СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 135

УДК 512.816

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Г.Г. Михайличенко

В работах [1-3] были определены бинарные физические структуры, когда паре точек функция f ставит в соответствие число. Бинарные структуры естественно определяются на одном и двух множествах. Функция f допускает нетривиальную группу движений с конечным числом параметров, которое было названо степенью групповой симметрии. Под движением понимаются такие преобразования исходных множеств, которые сохраняют функцию f, задающую на них физическую структуру. При определенном соотношении между рангом физической структуры, числом параметров группы движений и размерностью множеств групповая и феноменологическая симметрии соответствующей геометрии оказываются эквивалентными. Эти соотношения были заложены в определение физической структуры, ее феноменологической и групповой симметрий. Естественно возникает вопрос об их происхождении и обосновании.

Кроме того, имеется много возможностей обобщения и развития понятия физической структуры (см. [4,с. 71-76]), одна из которых реализована в [3], когда двум точкам из разных множеств ставится в соответствие s действительных чисел, где $s \geq 1$ (s - метрические физические структуры). Другая возможность реализуется в определении тернарных физических структур, когда функция f ставит в соответствие число не паре точек, как в случае бинарных структур, а трем точкам. Тернарные физические структуры могут быть определены на одном, двух и трех множествах, и их простейшие случаи были рассмотрены автором в [4-6]. Однако предварительное исследование показало, что тернарные структуры в их естественном определении в отличие от бинарных никаких групповых свойств не имеют, т.е. соответствующая функция f не допускает нетривиальных движений. Этот результат в какой-то мере объясняет, почему столь содержательны в физическом и математическом смыслах бинарные структуры, в то время как тернарные существуют, по-видимому, только в самых простых случаях наименьшего возможного ранга. И тогда возникает вопрос о внутренних причинах такого различия бинарных и тернарных физических структур.

Для полного ответа на вопрос о соотношении ранга структуры, степени ее групповой симметрии и размерности множеств, а также на вопрос о причинах различия бинарных и тернарных структур необходимо исходить из более общего определения физической структуры. Тогда можно будет понять, при каких соотношениях основных характеристик структур групповые свойства есть, а при каких их нет. Можно также предположить, что только те структуры содержательны в физическом и математическом смыслах, которые наделены нетривиальными групповыми свойствами. Для краткости изложения определение произвольных физических структур будет дано в самых общих чертах.

Пусть имеются p множеств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ любой физической природы, каждое из которых в математическом смысле представляет собой топологическое многообразие размерности $m_1, \ldots, m_p$ соответственно. Пусть также имеется функция (метрика)

$$f: \mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p} \to R^s, \qquad (1)$$

ставящая в соответствие кортежу длины $q_1 + \ldots + q_p$ из $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$ некоторую точку из R^s, т.е. s действительных чисел. Область определения функции f обозначим через $\mathfrak{S}_f$, предполагая ее открытость и плотность в $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$. Предположим, что координатное представление функции (1) достаточно гладкое и координаты точек каждого множества входят в него существенным образом, т.е. метрика f невырожденна. Числовой кортеж $\langle q_1, \ldots, q_p \rangle$ назовем кратностью структуры, s – ее порядком.

Пусть $M_1, \ldots, M_p$ – произвольные целые числа, такие что $M_1 \geq q_1+1, \ldots, M_p \geq q_p+1$. Построим отображение

$$F: \mathfrak{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p} \to R^{sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}}, \qquad (2)$$

поставив в соответствие кортежу длины $M_1 + \ldots + M_p$ из $\mathfrak{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p}$ совокупность $sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}$ чисел, соответствующих всем упорядоченным кортежам длины $q_1 + \ldots + q_p$, представляющим собой проекции исходного кортежа на пространство $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$. Естественную область определения отображения F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Аналогично построим другое отображение

$$F': \mathfrak{M}_1^{M'_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M'_p} \to R^{sC_{M'_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M'_p}^{q_p}}, \qquad (2')$$

где $M'_1 \geq M_1, \ldots, M'_p \geq M_p$ с областью определения $\mathfrak{S}_{F'}$. Проекцию отображения F' на подпространство меньшей размерности получим, опуская из области его значений все числа, соответствующие по метрике (1) некоторой совокупности кортежей длины q, где $q = q_1 + \ldots + q_p$.

Будем говорить, что функция (1) задает на множествах $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ феноменологически симметричную $(m_1, \ldots, m_p)$-мерную геометрию (q-арную физическую структуру) ранга $(M_1, \ldots, M_p)$, кратности $\langle q_1, \ldots, q_p \rangle$ и порядка s, если на плотном в σ_F множестве ранг отображения F равен $s(C_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p} - 1)$, а ранг любой проекции отображения F', не содержащей отображения F, максимален на плотном в $\mathfrak{S}_{F'}$ множестве.

Другими словами, локально множество значений отображения F является подмножеством множества нулей системы s независимых функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ от $sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}$ переменных, причем s функциональных связей

$$\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0 \tag{3}$$

являются порождающими в том смысле, что любые другие нетривиальные связи будут только их следствием.

Будем говорить, что определенная выше физическая структура наделена групповой симметрией, если существуют такие изоморфные локальные группы Ли нетривиальных гладких преобразований многообразий $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$, что для их взаимного расширения на прямое произведение $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$ функция f является q-точечным инвариантом, где $q = q_1 + \ldots + q_p$. Поскольку преобразуемые многообразия конечномерны и метрика f невырожденна, число существенных параметров полной локальной группы локальных движений должно быть конечным. Обозначим его через r и назовем степенью групповой симметрии. Заметим, что в группе движений функции f группы преобразований многообразий

$\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ имеют одну и ту же параметрическую группу, так как они изоморфны.

Запишем систему $sC^{q_1}_{M'_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M'_p}$ уравнений сохранения

$$df|_{F'} = 0 \tag{4}$$

относительно $M'_1m_1 + \ldots + M'_pm_p$ дифференциалов координат точек кортежа из $\mathfrak{S}_{F'}$. Если физическая структура наделена групповой симметрией, то система (4), с одной стороны, должна иметь по крайней мере одно ненулевое решение, а,с другой стороны, число ее линейно независимых ненулевых решений для любых чисел $M'_1, \ldots, M'_p$ не должно превышать некоторого конечного значения, определяющего степень групповой симметрии. Число таких решений равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы. Но матрица системы (4) есть матрица Якоби системы функций f, соответствующих всем упорядоченным проекциям из $\mathfrak{S}_{F'}$ на пространство $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$. Ранг ее, очевидно, не изменится, если из системы функций $f|_{F'}$ исключить зависимые по связи (3). Исключив их, получим максимальную проекцию отображения F', не содержащую отображения F. Обозначим число функций в этой максимальной проекции через $N(M'_1, \ldots, M'_p)$. Тогда по определению физической структуры ранг матрицы системы (4) будет равен

$$\min(M'_1m_1 + \ldots + M'_pm_p, N(M'_1, \ldots, M'_p)). \tag{5}$$

Если найдутся такие значения $M'_1, \ldots, M'_p$, для которых $M'_1m_1 + \ldots + M'_pm_p \leq N(M'_1, \ldots, M'_p)$, то ранг матрицы системы (4) для них будет равен $M'_1m_1 + \ldots + M'_pm_p$, т.е. числу неизвестных в ней. Но тогда система (4) будет иметь только нулевое решение, что означает отсутствие групповых свойств у рассматриваемой физической структуры. Если же для любых значений $M'_1, \ldots, M'_p$ выполняется неравенство $N(M'_1, \ldots, M'_p) < M'_1 m_1 + \ldots + M'_p m_p$, то ранг матрицы системы (4) будет равен $N(M'_1, \ldots, M'_p)$ и число ее линейно независимых ненулевых решений окажется равным

$$r' = M'_1 m_1 + \ldots + M'_p m_p - N(M'_1, \ldots, M'_p). \tag{6}$$

Число решений r', как было отмечено выше, не должно превышать некоторого конечного значения. Из этого условия можно установить, при каких соотношениях между размерностью множеств, рангом и порядком физической структуры она может быть наделена групповой симметрией, и определить степень этой симметрии.

Рассмотрим сначала более подробно бинарные структуры на одном и двух множествах, а также тернарные структуры на одном, двух и трех множествах.

Для бинарных структур на одном множестве ранга M и порядка s множество $\mathfrak{M}$ есть m-мерное многообразие, а метрика (1) запишется в следующем виде: $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$. Отображение $F: \mathfrak{M}^M \to R^{sM(M-1)/2}$ по определению физической структуры имеет ранг $sM(M-1)/2-s$. Найдем, сколько в системе $sM'(M'-1)/2$ функций, соответствующих кортежу из $\mathfrak{M}^{M'}$, где $M' \geq M$, при этом зависимых. На матрицу пар для кортежа длины M' будем последовательно накладывать матрицу пар для кортежа длины M. При каждом полном наложении вычеркнем одну пару, например, последнюю. Эта процедура повторяется до тех пор, пока возможно наложение без пропусков. Число зависимых функций будет равно, очевидно, числу состоявшихся наложений, умноженному на s. Нетрудно установить, что это число равно $s(M'-M+1)(M'-M+2)/2$ и потому ранг матрицы Якоби всей системы функций $f|_{F'}$ по определению физической структуры окажется равным

$$\min(M'm, sM'(M'-1)/2-s(M'-M+1)(M'-M+2)/2).$$

Если $m < s(M-2)$, то ранг матрицы системы уравнений (4) для достаточно больших значений M' равен числу неизвестных и она имеет для этих значений только ненулевое решение, т.е. физическая структура не может быть наделена групповой симметрией. Если же $m \geq s(M-2)$, то для всех $M' \geq M$ ранг матрицы системы (4) меньше $M'm$ и она по формуле (6) будет иметь

$$r' = M'm-sM'(M-2)+s(M-1)(M-2)/2$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m > s(M-2)$ с ростом M' число решений r' может стать сколь угодно большим, что противоречит выводу об ограниченности r'. Поэтому для существования групповых свойств необходимо, чтобы размерность многообразия $\mathfrak{M}$ была равна

$$\boxed{m = s(M-2)}\,. \qquad (7)$$

В случае (7) число решений r' определяет число существенных и независимых параметров группы движений, т.е. степень групповой симметрии:

$$\boxed{r' = r = s(M-2)(M-1)/2 = m(m+s)/2s}\,. \qquad (8)$$

Если $s = 1$, то из равенств (7) и (8) получаем такие соотношения между размерностью m множества $\mathfrak{M}$, рангом M физической структуры и степенью ее групповой симметрии r, которые были использованы в основных определениях работы [1].

Рассмотрим теперь бинарные структуры ранга (M,N) и порядка s на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющихся многообразиями размерности m и n соответственно, задаваемых функцией $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R^s$. По определению физической структуры ранг отображения $F: \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N \to R^{sMN}$, где $M \geq 2$, $N \geq 2$, равен $sMN - s$. Число зависимых функций в системе $sM'N'$ функций, соответствующих кортежу длины $M' + N'$ из $\mathfrak{M}^{M'} \times \mathfrak{N}^{N'}$, где $M' \geq M$, $N' \geq N$, определяется описанным выше способом наложения на матрицу пар для кортежа длины $M' + N'$ матрицы пар для кортежа длины $M + N$. Это число легко находится: $s(M'-M+1)(N'-N+1)$, и потому ранг матрицы Якоби системы функций $f|_{F'}$, а следовательно, и системы уравнений (4) по определению оказывается равным

$$\min(M'm+N'n, sM'N'-s(M'-M+1)(N'-N+1)).$$

Если $m < s(N-1)$ или $n < s(M-1)$, то для некоторых значений M' и N' ранг системы уравнений (4) равен числу неизвестных $M'm + N'n$ и она имеет для этих значений только нулевое решение, что и означает отсутствие у рассматриваемой физической структуры групповых свойств. Если же $m \geq s(N-1)$ и $n \geq s(M-1)$, то ранг системы уравнений (4) для любых значений M' и N' равен $sM'N'-s(M'-M+1)(N'-N+1)$ и она имеет

$$r' = M'm + N'n - sM'(N-1) - sN'(M-1) + s(M-1)(N-1)$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m > s(N-1)$ или $n > s(M-1)$ с ростом M' и N' число решений r' может стать сколь угодно большим, что противоречит выводу об ограниченности r'. Поэтому физическая структура будет наделена групповой симметрией только в том случае, если между размерностью m, n множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ рангом структуры (M,N) и ее порядком s имеется следующая связь:

$$\boxed{m = s(N-1), \quad n = s(M-1)} \quad . \qquad (9)$$

Степень групповой симметрии r, т.е. число существенных и независимых параметров группы движений, определяется числом линейно независимых ненулевых решений системы (4) при условии (9):

$$\boxed{r' = r = s(M-1)(N-1) = mn/s} \quad . \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) были использованы автором в основных определениях работы [3], а для частного случая $s = 1$ в работе [2].

Перейдем, далее, к качественному рассмотрению тернарных физических структур. Для структуры ранга M и порядка s на одном множестве $\mathfrak{M}$ - многообразии размерности m, "метрикой" является функция $f\colon \mathfrak{M}^3 \to R^s$, а ранг отображения $F\colon \mathfrak{M}^M \to R^{sM(M-1)(M-2)/6}$, где $M \geq 4$, равен по определению $sM(M-1)(M-2)/2-s$. Найдем ранг отображения F', где $M' \geq M > 3$. Среди всех $sM'(M'-1)(M'-2)/6$ функций отображения F' число зависимых определяется методом наложения матрицы троек для кортежа длины M на матрицу троек для кортежа длины M'. Этот метод был подробно описан выше при рассмотрении бинарных структур на одном множестве, и для числа зависимых функций отображения F' получаем значение $s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6$. По определению физической структуры ранг матрицы системы уравнений (4) оказывается равным $\min(M'm,\ sM'(M'-1)(M'-2)/6 - s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6)$. Поскольку $M > 3$, для достаточно больших значений M' ранг матрицы системы (4) равен $M'm$, т.е. числу неизвестных, и она для таких значений M' имеет только нулевое решение. Таким образом, тернарные физические структуры на одном множестве не могут быть наделены групповой симметрией.

Тернарные физические структуры ранга (M,N) и порядка s на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - многообразиях размерности m и n соответственно задаются "метрикой" $f: \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N} \to R^s$. По определению этой структуры ранг отображения

$$F: \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N \to R^{sM(M-1)N/2},$$

где $M \geq 3$, $N \geq 2$, равен $sM(M-1)N/2-s$, а ранг отображения F', т.е. ранг системы уравнений (4), найдем, налагая матрицу троек для кортежа длины $M+N$ на матрицу троек для кортежа длины $M'+N'$. В результате получаем $\min\,(M'm+N'n,\ sM'(M'-1)N'/2 - s(M'-M+1)(M'-M+2) \times$ $\times (N'-N+1)/2)$. Поскольку $M>2$ и $N>1$, для достаточно больших значений M' и N' ранг отображения F' равен $M'm + N'n$, т.е. числу неизвестных в системе уравнений (4), которая тогда будет иметь только нулевое решение. Таким образом, тернарные физические структуры на двух множествах не могут быть наделены групповой симметрией.

Для тернарных физических структур ранга (M,N,L) и порядка s, задаваемых "метрикой" $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \to R^s$ на трех множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}$ - многообразиях размерности m, n, l соответственно, ранг отображения $f: \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N \times \mathfrak{L}^L \to$ $\to R^{sMNL}$, где $M \geq 2$, $N \geq 2$, $L \geq 2$, по определению равен $sMNL-s$. Ранг отображения F', т.е. ранг матрицы системы уравнений (4), можно установить методом наложения, использованным и описанным выше: $\min(M'm+N'n+L'l,\ sM'N'L' -$ $- s(M'-M+1)(N'-N+1)(L'-L+1))$. Поскольку $M>1$, $N>1$, $L>1$, для достаточно больших значений M', N', L' ранг отображения F' равен $M'm+N'n+L'l$, т.е. числу неизвестных в системе (4), которая для этих значений имеет только нулевое решение. Таким образом, тернарные структуры на трех множествах не могут быть наделены групповой симметрией ни при каких размерностях этих множеств.

Произвольные физические структуры ранга $(M_1, \ldots, M_p)$ и кратности s задаются на множествах $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ - многообразиях размерности $m_1, \ldots, m_p$ соответственно функцией (1). Ранг отображения (2) по определению структуры равен $sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p} - s$, а ранг отображения (2'), т.е. ранг системы уравнений (4), можно найти, налагая на матрицу кортежей длины $q_1 + \ldots + q_p$ для кортежа длины $M_1' + \ldots + M_p'$ из $\mathfrak{M}_1^{M_1'} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p'}$ матрицу тех же кортежей для кортежа длины $M_1 + \ldots + M_p$ из $\mathfrak{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p}$:

$$\min(M_1'm_1 + \ldots + M_p'm_p, \; sC_{M_1'}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p'}^{q_p} - sC_{M_1'-M_1+q_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p'-M_p+q_p}^{q_p}). \qquad (5')$$

Бинарные и тернарные физические структуры выше были подробно рассмотрены, поэтому будем предполагать, что $q = q_1 + \ldots + q_p > 3$. Число неизвестных в системе (4) от $M_1', \ldots, M_p'$ зависит линейным образом. В то же время разность, входящая в выражение (5'), содержит по $M_1', \ldots, M_p'$ члены порядка $q-1>2$, которые неограниченно возрастают, так как $M_1 > q_1, \ldots, M_p > q_p$. А это означает, что для достаточно больших значений $M_1', \ldots, M_p'$ ранг отображения F' равен числу неизвестных в системе (4), которая для этих значений будет иметь только нулевое решение. Таким образом, q-арные физические структуры, задаваемые на множествах $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$

функцией (1), в случае $q>3$ не могут быть наделены групповой симметрией.

Окончательный вывод, к которому мы приходим по результатам проведенного исследования, состоит в следующем:

Групповой симметрией могут быть наделены только бинарные физические структуры на одном и двух множествах, в то время как для q-арных физических структур с $q=q_1+\ldots+q_p>2$ функция (1) не допускает никаких нетривиальных локальных движений.

В заключение отметим, что групповая симметрия бинарных физических структур является определяющей, т.е. функция f будет задавать физическую структуру определенного ранга в том и только в том случае, если она допускает группу движений с определенным числом параметров (см. [1-3]). Условие наделения физической структуры групповой симметрией однозначно устанавливает связь между размерностью множеств, рангом структуры и степенью ее групповой симметрии - соотношения (7)-(10). В то же время без представления о групповой симметрии происхождение этих соотношений остается неясным, и, например, в [7] они рассматриваются как самое слабое и уязвимое место в определении физических структур.

Литература

1. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии //Сиб.мат.ж. - 1984. -Т. 25, №5.-С. 99-113.

2. Его же. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур)//Докл. АН СССР. - 1985. - Т. 284, № 1. -С. 39-41.

3. Его же. Групповые свойства физических структур /Ред. "Сиб. мат. ж.". - 1989. - 35 с. - Деп. в ВИНИТИ 10.03.89, № 1584-В89.

4. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур. -Новосибирск, 1968. - 226 с.

5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (3,2)//Укр.мат.ж. - 1970. -Т. 22, № 6. -С. 837-841.

6. Его же. Тернарная физическая структура ранга (2,2,2) //Изв. вузов.Математика. - 1976.-№8(171). -С. 60-67.

7. КУЛАКОВ Ю.И. Новая формулировка теории физических структур //Методологические и технологические проблемы инфор - мационно-логических систем. - Новосибирск, 1988. -Вып. 125: Вычислительные системы. -С. 3-32.

Поступила в ред.-изд.отд.

14 июня 1990 года