. СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1990 год Выпуск 135

УДК 512.816

АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ КАК ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

В.К. Ионин

Понятие физической структуры впервые введено Ю.И.Кулаковым в [1]. Во всех последующих работах Кулакова и других авторов эти структуры рассматривались не на абстрактных множествах, а на множествах, оснащенных какими-нибудь другими структурами, например, структурами аналитических многообразий. В настоящей статье мы будем исходить из абстрактных множеств. Мы приведем определение некоторого класса физических структур и покажем, что оно эквивалентно определению абстрактной группы. Заметим, что наше определение, хотя и содержит случаи, которые ранее не рассматривались, не является обобщением структур Кулакова, оно не является обобщением даже структур ранга (2,2). Перейдем к точным формулировкам.

1. Рассмотрим тройку $(\mathbf{B}, \Phi, \Gamma)$, где $\mathbf{B}$ - произвольное непустое множество, Φ - множество некоторых функций из $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$, а Γ - функция, отображающая $\mathbf{B}^3=\mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Будем говорить, что на множестве $\mathbf{B}$ задана физическая структура (Φ,Γ), если Φ - максимальное множество, для которого выполняются две аксиомы:

АКСИОМА 1. *Если* $(x,y,z,w)\in\mathbf{B}^4$ *и* $\varphi\in\Phi$, *то*

$$\varphi(x,y)=\Gamma(\varphi(x,z),\varphi(w,y),\varphi(w,z)).$$

АКСИОМА 2. *Для любой тройки* $(b,c,d)\in\mathbf{B}^3$ *найдутся такие четверка* $(x,y,z,w)\in\mathbf{B}^4$ *и функция* $\varphi\in\Phi$, *что*

$$b = \varphi(x, z), \quad c = \varphi(w, y), \quad d = \varphi(w, z).$$

2. Предположим, что B - группа, произведение элементов x, y будем записывать в виде xy. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пара* (Φ, Γ) *есть физическая структура на группе* B *, если множество* Φ *некоторых функций из* B^2 *в* B *и функция* Γ *из* B^3 *в* B *определяются условиями:*

а) для того чтобы функция $\varphi: B^2 \to B$ *входила в* Φ *, необходимо и достаточно существование двух таких функций* $p: B \to B$ *и* $q: B \to B$ *, что* $\varphi(x, y) = p(x)q(y)$;

б) для любой тройки $(y, z, w) \in B^3$ *выполняется равенство* $\Gamma(y, z, w) = yw^{-1}z$.

Доказательство опускаем, так как оно является легким упражнением.

Нетрудно также видеть, что для пары (Φ, Γ) из теоремы 1 вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует такая функция* $g \in \Phi$ *, что для любой пары* $(a, b) \in B^2$ *отображения* $x \mapsto g(x, b)$ *и* $y \mapsto g(a, y)$ *биективны.*

Функцию g можно определить, например, формулой $g(x, y) = xy$.

3. Рассмотрим две группы B_1 и B_2 , заданные на одном множестве B . Обозначим через (Φ_i, Γ_i) (где $i = 1, 2$) физическую структуру, порождаемую группой B_i в соответствии с теоремой 1. Очевидна следующая

ТЕОРЕМА 2. *Равносильны следующие два утверждения:*

а) $B_1 = B_2$; *б)* $(\Phi_1, \Gamma_1) = (\Phi_2, \Gamma_2)$.

4. Вследствие теоремы 1 каждая групповая структура на непустом множестве B порождает некоторую физическую структуру. В дальнейшем такие структуры будем называть групповыми фи-

зическими структурами. Теоремы 1 и 2 позволяют установить естественное биективное отображение множества всех групповых структур на множество всех групповых физических структур. При этом все эти структуры рассматриваются на произвольном непустом множестве B. Возникает естественный вопрос: существуют ли физические структуры, отличные от групповых? Мы пока не знаем полного ответа на этот вопрос, можем только доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы физическая структура* (Φ, Γ), *заданная на непустом множестве* B, *была групповой, достаточно, чтобы для нее выполнялось предложение.*

Доказательство приводится в п п. 5-7.

5. Пусть g - функция из предложения. Для краткости введем обозначение $g(x,y)=xy$ для любой пары $(x,y)\in B^2$. Элемент xy будем называть произведением x на y. Ясно, что для любой фиксированной пары $(a,b)\in B^2$ каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$ имеет единственное решение. Множество B с такой бинарной операцией, т.е. пара (B,g), называется квазигруппой.

6. Рассмотрим два биективных отображения $p: B \to B$ и $q : B \to B$. Ясно, что функция $\varphi: B^2 \to B$, определенная формулой $\varphi(x,y) = g(p(x), q(y))$, входит в Φ. Легко видеть, что для произвольного элемента $\varepsilon\in B$ функции p и q можно подобрать так, чтобы выполнялись равенства $\varphi(x,\varepsilon) = x$, $\varphi(\varepsilon,y) = y$ для любых $x,y\in B$. Очевидно, что φ, как и g, удовлетворяет предложению. Для простоты обозначений будем считать, что не φ, а g удовлетворяет двум последним равенствам, т.е. $x\varepsilon = x$, $\varepsilon y = y$ для любых $x,y\in B$. Это обстоятельство позволяет нам считать без ограничения общности, что квазигруппа (B,g) имеет единицу ε. Такие квазигруппы называются лупами.

7. Для того, чтобы установить, что лупа (B,g) является группой, осталось доказать равенство $x(yz) = (xy)z$ для любых $x,y,z \in B$. Это верно, так как $x(yz) = \Gamma(xy, \varepsilon(yz), \varepsilon y) = \Gamma((xy)\varepsilon, yz, y\varepsilon) = (xy)z$.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур. -Новосибирск, 1968. .- 226 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
18 июня 1990 года