например, как показал В.А.Фок [4], кулоновский потенциал $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ обладает такой дополнительной "внутренней" симметрией, так как может быть получен из одного только требования инвариантности трехмерной гиперсферы в 4-мерном импульсном пространстве относительно группы четырехмерных вращений O(4) (или более общей группы конформных преобразований O(4,2)).

Таким образом, можно говорить, что различные центрально-симметричные потенциалы обладают или не обладают дополнительной "внутренней" симметрией. Но чтобы обнаружить это, необходимо взглянуть на проблему с более общих позиций, выйдя за рамки привычных стереотипов.

Итак, можно ли говорить о дополнительной "внутренней" симметрии тех или иных тривиально симметричных поверхностей?

Чтобы понять, что это такое, рассмотрим несколько простых примеров.

1. Простейшее соотношение между расстояниями на прямой

Рассмотрим множество всех симплексов $\mathfrak{S}_3 = \{i, k, m\}$, состоящих из трех произвольных точек евклидовой прямой. Мы видим, что между тремя произвольными точками i, k, m прямой существует какая-то необычная связь: с одной стороны, точки i, k, m совершенно произвольны и никак не связаны друг с другом, а с другой - это три квадрата расстояний

$$a_{ik} = l_{ik}^2 \qquad a_{im} = l_{im}^2$$

$$a_{km} = l_{km}^2 \quad ,$$

которые не являются произвольными, так как связаны между собой соотношением

$$D^1_{ikm,ikm}(a)=(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} \\ I & a_{im} & a_{km} & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

т.е. один из них является двузначной функцией двух других.

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_3$ как некоторый единый физический объект, мы можем приписать ему три числа - три измеряемых на опыте квадрата расстояний. Трактуя их как три координаты симплекса $\mathfrak{S}_3$ в трехмерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$, мы тем самым ставим в соответствие каждому симплексу $\mathfrak{S}_3$ некоторую точку в $\mathbb{R}^3$. Эту точку мы будем называть характеристической точкой симплекса $\mathfrak{S}_3$, а само арифметическое пространство $\mathbb{R}^3$ — характеристическим пространством.

Факт существования соотношения (9) означает,что характеристические точки,соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_3$, располагаются в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ не произвольно, а на некоторой двумерной поверхности, имеющей вид конуса, вписанного в первый октант.

Своеобразие этой поверхности состоит в том, что три координаты точки этой поверхности

$$X_1 = a_{ik} \qquad X_2 = a_{im}$$

$$X_3 = a_{km}$$

имеют <u>двухиндексную природу</u>, а их зависимость от трех независимых параметров x_i, x_k, x_m - декартовых координат точек i,

k, m, лежащих на прямой, выражается с помощью <u>одной и той же</u> функции двух переменных $\varphi(\xi,\eta)$, т.е.

$$X_1 = \varphi_1(x_i, x_k, x_m) = a_{ik} = \varphi(x_i, x_k) = (x_i - x_k)^2,$$
$$X_2 = \varphi_2(x_i, x_k, x_m) = a_{im} = \varphi(x_i, x_m) = (x_i - x_m)^2, \qquad (10)$$
$$X_3 = \varphi_3(x_i, x_k, x_m) = a_{km} = \varphi(x_k, x_m) = (x_k - x_m)^2.$$

Другими словами, заданы три независимых параметра $-\infty < x_i, x_k, x_m < \infty$, и рассматриваются все возможные из них пары

$$\begin{array}{cc} (x_i, x_k) & (x_i, x_m) \\ & (x_k, x_m) \end{array}$$

Далее рассматривается функция двух переменных $\varphi(\xi,\eta) = (\xi - \eta)^2$, с помощью которой каждой паре (x_i, x_k) ставится в соответствие своя двухиндексная координата $a_{ik} = \varphi(x_i\ x_k) = (x_i - x_k)^2$.

Можно показать, что в этом случае множество точек с координатами

$$\begin{array}{cc} a_{ik} & a_{im} \\ & a_{km} \end{array}$$

является двумерной поверхностью в трехмерном пространстве.

Таким образом, система трех равенств (10) представляет собой трехпараметрическое задание двумерной поверхности в трехмерном пространстве.

2. Простейшее соотношение между расстояниями на плоскости

Рассмотрим множество всех симплексов $\mathfrak{S}_4 = \{i, k, m, n\}$, состоящих из четырех точек, лежащих на евклидовой плоскости. Как и в случае прямой, между четырьмя точками плоскости суще -

ствует уже знакомая нам связь: с одной стороны, точки i,k,m,n совершенно произвольны, а с другой - это шесть значений квадратов расстояний:

$$
\begin{array}{lll}
a_{ik}=l_{ik}^2 & a_{im}=l_{im}^2 & a_{in}=l_{in}^2 \\
 & a_{km}=l_{km}^2 & a_{kn}=l_{kn}^2 \\
 & & a_{mn}=l_{mn}^2 ,
\end{array}
$$

связанных между собой соотношением

$$
D^1_{ikmn,\,ikmn}(a)=(-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{11}
$$

т.е. один из них является двузначной функцией пяти других.

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_4$ как некоторый единый физический объект, мы можем поставить ему в соответствие одну характеристическую точку в шестимерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^6$, если в качестве ее шести координат возьмем шесть измеряемых на опыте квадратов расстояний $a_{ik},\ldots,a_{mn}$. Факт существования соотношения (11) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_4$, располагаются в $\mathbb{R}^6$ не произвольно, а на некоторой пятимерной гиперповерхности.

Как и в предыдущем случае, шесть координат точки, лежащей на поверхности:

$$
\begin{array}{lll}
X_1=a_{ik} & X_2=a_{im} & X_3=a_{in} \\
 & X_4=a_{km} & X_5=a_{kn} \\
 & & X_6=a_{mn} ,
\end{array}
$$

имеют двухиндексную природу, а их зависимости от четырех групп независимых параметров - декартовых координат четырех точек i, k, m, n , лежащих на евклидовой плоскости,

$$u_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad u_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \quad u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

осуществляются с помощью одной и той же функции четырех переменных $\varphi\ (\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)$:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \varphi_1(x_i, y_i;\ x_k, y_k;\ x_m, y_m;\ x_n, y_n) = \\
&= a_{ik} = \varphi(x_i, y_i;\ x_k, y_k) = \\
&= (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2, \\
X_2 &= \varphi_2(x_i, y_i;\ x_k, y_k;\ x_m, y_m;\ x_n, y_n) = \\
&= a_{im} = \varphi(x_i, y_i;\ x_m, y_m) = \\
&= (x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2, \\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
X_6 &= \varphi_6(x_i, y_i;\ x_k, y_k;\ x_m, y_m;\ x_n, y_n) = \\
&= a_{mn} = \varphi(x_m, y_m;\ x_n, y_n) = \\
&= (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Другими словами, задаются восемь независимых параметров, объединенных в четыре группы по два параметра в каждой группе, и рассматриваются все возможные пары из четырех групп u_i, u_k, u_m, u_n :

$$\begin{array}{ccc}
(u_i, u_k) & (u_i, u_m) & (u_i, u_n) \\
 & (u_k, u_m) & (u_k, u_n) \\
 & & (u_m, u_n)
\end{array} .$$

Далее рассматривается функция четырех переменных

$$\varphi(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) = (\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2,$$

с помощью которой каждой паре (u_i,u_k) ставится в соответствие своя двухиндексная координата

$$\varphi(u_i,u_k) \equiv \varphi(x_i,y_i;\ x_k,y_k) = (x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2.$$

Можно показать, что в этом случае множество точек с координатами

$$\begin{matrix} a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ & a_{km} & a_{kn} \\ & & a_{mn} \end{matrix}$$

является пятимерной поверхностью в шестимерном пространстве.

Таким образом, система шести равенств (12) представляет собой восьмипараметрическое задание пятимерной поверхности, вложенной в шестимерное пространство.

3. Простейшее соотношение между расстояниями в трехмерном евклидовом пространстве

Рассмотрим множество всех симплексов $\mathfrak{S}_5=\{i,k,m,n,p\}$, состоящих из пяти точек, произвольно расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Как и в случае прямой и плоскости, между пятью точками трехмерного евклидова пространства существует необычная связь: с одной стороны, точки i,k,m,n,p совершенно произвольны, а с другой - десять значений квадратов расстояний между ними связаны между собой соотношением

$$D^{1}_{ikmnp,ikmnp}(a) =$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 & a_{np} \\ 1 & a_{ip} & a_{kp} & a_{mp} & a_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0\ , \qquad (13)$$

т.е. один из них является двузначной функцией девяти других.

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_5$ как некоторый единый физический объект, мы можем поставить ему в соответствие одну характеристическую точку в десятимерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{10}$, если в качестве ее десяти координат возьмем соответствующие квадраты расстояний. Факт существования соотношения (13) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_5$, расположены в $\mathbb{R}^{10}$ не произвольно, а на некоторой девятимерной поверхности, вложенной в $\mathbb{R}^{10}$.

Как и в двух предыдущих случаях, десять координат точки, лежащей на этой поверхности

$$\begin{array}{llll} X_1 = a_{ik} & X_2 = a_{im} & X_3 = a_{in} & X_4 = a_{ip} \\ & X_5 = a_{km} & X_6 = a_{kn} & X_7 = a_{kp} \\ & & X_8 = a_{mn} & X_9 = a_{mp} \\ & & & X_{10} = a_{np}\ , \end{array}$$

имеют двухиндексную природу, а их зависимость от пяти групп независимых параметров - декартовых координат пяти точек i,k ,

m,n,p, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве,

$$u_i=\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix},\ u_k=\begin{bmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{bmatrix},\ u_m=\begin{bmatrix}x_m\\y_m\\z_m\end{bmatrix},\ u_n=\begin{bmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{bmatrix},\ u_p=\begin{bmatrix}x_p\\y_p\\z_p\end{bmatrix}$$

осуществляется с помощью одной и той же функции шести переменных $\varphi(\xi_1,\eta_1,\zeta_1;\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$:

$$\left.\begin{aligned}
X_1&=\varphi_1(x_i,y_i,z_i;x_k,y_k,z_k;x_m,y_m,z_m;x_n,y_n,z_n;\\
&\qquad x_p,y_p,z_p)=a_{ik}=\varphi(x_i,y_i,z_i;x_k,y_k,z_k)=\\
&\qquad =(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2,\\
&\dots\qquad\dots\qquad\dots\\
X_{10}&=\varphi_{10}(x_i,y_i,z_i;x_k,y_k,z_k;x_m,y_m,z_m;x_n,y_n,z_n;\\
&\qquad x_p,y_p,z_p)=a_{np}=\varphi(x_n,y_n,z_n;x_p,y_p,z_p)=\\
&\qquad =(x_n-x_p)^2+(y_n-y_p)^2+(z_n-z_p)^2.
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Другими словами, задаются пятнадцать независимых параметров, объединенных в пять групп по три параметра в каждой группе, и рассматриваются все возможные пары, составленные из пяти групп u_i,u_k,u_m,u_n,u_p :

$$\begin{array}{llll}
(u_i,u_k) & (u_i,u_m) & (u_i,u_n) & (u_i,u_p)\\
 & (u_k,u_m) & (u_k,u_n) & (u_k,u_p)\\
 & & (u_m,u_n) & (u_m,u_p)\\
 & & & (u_n,u_p).
\end{array}$$

Далее рассматривается функция шести переменных

$$\varphi(\xi_1,\eta_1,\zeta_1;\xi_2,\eta_2,\zeta_2)=(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2,$$

с помощью которой каждой паре (u_i,u_k) ставится в соответствие своя двухиндексная координата

$$a_{ik} = \varphi(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) =$$
$$= (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 .$$

Можно показать, что в этом случае множество точек с двухиндексными координатами

$$\begin{array}{cccc} a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ & & a_{mn} & a_{mp} \\ & & & a_{np} \end{array}$$

является девятимерной поверхностью в десятимерном пространстве.

Таким образом, система десяти соотношений (14) представляет собой пятнадцатипараметрическое задание девятимерной поверхности, вложенной в десятимерное пространство.

Итак, во всех трех рассмотренных примерах речь идет о сопоставлении прямой, плоскости и трехмерному евклидову пространству трех специальных гиперповерхностей в 3-, 6-, 10-мерных пространствах, задаваемых с помощью 3,8 и 15 параметров.

При этом координатами точек, лежащих на этих гиперповерхностях, являются квадраты взаимных расстояний между тремя точками на прямой в первом случае, между четырьмя точками на плоскости - во втором и, наконец, между пятью точками в трехмерном евклидовом пространстве - в третьем. Что же касается независимых параметров, то ими являются $3 \cdot 1 = 3$ декартовы координаты трех точек на прямой в первом случае, $4 \cdot 2 = 8$ декартовых координат четырех точек на плоскости - во втором и, наконец, $5 \cdot 3 = 15$ декартовых координат пяти точек в трехмерном евклидовом пространстве - в третьем.

Характерной особенностью рассмотренных гиперповерхностей является их внутренняя симметрия - весьма жесткое ограничение, состоящее в том, что все их двухиндексные координаты a_{ik},

$1 \le i < k \le r$, одинаковым образом выражаются через соответствующие группы параметров $u(i)$ и $u(k)$ с помощью одной и той же функции $2n$ переменных $a_{ik} = \varphi(u(i), u(k))$.

Вся важность и значимость рассмотрения подобных гиперповерхностей состоит в их уникальности - сам факт их существования возможен лишь при нескольких весьма специальных функциях

$$\varphi(u(i),u(k)) \equiv \varphi(u^1(i),\ldots,u^n(i);\ u^1(k),\ldots,u^n(k)).$$

При этом возникает интересная и вполне содержательная математическая задача: при заданном ранге r = 3,4,5,... и размерности $n = r-2$ найти все возможные функции $2n$ переменных $\varphi(u(i),u(k))$, осуществляющие nr-параметрическое представление некоторой гиперповерхности в $\frac{1}{2}r(r-1)$ -мерном пространстве.

Эта идея легко может быть перенесена из области чистой геометрии в область теоретической физики, где может быть использована для доказательства существования и единственности различных фундаментальных физических законов.

Итак, что же такое внутренняя симметрия гиперповерхности? Рассмотренные выше геометрические примеры являются для нее хорошей иллюстрацией. Очевидно, что свойства внутренней симметрии гиперповерхности наиболее естественным образом могут быть выражены с помощью того или иного выбора зависимости "внешних" характеристик гиперповерхности - координат X_i от "внутренних" параметров u_p . В качестве простейшего варианта такого отображения, воспроизводящего основные идеи, заложенные в рассмотренных выше примерах,предлагается следующее бинарное (парное) отображение.

Из трех независимых параметров u_1, u_2, u_3 образуем все возможные пары (идея бинарности!) (u_i, u_k), $1 \le i < k \le 3$; их будет три:

$$(u_1,u_2) \qquad (u_1,u_3)$$
$$(u_2,u_3) \; .$$

Рассмотрим произвольную непрерывную и достаточное число раз дифференцируемую функцию двух переменных $\varphi(\xi,\eta)$. С помощью этой функции поставим в соответствие каждой паре (u_i,u_k) соответствующую двухиндексную переменную - брэкет*) $\varphi_{ik} \equiv \varphi(u_i,u_k)$.

Полученные таким образом брэкеты будем рассматривать как три координаты

$$X_1 = \varphi_{12} \qquad X_2 = \varphi_{13}$$
$$X_3 = \varphi_{23}$$

некоторой характеристической точки в трехмерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Итак, имеем следующее симметрическое отображение:

$$X_{12} = \varphi(u_1,u_2),$$
$$X_{13} = \varphi(u_1,u_3),$$
$$X_{23} = \varphi(u_2,u_3),$$

которое мы будем называть бинарным отображением ранга $\mathfrak{r} = 3$. Дадим строгое определение физической моноструктуры ранга $\mathfrak{r} = 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы будем говорить, что на множестве $\mathbb{R}^3$ имеет место физическая моноструктура ранга $\mathfrak{r} = 3$, если найдется хотя бы одна непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция двух переменных $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемая брэкетом, такая, что множество точек с тремя двухиндексными ко-

*) Брэкет - от англ. bracket - скобка; использование терминологии, предложенной Дираком для обозначения двух сопряженных векторов состояния в квантовой механике $\langle i|$ - бра и $|i\rangle$ - кет в данном контексте не является случайным и имеет достаточно глубокие основания.

ординатами

$$X_{12} = \varphi(x_1, x_2) \qquad X_{13} = \varphi(x_1, x_3)$$
$$X_{23} = \varphi(x_2, x_3),$$

где $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, является двумерным многообразием.

При этом возникает следующая математическая задача: какой должна быть функция $\varphi(\xi, \eta)$, чтобы множество точек с координатами

$$\left.\begin{aligned} X_{12} = \varphi(x_1, x_2) \qquad X_{13} &= \varphi(x_1, x_3) \\ X_{23} &= \varphi(x_2, x_3) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

являлось двумерным многообразием?

Можно показать [5], что общее решение этой задачи - брэкет $\varphi(\xi, \eta)$ - существует в двух видах.

1. <u>Антисимметричный брэкет</u> $\varphi(\xi, \eta) = \chi(\bar{\xi} - \bar{\eta})$, определенный с точностью до произвольной монотонной функции одной переменной $\chi(s)$, определенной на всем интервале $-\infty < s < \infty$, и с точностью до преобразования аргументов: $\bar{\xi} = p(\xi)$, $\bar{\eta} = p(\eta)$, при этом всегда $\chi^{-1}(\varphi(\xi, \eta)) = -\chi^{-1}(\varphi(\eta, \xi))$.

2. <u>Симметричный брэкет</u> $\varphi(\xi, \eta) = \lambda((\bar{\xi} - \bar{\eta})^2)$, определенный с точностью до произвольной монотонной функции одной переменной $\lambda(s)$, определенной на интервале $0 < s < \infty$. При этом всегда $\varphi(\xi, \eta) = \varphi(\eta, \xi)$, $\lambda^{-1}(\varphi(\xi, \eta)) = \lambda^{-1}(\varphi(\eta, \xi))$.

Мы будем говорить, что двумерная поверхность

$$\Phi(X_{12}, X_{13}, X_{23}) = 0,$$

все двухиндексные координаты которой <u>одинаковым образом</u> зависят от соответствующих независимых переменных (15), обладает <u>внутренней симметрией</u>.

Таким образом, в зависимости от выбора функции $\chi(s)$ или $\lambda(s)$ мы будем получать различные поверхности, обладающие внутренней симметрией.

Так, например,

1) если $\chi(s) = s$, то

$$X_{ik} = -X_{ki},$$
$$X_{12} = x_1 - x_2,$$
$$X_{23} = x_2 - x_3,$$
$$X_{31} = x_3 - x_1$$

и, следовательно,

$$\Phi(X_{12}, X_{23}, X_{31}) = X_{12} + X_{23} + X_{31} = 0$$

или

$$\Phi(X_{12}, X_{23}, X_{31}) = D^1_{123,123}(X) =$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & X_{12} & X_{13} \\ 1 & X_{21} & 0 & X_{23} \\ 1 & X_{31} & X_{32} & 0 \end{vmatrix} = (X_{12} + X_{23} + X_{31})^2 = 0;$$

2) если $\chi(s) = s^3$, то

$$X_{ik} = -X_{ki},$$
$$X_{12} = (x_1 - x_2)^3,$$
$$X_{23} = (x_2 - x_3)^3,$$
$$X_{31} = (x_3 - x_1)^3$$

и, следовательно,

$$\Phi(X_{12}, X_{23}, X_{31}) = (X_{12} + X_{23} + X_{31})^2 - 27X_{12}X_{23}X_{31} = 0;$$

3) если $\chi(s) = ae^s$, то

$$X_{ik} = \frac{a^2}{X_{ki}},$$

$$X_{12} = ae^{x_1 - x_2},$$

$$X_{23} = ae^{x_2 - x_3},$$

$$X_{31} = ae^{x_3 - x_1}$$

и, следовательно,

$$\Phi(X_{12}\ X_{23}\ X_{31}) = X_{12}X_{23}X_{31} - a^3 = 0;$$

4) если $\lambda(s) = s$, то

$$X_{ik} = X_{ki},$$

$$X_{12} = (x_1 - x_2)^2,$$

$$X_{23} = (x_2 - x_3)^2,$$

$$X_{31} = (x_3 - x_1)^2$$

и, следовательно,

$$\Phi(X_{12}, X_{13}, X_{23}) =$$

$$= D^1_{123,123}(X) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & X_{12} & X_{13} \\ 1 & X_{21} & 0 & X_{23} \\ 1 & X_{31} & X_{32} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= X^2_{12} + X^2_{13} + X^2_{23} - 2(X_{12}X_{13} + X_{13}X_{23} + X_{23}X_{12}) = 0.$$

Заметим, что сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ не обладает внутренней симметрией, так как не существует такой функции $\varphi(\xi, \eta)$, чтобы

$$x = X_{12} = \varphi(x_1, x_2),$$
$$y = X_{23} = \varphi(x_2, x_3),$$
$$z = X_{31} = \varphi(x_3, x_1),$$

т.е. чтобы функция $\varphi(\xi, \eta)$ удовлетворяла следующему функциональному уравнению:

$$\varphi^2(u, v) + \varphi^2(v, w) + \varphi^2(w, u) = a^2.$$

Обобщим теперь определение физической моноструктуры ранга $r = 3$ и размерности $m = 1$ на случай произвольных r и m.

Определение бинарной физической моноструктуры ранга r и размерности m. Мы будем говорить, что на множестве

$$\mathbb{R}^{mr} = \{ \overset{(m)}{r}(1), \ldots, \overset{(m)}{r}(r) \} \equiv \begin{Bmatrix} x^1(1) & \ldots & x^1(r) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m(1) & & x^m(r) \end{Bmatrix},$$

состоящем из mr независимых параметров, объединенных в r m-мерных квесторов (столбцов) $\overset{(m)}{r}(i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, по m параметров в каждом, определена бинарная физическая моноструктура ранга r и размерности m, если найдется по крайней мере одна непрерывно дифференцируемая функция $2m$ переменных $\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, называемая $2m$-брэкетом, такая, что множество точек с двухиндексными координатами

$$X_{ik} = \varphi(\overset{(m)}{r}(i), \overset{(m)}{r}(k)) \equiv$$
$$\equiv \varphi(x^1(i), \ldots, x^m(i); x^1(k), \ldots, x^m(k)),$$
$$1 \le i < k \le r,$$

является $\dfrac{r!}{2!(r-2)!} - 1$ -мерным многообразием.

Определение p-арной физической моноструктуры ранга r и размерности m. Мы будем говорить, что на множестве

$$\mathbb{R}^{mr} = \{ \overset{(m)}{r}(1), \ldots, \overset{(m)}{r}(r) \} \equiv \begin{Bmatrix} x^1(1) & \ldots & x^1(r) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m(1) & \ldots & x^m(r) \end{Bmatrix}$$

определена p-арная физическая моноструктура ранга r и размерности m, если найдется по крайней мере одна непрерывно дифференцируемая функция pm переменных

$$\varphi: \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{p} \to \mathbb{R},$$

называемая pm-брэкетом, такая, что множество точек с p-индексными координатами

$$X_{i_1 \ldots i_p} = \varphi(\overset{(m)}{r}(i_1), \ldots, \overset{(m)}{r}(i_p)),$$

$$1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq r,$$

является $\dfrac{r!}{p!(r-p)!} - 1$-мерным многообразием.

До сих пор мы рассматривали брэкеты $\varphi(\overset{(m)}{r}(i_1), \ldots$ $\ldots, \overset{(m)}{r}(i_p))$, зависящие от p групп независимых параметров, принадлежащих к одному и тому же блоку $\mathbb{R}^{mr}$.

Сделаем еще один принципиально важный шаг по пути обобщения понятия физической структуры.

Рассмотрим брэкет

$$\varphi(\overset{(m_1)}{r}(i_1), \ldots, \overset{(m_1)}{r}(i_{p_1}); \ldots; \overset{(m_l)}{r}(k_1), \ldots, \overset{(m_l)}{r}(k_{p_l})),$$

зависящий от $p = p_1 + \ldots + p_l$ групп независимых параметров, принадлежащих к l различным блокам

$$\mathbb{R}^{m_1 r_1} = \{ \overset{(m_1)}{r}(1), \ldots, \overset{(m_1)}{r}(r_1) \},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\mathbb{R}^{m_l r_l} = \{ \overset{(m_l)}{r}(1), \ldots, \overset{(m_l)}{r}(r_l) \}.$$

<u>Определение физической структуры типа $(p_1, \ldots, p_l)$, ранга $(r_1, \ldots, r_l)$ и размерности $(m_1, \ldots, m_l)$</u>. Мы будем говорить, что на множестве $\mathbb{R}^{m_1 r_1 + \ldots + m_l r_l}$, состоящем из $m_1 r_1 + \ldots + m_l r_l$ независимых параметров, объединенных в $r_1 + \ldots + r_l$ квесторов, определена физическая структура типа $(p_1, \ldots, p_l)$, ранга $(r_1, \ldots, r_l)$ и размерности $(m_1, \ldots, m_l)$, если найдется по крайней мере одна непрерывно дифференцируемая функция $p_1 m_1 + \ldots + p_l m_l$ переменных

$$\varphi: \mathbb{R}^{p_1 m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{p_l m_l} \to \mathbb{R},$$

называемая $p_1 m_1 + \ldots + p_l m_l$-брэкетом, такая, что множество точек с $p_1 + \ldots + p_l$-индексными координатами

$$X_{i_1 \ldots i_{p_1}; \ldots; k_1 \ldots k_{p_l}} =$$

$$= \varphi(\overset{(m_1)}{r}(i_1), \ldots, \overset{(m_1)}{r}(i_{p_1}); \ldots; \overset{(m_l)}{r}(k_1), \ldots, \overset{(m_l)}{r}(k_{p_l})),$$

$$1 \le i_1 < \ldots < i_{p_1} \le r_1,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$1 \le k_1 < \ldots < k_{p_l} \le r_l,$$

является $\dfrac{r_1!}{p_1!(r_1-p_1)!} \cdot \ldots \cdot \dfrac{r_l!}{p_l!(r_l-p_l)!} - 1$-мерным многообразием.

Таким образом, определенные выше p-арные физические моноструктуры ранга r и размерности m представляют собой физические структуры типа (p), ранга (r) и размерности (m).

Среди всех физических структур типа $(p_1, \ldots, p_l)$ особое место занимают физические структуры типа $(1,1)$ - физические структуры на двух множествах ранга (s,r) и размерности (n,m). Поэтому выделим их специальным определением.

<u>Определение бинарных физических структур на двух множествах ранга (s,r) и размерности (n,m)</u>. Мы будем говорить, что на множестве

$$\mathbb{R}^{ns+mr} = \{ \overset{(n)}{\rho}(1), \ldots, \overset{(n)}{\rho}(s); \overset{(m)}{r}(1), \ldots, \overset{(m)}{r}(r) \} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \begin{matrix} \xi_1(1) & \ldots & \xi_n(1) & x^1(1) & \ldots & x^1(r) \\ \ldots & \ldots & \ldots; & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1(s) & \ldots & \xi_n(s) & x^m(1) & \ldots & x^m(r) \end{matrix} \right\},$$

состоящем из $ns+mr$-независимых параметров, объединенных в два блока: блок ковариантных параметров

$$\begin{matrix} \xi_1(1) & \ldots & \xi_n(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boxed{\xi_1(\alpha) \quad \ldots \quad \xi_n(\alpha)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1(s) & \ldots & \xi_n(s) \end{matrix},$$

состоящий из s ковекторов (строк) по n параметров в каждом, и блок контравариантных параметров

$$\begin{matrix} x^1(1) & \ldots & \boxed{\begin{matrix} x^1(i) \\ \ldots \\ x^m(i) \end{matrix}} & \ldots & x^1(r) \\ & \ldots & & \ldots & \\ x^m(1) & \ldots & & \ldots & x^m(r) \end{matrix},$$

состоящий из r квесторов (столбцов) по m параметров в каждом, определена бинарная физическая структура ранга $(s\ r)$ и размерности (n,m), если найдется по крайней мере одна непрерывно дифференцируемая функция $n+m$ переменных φ : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, называемая nm-брэкетом, такая, что множество точек с двухиндексными координатами

$$X_{\alpha i} = \varphi(\overset{(n)}{\xi}(\alpha), \overset{(m)}{x}(i)) \equiv$$

$$\equiv \varphi(\xi_1(\alpha), \ldots, \xi_n(\alpha); x^1(i), \ldots, x^m(i)),$$

$$1 \leq \alpha \leq s, \quad 1 \leq i \leq r,$$

является $sr-1$-мерным многообразием.

Различные типы физических структур приведены в таблице.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) //Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. - Новосибирск. - 1988. -Вып. 125: Вычислительные системы. -С. 42-60.

2. Его же. Описание взаимодействий в рамках теории бинарных физических структур //Там же. - С. 61-87.

3. ВЛАДИМИРОВ Ю.С., СОЛОВЬЕВ А.В. Физическая структура ранга (4,4; б) и трехкомпонентные спиноры //Настоящий сборник. - С. 44-66.

4. ФОК В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия //Изв. АН СССР. - 1935. - Т.2. -С. 169-184.

5. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.-Новосибирск, 1968. - 226 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

14 июня 1990 года