СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 135

УДК 517.948:530.1:539.12

ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (4,4;б) И ТРЕХКОМПОНЕНТНЫЕ СПИНОРЫ

Ю.С.Владимиров, А.В.Соловьёв

Введение

В течение ряда лет развивается предложенная Ю.И.Кулаковым теория физических структур [1,2], которую можно понимать как теорию фундаментальных отношений, предназначенную для переосмысливания физических закономерностей. Известно, что теория физических структур может быть построена как на одном множестве элементов (унарные структуры), так и на двух множествах (бинарные структуры). Г.Г.Михайличенко [1,3] были найдены все возможные бинарные структуры с вещественными парными отношениями. В частности, им было показано, что бинарные структуры симметричных рангов (n,n) образуют два типа: структуры ранга $(n,n;a)$ и структуры ранга $(n,n;б)$. Последние характеризуются законом

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\varkappa} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{k\varkappa} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & \dots & a_{l\varkappa} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

и парными отношениями вида:

$$a_{i\alpha} = \sum_{s=1}^{n-1} i^s \alpha^s , \qquad (2)$$

где i^s – $(n-1)$ вещественных параметров, поставленных в соответствие элементам множества $\mathfrak{M}$, α^s – такое же число параметров, поставленных в соответствие элементам множества $\mathfrak{N}$.

Данная работа посвящена развитию теории комплексифицированной бинарной структуры ранга (4,4;б). В этой теории как парные отношения $a_{i\alpha}$, так и параметры i^s, α^s предполагаются комплексными. Для комплексифицированных бинарных структур существенно расширяется сфера возможных приложений в физике. Так, в нашей группе на базе иерархии комплексифицированных бинарных структур симметричных рангов сформулирована программа построения единой теории пространственно-временных отношений и физических взаимодействий, названной *бинарной геометрофизикой*. Цель этих исследований состоит в том, чтобы в рамках структур низших рангов сформулировать и обосновать все основные понятия и закономерности современной физики микромира, включая 4-мерные классические пространственно-временные отношения и существующие модели физических взаимодействий: электрослабых (модель Вайнберга-Салама), сильных (хромодинамика) и т.д. В такой теории ключевую роль играют бинарные структуры типа "б", особенно структуры рангов (3,3;б) и (4,4;б).

В работе одного из авторов [4] была развита теория комплексифицированной структуры ранга (3,3;б) и установлена ее связь с теорией 2-компонентных спиноров и биспиноров, используемых для описания элементарных частиц полуцелого спина. Согласно формуле (2) парное отношение для этой структуры имеет вид:

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 , \qquad (3)$$

т.е. каждый элемент структуры характеризуется двумя комплексными параметрами. Следовательно, любому элементу можно поставить в соответствие вектор в 2-мерном комплексном пространстве. Нетрудно видеть, что параметры определены неоднозначно, с точностью до некоторой группы линейных преобразований:

$$i^{s'} = A^s_r i^r, \quad \alpha^{s'} = \tilde{A}^s_r \alpha^r . \tag{4}$$

Ключевую роль в теории структур играют фундаментальные $m \times m$-отношения, выражаемые в виде отличного от нуля определителя (типа записанного в (1)) максимально возможного порядка. Для структуры ранга (3,3;6) это будут 2x2-отношения между двумя парами разноименных элементов, представимые в форме:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} . \tag{5}$$

Требование инвариантности этого выражения выделяет из (4) 6-параметрическую группу преобразований $SL(2,\mathbb{C})$. Каждый из определителей в (5) справа можно понимать как антисимметричное скалярное произведение в 2-мерном комплексном пространстве:

$$(\vec{i},\vec{k}) = \varepsilon_{sr} i^s k^r, \ (\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \varepsilon_{\dot{s}\dot{r}} \alpha^{\dot{s}} \beta^{\dot{r}} . \tag{6}$$

Следовательно, можно утверждать, что элементы структуры являются 2-компонентными спинорами. В бинарной геометрофизике используется случай, когда коэффициенты преобразований (4) комплексно сопряжены, т.е. $\tilde{A}^s_r = (A^s_r)^*$.

В такой теории можно ввести понятие спин-тензора. Наиболее важную роль играют смешанные спин-тензоры второго ранга. Рассмотрим спинтензор $b^{s\dot{r}}$ следующего вида:

$$b^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}} + k^s \beta^{\dot{r}} . \tag{7}$$

Легко видеть, что в этом случае спин-тензорный инвариант с точностью до константы совпадает с фундаментальным 2x2-отношением (5):

$$\frac{1}{2} b_{s\dot{r}} b^{s\dot{r}} = b^{1\dot{1}} b^{2\dot{2}} - b^{1\dot{2}} b^{2\dot{1}} = \begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} . \qquad (8)$$

Полагая, что элементы (i,α) и (k,β) находятся "в паре", т.е. их параметры комплексно-сопряжены друг другу:

$$(i^s)^* = \alpha^s , \quad (k^s)^* = \beta^s , \qquad (9)$$

находим, что матрица из компонент $b^{s\dot{r}}$ может быть представ - лена в виде:

$$\| b^{s\dot{r}} \| = I_2 p_0 + \sigma^i p_i , \qquad (10)$$

где I_2 - единичная двухрядная матрица, σ^i - три матрицы Паули, а $p_\mu = \{p_0, p_i\}$ - компоненты некоторого вещественного 4-вектора. Тогда (8), очевидно, будет задавать псевдоев - клидову квадратичную форму:

$$\frac{1}{2} b_{s\dot{r}} b^{s\dot{r}} = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \equiv g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu , \qquad (11)$$

соответствующую пространству-времени Минковского.

В работе [4] показано, как из параметров двух пар элемен - тов можно построить компоненты биспиноров; из последних и матриц Дирака - образовать 4-векторы, тензоры и т.д. Совместное требование инвариантности отдельных определителей в (5) справа и парных отношений $a_{i\alpha}$ выделяет 3-параметрическую группу преобразований $SU(2)$, соответствующую пространственным поворотам. Эти преобразования, дополненные 3-параметрическим семейством бустов, образуют 6-параметрическую группу Лоренца. Далее, с помощью пары специальным образом связанных элементов струк - туры ранга (3,3;б) можно ввести понятие массивных лептонов и записать для них прообраз уравнения Дирака в импульсном пространстве. Другими словами, в рамках структуры ранга (3,3;б) удается построить довольно широкий круг понятий из физики микро -

мира, не постулируя при этом классическое пространство-время, как это обычно делается в общепринятой теории.

В следующих разделах статьи по образу и подобию структуры ранга (3,3;6) развивается теория структуры ранга (4,4;6) и обсуждается физический смысл возникающих в ней понятий.

1. Бинарная структура ранга (4,4;6) и 3-компонентные спиноры

Согласно формуле (1) закон структуры ранга (4,4;6) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & a_{l\gamma} & a_{l\delta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (12)$$

где парные отношения между элементами множества $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots, j, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$ выражаются следующим образом:

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3 \, . \qquad (13)$$

Здесь i^s и α^s - числовые параметры, характеризующие элементы $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ соответственно. В дальнейшем будем предполагать, что они принимают комплексные значения.

Назовем фундаментальным 3x3-отношением между $(i,k,j) \in \mathfrak{M}$ и $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathfrak{N}$ величину базисного минора матрицы из (12). Аналогично (5) его можно представить в виде произведения двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} . \qquad (14)$$

Рассмотрим линейные преобразования параметров структуры

$$i^{s'} = A^s_r i^r, \quad \alpha^{s'} = \tilde{A}^s_r \alpha^r \quad (A^s_r, \tilde{A}^s_r \in \mathbb{C}), \tag{15}$$

оставляющие инвариантным фундаментальное 3x3-отношение $\begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$. Как это непосредственно следует из легко проверяемых соотношений

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} i'^1 & k'^1 & j'^1 \\ i'^2 & k'^2 & j'^2 \\ i'^3 & k'^3 & j'^3 \end{vmatrix} &= \det A \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} ; \\ \begin{vmatrix} \alpha'^1 & \beta'^1 & \gamma'^1 \\ \alpha'^2 & \beta'^2 & \gamma'^2 \\ \alpha'^3 & \beta'^3 & \gamma'^3 \end{vmatrix} &= \det \tilde{A} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} , \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $A \equiv \| A^s_r \|$ и $\tilde{A} \equiv \| \tilde{A}^s_r \|$, базисный минор (14) инвариантен только в том случае, если выполняются условия унимодулярности

$$\det A = 1; \ \det \tilde{A} = 1 \tag{17}$$

или, иными словами, если $A, \tilde{A} \in SL(3, \mathbb{C})$. Кроме того, как и в теории структуры ранга (3,3;6), потребуем, чтобы элементы матриц A и $\tilde{A}$ были комплексно-сопряженными величинами:

$$\tilde{A}^s_r = (A^s_r)^* . \tag{18}$$

Предположим теперь, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - линейные пространства, т.е. для их элементов определены операции сложения и умножения на комплексные числа. Тогда i^s и α^s можно рассматривать как координаты векторов i и α относительно некоторых базисов в этих пространствах. Принимая во внимание (15)-(18), приходим к выводу, что в $\mathfrak{M}$ действует фундаментальное представление группы $SL(3,\mathbb{C})$, а в $\mathfrak{N}$ - ему сопряженное. Как линейные пространства одинаковой размерности, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, очевидно, изоморфны пространству $\mathbb{C}^3$ упорядоченных троек комплексных чисел. Векторы из $\mathbb{C}^3$ будем называть *3-компонентными спинорами*. В частности, таковыми являются $i^s, \dots, \gamma^{\dot{s}}$ (здесь и далее точками отмечаются индексы величин, преобразующихся по сопряженным представлениям группы $SL(3,\mathbb{C})$). Определители (16) выступают в роли "скалярных произведений" элементов

$$(\vec{i},\vec{k},\vec{j}) = \varepsilon_{srl} i^s k^r j^l; \quad (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = \varepsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{l}} \alpha^{\dot{s}} \beta^{\dot{r}} \gamma^{\dot{l}}, \tag{19}$$

где ε_{srl} - символ Леви-Чивиты, выполняющий функции метрического тензора в пространстве 3-компонентных спиноров. Эти формулы являются прямыми аналогами формул (6) в теории 2-компонентных спиноров.

Обычным образом можно ввести спин-тензоры произвольного ранга. Это будут величины, преобразующиеся как произведения соответствующего числа 3-компонентных спиноров: $b'^{s\dots\dot{r}\dots} = A^s_l \dots A^{\dot{r}}_{\dot{t}} \dots b^{l\dots\dot{t}\dots}$. С помощью ε_{srl} контравариантным спинорам и спин-тензорам можно поставить в соответствие ковариантные, например $(i)_{sr} = \varepsilon_{srl} i^l$; $(ik)_s = \varepsilon_{srl} i^r k^l$. Отличие от случая 2-компонентных спиноров состоит, в частности, в том, что контравариантному спинору соответствует ковариантный спин-тензор второго ранга, и наоборот.

2. Структура ранга (4,4;6) и девятимерные векторы

Наибольший интерес для развиваемого здесь подхода представляют смешанные спин-тензоры второго ранга. По аналогии с (7) рассмотрим такой спин-тензор, построенный из параметров двух троек элементов структуры ранга (4,4;6):

$$b^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}} + j^s\gamma^{\dot{r}} \quad . \tag{20}$$

Легко убедиться в том, что фундаментальное 3x3-отношение (14) с точностью до константы совпадает со спин-тензорным инвариантом

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot{r}\dot{p}\dot{n}} b^{s\dot{r}} b^{l\dot{p}} b^{m\dot{n}} = \begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \tag{21}$$

(сравните с формулой (8) введения).

Ограничимся частным случаем, когда элементы двух троек находятся "в парах":

$$(i^s)^* = \alpha^s, \ (k^s)^* = \beta^s, \ (j^s)^* = \gamma^s . \tag{22}$$

В этом случае матрица из компонент $b^{s\dot{r}}$ может быть представлена в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами p_0, p_a $(a = \overline{1,8})$

$$\| b^{s\dot{r}} \| = I_3 p_0 + \lambda^a p_a \quad , \tag{23}$$

где I_3 - единичная трехрядная матрица, λ^a - восемь матриц Гелл-Манна в стандартном представлении:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
&\lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
&\lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

а p_0 и p_a вполне аналогичны компонентам 4-вектора в формуле (10).

Разрешая соотношения (23) относительно $p_\mu = \{ p_0 , p_a \}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&p_0 = \tfrac{1}{3}(b^{1\dot{1}} + b^{2\dot{2}} + b^{3\dot{3}}), \quad p_1 = \tfrac{1}{2}(b^{1\dot{2}} + b^{2\dot{1}}),\\
&p_2 = \tfrac{i}{2}(b^{1\dot{2}} - b^{2\dot{1}}), \quad p_3 = \tfrac{1}{2}(b^{1\dot{1}} - b^{2\dot{2}}),\\
&p_4 = \tfrac{1}{2}(b^{1\dot{3}} + b^{3\dot{1}}), \quad p_5 = \tfrac{i}{2}(b^{1\dot{3}} - b^{3\dot{1}}),\\
&p_6 = \tfrac{1}{2}(b^{2\dot{3}} + b^{3\dot{2}}), \quad p_7 = \tfrac{i}{2}(b^{2\dot{3}} - b^{3\dot{2}}),\\
&p_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(b^{1\dot{1}} + b^{2\dot{2}} - 2b^{3\dot{3}}).
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Подставляя сюда выражения компонент спин-тензора (20) непосредственно через параметры элементов структуры ранга (4,4;6), находим:

$$\left.\begin{aligned}
p_0 = \frac{1}{3}\,(&i^1\alpha^{\dot{1}} + i^2\alpha^{\dot{2}} + i^3\alpha^{\dot{3}} + k^1\beta^{\dot{1}} + k^2\beta^{\dot{2}} + k^3\beta^{\dot{3}} +\\
&+ j^1\gamma^{\dot{1}} + j^2\gamma^{\dot{2}} + j^3\gamma^{\dot{3}});\\
p_1 = \frac{1}{2}\,(&i^1\alpha^{\dot{2}} + i^2\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{2}} + k^2\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{2}} + j^2\gamma^{\dot{1}});\\
p_2 = \frac{i}{2}\,(&i^1\alpha^{\dot{2}} - i^2\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{2}} - k^2\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{2}} - j^2\gamma^{\dot{1}});\\
p_3 = \frac{1}{2}\,(&i^1\alpha^{\dot{1}} - i^2\alpha^{\dot{2}} + k^1\beta^{\dot{1}} - k^2\beta^{\dot{2}} + j^1\gamma^{\dot{1}} - j^2\gamma^{\dot{2}});\\
p_4 = \frac{1}{2}\,(&i^1\alpha^{\dot{3}} + i^3\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{3}} + k^3\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{3}} + j^3\gamma^{\dot{1}}):\\
p_5 = \frac{i}{2}\,(&i^1\alpha^{\dot{3}} - i^3\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{3}} - k^3\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{3}} - j^3\gamma^{\dot{1}});\\
p_6 = \frac{1}{2}\,(&i^2\alpha^{\dot{3}} + i^3\alpha^{\dot{2}} + k^2\beta^{\dot{3}} + k^3\beta^{\dot{2}} + j^2\gamma^{\dot{3}} + j^3\gamma^{\dot{2}});\\
p_7 = \frac{i}{2}\,(&i^2\alpha^{\dot{3}} - i^3\alpha^{\dot{2}} + k^2\beta^{\dot{3}} - k^3\beta^{\dot{2}} + j^2\gamma^{\dot{3}} - j^3\gamma^{\dot{2}});\\
p_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(&i^1\alpha^{\dot{1}} + i^2\alpha^{\dot{2}} - 2i^3\alpha^{\dot{3}} + k^1\beta^{\dot{1}} + k^2\beta^{\dot{2}} -\\
&- 2k^3\beta^{\dot{3}} + j^1\gamma^{\dot{1}} + j^2\gamma^{\dot{2}} - 2j^3\gamma^{\dot{3}}).
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Можно показать, что величины p_μ из (25)-(26) образуют некоторый 9-мерный вектор, который при преобразованиях 3-компонентных спиноров (15) преобразуется, в свою очередь, по закону:

$$p'_\mu = L_\mu^\nu p_\nu, \qquad \mu,\nu = \overline{0,8}, \tag{27}$$

реализующему линейное представление группы $SL(3,\mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{R}^9$. Явный вид вещественных функций $L_\mu^\nu = L_\mu^\nu(A_r^s, \dot{A}_r^s)$ приведен в приложении к данной статье.

Подставляя (23) в выражение для спин-тензорного инварианта (21), находим аналог 4-мерной метрики (11) в 9-мерном пространстве векторов p_μ

$$S^3(p) \equiv \frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot{r}\dot{p}\dot{n}} b^{s\dot{r}} b^{l\dot{p}} b^{m\dot{n}} = p_0(p_0^2 - \sum_{a=1}^{8} p_a^2) + p_3(p_4^2 +$$

$$+ p_5^2 - p_6^2 - p_7^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} p_8 (2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2 - p_4^2 - p_5^2 - p_6^2 - p_7^2 - \frac{2}{3} p_8^2) +$$

$$+ 2p_1p_4p_6 + 2p_1p_5p_7 + 2p_2p_5p_6 - 2p_2p_4p_7 \equiv G^{\alpha\beta\gamma} p_\alpha p_\beta p_\gamma, \tag{28}$$

где величины $G^{\alpha\beta\gamma}$, в силу теоремы частного, образуют контравариантный тензор третьего ранга относительно преобразований (27), причем $G^{\alpha\beta\gamma} = L_\mu^\alpha L_\nu^\beta L_\lambda^\gamma G^{\mu\nu\lambda}$. Так как антисимметричная часть этого тензора дает нулевой вклад в $S^3(p)$, то, не ограничивая общности, можно симметризовать $G^{\alpha\beta\gamma}$ по всем индексам. Тогда его компоненты, отличные от нуля, будут иметь следующий вид: $G^{000} = 1$, $G^{0aa} = -\frac{1}{3}$, $G^{abc} = d^{abc} \cdot \frac{2}{3}$ ($a,b,c = \overline{1,8}$), где d^{abc} - известные в теории группы $SU(3)$ константы, входящие в антикоммутационные соотношения для матриц Гелл-Манна $[\lambda^a, \lambda^b]_+ = 2d^{abc}\lambda^c + \frac{4}{3}\delta^{ab}$.

В соответствии с эрлангенской программой Ф.Клейна естественно считать (28) метрикой пространства $\mathbb{R}^9$. Иными словами, в

$\mathbb{R}^9$ определена метрическая функция, имеющая вид алгебраической формы третьей степени: $S^3(p) = G^{\alpha\beta\gamma}p_\alpha p_\beta p_\gamma$. Известно [5], что пространства такого типа относятся к классу финслеровых. Таким образом, преобразования (27) можно интерпретировать как изометрии пространства $\langle \mathbb{R}^9, S^3\rangle$, ибо в этом случае $S^3(p') = S^3(p)$.

Следует отметить, что в теории структуры ранга (4,4;6) имеется отличное от нуля фундаментальное 2x2-отношение

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} \equiv \left\{ \begin{matrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^3 & k^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i^2 & k^2 \\ i^3 & k^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix}, \qquad (29)$$

обобщающее (5) на случай 3-компонентных спиноров. Используя матрицы Гелл-Манна (24), можно убедиться в том, что

$$2\left\{ \begin{matrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{matrix} \right\} = (\alpha^T\lambda^\mu i)(\beta^T\lambda_\mu k) , \qquad (30)$$

где каждое из выражений, заключенных в круглые скобки, представляет собой компоненту 9-вектора

$$\alpha^T\lambda^\mu i = (\alpha^1\alpha^2\alpha^3)\lambda^\mu \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

и аналогично для $\beta^T\lambda_\mu k$. Здесь в качестве матрицы λ^0 использовано выражение $\lambda^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} I_3$. Суммирование в (30) производится, очевидно, по 9 значениям индекса μ, т.е. как бы в 9-мерном пространстве с сигнатурой (+--------).

В теории структуры ранга (4,4;6) матрицы Гелл-Манна λ^a играют такую же роль, что и матрицы Паули σ^i в теории структуры ранга (3,3;6). В частности, для структуры ранга (3,3;6) фундаментальное 2x2-отношение (5) можно записать аналогичным образом:

$$2\begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = (\alpha^T\sigma^\mu i)(\beta^T\sigma_\mu k), \tag{32}$$

где роль σ^0 играет единичная матрица I_2.

3. Аналоги пространственных поворотов и лоренцевых бустов в теории структуры ранга (4,4;6)

Рассмотрим группу $SU(3) \subset SL(3,\mathbb{C})$. Она играет важную роль в теории сильных взаимодействий и выделяется следующими условиями: $A^+A = I_3$, $\det A = 1$. Легко показать, что в этом случае преобразования (15) оставляют инвариантным не только выражение (21), но и след спин-тензора (20). Согласно формулам (25), $\sum_{s=1}^{3} b^{s\dot{s}} = 3p_0$, так что при $A \in SU(3)$ преобразования (27) не затрагивают нулевую компоненту вектора p_μ: $p_0' = p_0$, т.е. переводят подпространство $\mathbb{R}^8 \subset \mathbb{R}^9$ в себя $(L_{0a} = L_{a0} = 0)$, что вполне аналогично ортогональным поворотам в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве. Изложенное напоминает хорошо известный гомоморфизм $SU(2) \to SO(3)$.

Определенный интерес представляют однопараметрические подгруппы группы $SL(3,C)$. Как известно [6], любая такая подгруппа имеет вид: $t \to \exp(t,a)$, где a - элемент алгебры Ли соответствующей группы, а $t \in \mathbb{R}$.

Поскольку алгебра Ли группы $SU(3)$ состоит из всех бесследовых антиэрмитовых матриц третьего порядка, кривые $\varphi^a \to \exp(i\varphi^a\lambda^a)$ (по $a = \overline{1,8}$ нет суммирования), очевидно, проходят в $SU(3)$. Оказывается, суммы экспоненциальных рядов

$$A(\varphi^a) \equiv \exp(i\varphi^a\lambda^a) \tag{33}$$

можно выразить в явном виде через тригонометрические функции . Например, для $a = 1$ имеем:

$$A(\varphi^1) = \begin{bmatrix} \cos\varphi^1 & i\sin\varphi^1 & 0 \\ i\sin\varphi^1 & \cos\varphi^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{34}$$

Матрица (34) индуцирует вполне определенное преобразование (27) вектора p_μ , где

$$L_{00} = L_{11} = L_{88} = 1,$$
$$L_{22} = L_{33} = \cos 2\varphi^1,$$
$$L_{23} = -L_{32} = \sin 2\varphi^1 ,$$
$$L_{44} = L_{55} = L_{66} = L_{77} = \cos\varphi^1,$$
$$L_{47} = L_{65} = -L_{56} = -L_{74} = \sin\varphi^1,$$

а все остальные $L_{\mu\nu}$ обращаются в нуль (здесь $L_\mu^\nu \equiv L_{\mu\nu}$). Следует отметить, что здесь отчетливо выделяются двумерные повороты в плоскостях $(p_4 p_7)$ и $(p_5 p_6)$ на угол φ^1 , а также в плоскости $(p_2 p_3)$ на угол $2\varphi^1$.

Известно [7],что при гомоморфизме $SL(2,C) \to L_+^\uparrow$ эрмитовым унимодулярным матрицам отвечают лоренцевы бусты, поэтому представляется разумным рассматривать аналогичный случай для группы $SL(3,C)$. Пусть семейство $\{A\}$ состоит из комплексных матриц третьего порядка, удовлетворяющих условиям: $A^+ = A$, $\det A = 1$. Нетрудно убедиться в том, что однопараметрическая подгруппа $\phi \mapsto \exp(\phi\cdot X)$ будет проходить в семействе $\{ A \}$, только если $\operatorname{tr} X = 0$ и $X^+ = X$. Такими свойствами обладают матрицы Гелл-Манна (24), так что возникают следующие степенные ряды:

$$A(\psi^a) \equiv \exp(\psi^a\lambda^a) . \qquad (35)$$

Оказывается, матрицы (35) также допускают явное выражение, но уже не через тригонометрические, а через гиперболические функции. Например, при $a = 1$ получаем:

$$A(\psi^1) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\psi^1 & \mathrm{sh}\psi^1 & 0 \\ \mathrm{sh}\psi^1 & \mathrm{ch}\psi^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (36)$$

Отличные от нуля элементы матрицы линейного преобразования пространства R^9, соответствующего (36), имеют вид:

$$L_{00} = \frac{1}{3}(2\mathrm{ch}\, 2\psi^1 + 1) ,$$

$$L_{01} = \frac{2}{3}\mathrm{sh}\, 2\psi^1 ,$$

$$L_{08} = \frac{2}{3}L_{80} = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\mathrm{ch}\, 2\phi^1 - 1) ,$$

$$L_{10} = \mathrm{sh}\, 2\psi^1 ,$$

$$L_{11} = \mathrm{ch}\, 2\psi^1 ,$$

$$L_{18} = L_{81} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{sh}\, 2\psi^1 ,$$

$$L_{22} = L_{33} = 1 ,$$

$$L_{44} = L_{55} = L_{66} = L_{77} = \mathrm{ch}\psi^1 ,$$

$$L_{46} = L_{64} = L_{57} = L_{75} = \mathrm{sh}\psi^1 ,$$

$$L_{88} = \frac{1}{3}(\mathrm{ch}\, 2\psi^1 + 2) .$$

Обратим внимание на характерные псевдоповороты (бусты) в плоскостях (p_4p_6) и (p_5p_7).

Таким образом, важное топологическое отличие 3-компонентных спиноров от привычных 2-компонентных состоит в том,что поворот первого на некоторый (псевдо)угол индуцирует преобразование вектора с тем же самым значением (ψ^a) φ^a , тогда как для обычных спиноров это значение удваивается.

4. Физическая интерпретация фундаментальных отношений структуры ранга (4,4;6)

Обсудим физический смысл введенных выше понятий в рамках развиваемой нами бинарной геометрофизики. Для этого напомним, что в основе современной теории сильных взаимодействий (хромодинамики) лежат представления о кварковой структуре адронов. Предполагается, что кварки обладают тремя цветовыми зарядами, т.е. образуют, как говорят, цветовой триплет q^s, $s = 1,2,3$. Согласно формуле (13) в теории структуры ранга (4,4;6) элементы также характеризуются тремя числовыми параметрами.Кроме того, в ней естественным образом возникает группа $SU(3)$, широко известная как группа внутренней (цветовой) симметрии хромодинамики. Это дает основания интерпретировать элементы структуры ранга (4,4;6) как кварки, а их параметры - как цветовые заряды. При этом элементы множества $\mathfrak{M}$ будут описывать начальные состояния кварков, а элементы множества $\mathfrak{N}$ - конечные состояния.

В хромодинамике барионы представляют собой "бесцветные" комбинации трех кварков q_1 ,q_2 и q_3

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}\, \varepsilon_{srl}\, q_1^s q_2^r q_3^l \;, \tag{37}$$

где ε_{srl} - полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты.Обращаясь к фундаментальному 3x3-отношению (14), нетрудно видеть, что каждый из двух сомножителей (определителей) в $\begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$ с точностью до константы совпадает с выражением

(37) для бариона

$$B(i,k,j) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix},$$

где произведена замена: $q_1^s \to i^s, \quad q_2^s \to k^s, \quad q_3^s \to j^s$. Таким образом, можно утверждать, что фундаментальное 3x3-отношение соответствует амплитуде перехода свободного бариона из начального состояния в конечное.

В хромодинамике предполагается, что кварки "склеены" внутри адронов переносчиками сильных взаимодействий - глюонами. Каждому из глюонов отвечает своя матрица Гелл-Манна, так что всего их восемь. Глюоны "сворачиваются" с токами кварков аналогично тому, как это записано в (30). Поэтому можно сказать, что фундаментальное 2x2-отношение (29), без учета слагаемого $(\alpha^T\lambda\, i)(\beta^T\lambda_0 k)$, характеризует взаимодействие двух кварков.

Напомним, что мезоны представляют собой "бесцветные" парные комбинации кварка q и антикварка $\bar{q}$:

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{q}_s q^s . \tag{38}$$

Легко видеть, что выражение (38) с точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{3}}$ совпадает с парным отношением (13) структуры ранга (4,4;6) или нулевой компонентой 9-вектора $\alpha^T\lambda^\mu i$. Тогда отобранное выше из 2x2-отношения слагаемое можно трактовать как двухкварковую систему.

Следует отметить, что в развитом здесь фрагменте бинарной хромодинамики отсутствовали понятия зарядов частиц, а следовательно, пока еще нельзя было говорить о взаимодействиях в обычном их понимании. Описание взаимодействий адронов становится возможным лишь в рамках структуры следующего ранга - (5,5;а). Эта ситуация совершенно аналогична той, какая складывалась в [4] при изложении теории структуры ранга (3,3;б). В рамках последней можно было описать свойства массивных лептонов и группу Лоренца, однако электрослабые взаимодействия оказалось возможным ввести только в рамках структуры ранга (4,4;а). Кроме того, надо иметь в виду, что бинарные структуры, начиная с ранга (3,3;б), описывают закономерности, соответствующие импульсному (точнее, зарядово-импульсному) пространству. Для перехода к обычному координатному пространству-времени необходимо еще произвести композицию (своеобразное произведение) этих структур с бинарной структурой ранга (2,2) [8].

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.- Новосибирск,1968.- 226 с.

2. Его же. О теории физических структур// Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.- Л.: Наука,1983.- Т.127,вып.15.- С.103-151.(Зап.научных семинаров ЛОМИ.)

3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решения некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона: Автореф. дис... канд.физ.-мат.наук: 01.01.01 и 01.04.02.- Новосибирск, 1973.- 13 с.

4. ВЛАДИМИРОВ Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем.- Новосибирск.- 1988.- Вып.125: Вычислительные системы.-С.42-60.

5. АСАНОВ Г.С., ПОНОМАРЕНКО С.Ф. Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности.- Кишинёв: Штиинца,1989.

6. ПОНТРЯГИН Л.С. Непрерывные группы.-М.:Наука,1973.

7. РУМЕР Ю.Б.,ФЕТ А.И.Теория групп и квантованные поля. - М.: Наука,1977.

8. ВЛАДИМИРОВ Ю.С., КАРНАУХОВ А.В. Композиция бинарных структур и фейнмановский динамический принцип для фермионов // Гравитация и электромагнетизм.-Минск,1989.-С.35.

Элементы матрицы 9-мерных линейных преобразований

$$p'_\mu = L_{\mu\nu} p_\nu$$

Для упрощения записи формул введем обозначения: $A^s_r \equiv \equiv A_{sr}$. Тогда каждой $A \in SL(3,C)$ соответствуют следующие элементы матрицы $\| L_{\mu\nu} \| \equiv \| L^\nu_\mu \|$:

$$L_{00} = \frac{1}{3} (A_{11}A^*_{11} + A_{21}A^*_{21} + A_{31}A^*_{31} + A_{12}A^*_{12} + A_{22}A^*_{22} + A_{32}A^*_{32} + A_{13}A^*_{13} + A_{23}A^*_{23} + A_{33}A^*_{33});$$

$$L_{01} = \frac{1}{3} (A_{11}A^*_{12} + A_{21}A^*_{22} + A_{31}A^*_{32} + A_{12}A^*_{11} + A_{22}A^*_{21} + A_{32}A^*_{31});$$

$$L_{02} = \frac{i}{3} (A_{12}A^*_{11} + A_{22}A^*_{21} + A_{32}A^*_{31} - A_{11}A^*_{12} - A_{21}A^*_{22} - A_{31}A^*_{32});$$

$$L_{03} = \frac{1}{3} (A_{11}A^*_{11} + A_{21}A^*_{21} + A_{31}A^*_{31} - A_{12}A^*_{12} - A_{22}A^*_{22} - A_{32}A^*_{32});$$

$$L_{04} = \frac{1}{3} (A_{11}A^*_{13} + A_{21}A^*_{23} + A_{31}A^*_{33} + A_{13}A^*_{11} + A_{23}A^*_{21} + A_{33}A^*_{31});$$

$$L_{05} = \frac{i}{3} (A_{13}A^*_{11} + A_{23}A^*_{21} + A_{33}A^*_{31} - A_{11}A^*_{13} - A_{21}A^*_{23} - A_{31}A^*_{33});$$

$$L_{06} = \frac{1}{3} (A_{12}A^*_{13} + A_{22}A^*_{23} + A_{32}A^*_{33} + A_{13}A^*_{12} + A_{23}A^*_{22} + A_{33}A^*_{32});$$

$$L_{07} = \frac{i}{3} (A_{13}A^*_{12} + A_{23}A^*_{22} + A_{33}A^*_{32} - A_{12}A^*_{13} - A_{22}A^*_{23} - A_{32}A^*_{33});$$

$$L_{08}= \frac{1}{3\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{11}+ A_{21}A^*_{21}+ A_{31}A^*_{31}+ A_{12}A^*_{12}+ A_{22}A^*_{22}+ + A_{32}A^*_{32}- 2A_{13}A^*_{13}- 2A_{23}A^*_{23}- 2A_{33}A^*_{33});$$

$$L_{10}= \frac{1}{2}(A_{11}A^*_{21}+ A_{21}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{22}+ A_{22}A^*_{12}+ A_{13}A^*_{23}+ + A_{23}A^*_{13});$$

$$L_{11}= \frac{1}{2}(A_{11}A^*_{22}+ A_{21}A^*_{12}+ A_{12}A^*_{21}+ A_{22}A^*_{11});$$

$$L_{12}= \frac{i}{2}(A_{12}A^*_{21}+ A_{22}A^*_{11}- A_{11}A^*_{22}- A_{21}A^*_{12});$$

$$L_{13}= \frac{1}{2}(A_{11}A^*_{21}+ A_{21}A^*_{11}- A_{12}A^*_{22}- A_{22}A^*_{12});$$

$$L_{14}= \frac{1}{2}(A_{11}A^*_{23}+ A_{21}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{21}+ A_{23}A^*_{11});$$

$$L_{15}= \frac{i}{2}(A_{13}A^*_{21}+ A_{23}A^*_{11}- A_{11}A^*_{23}- A_{21}A^*_{13});$$

$$L_{16}= \frac{1}{2}(A_{12}A^*_{23}+ A_{22}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{22}+ A_{23}A^*_{12});$$

$$L_{17}= \frac{i}{2}(A_{13}A^*_{22}+ A_{23}A^*_{12}- A_{12}A^*_{23}- A_{22}A^*_{13});$$

$$L_{18}= \frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{21}+ A_{21}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{22}+ A_{22}A^*_{12}- 2A_{13}A^*_{23}+ - 2A_{23}A^*_{13});$$

$$L_{20}= \frac{i}{2}(A_{11}A^*_{21}- A_{21}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{22}- A_{22}A^*_{12}+ A_{13}A^*_{23}- - A_{23}A^*_{13});$$

$$L_{21}= \frac{i}{2}(A_{11}A^*_{22}- A_{21}A^*_{12}+ A_{12}A^*_{21}- A_{22}A^*_{11});$$

$$L_{22}= -\frac{1}{2}(A_{21}A^*_{12}+ A_{12}A^*_{21}- A_{11}A^*_{22}- A_{22}A^*_{11});$$

$$L_{23}= \frac{i}{2}(A_{11}A^*_{21}- A_{21}A^*_{11}- A_{12}A^*_{22}+ A_{22}A^*_{12});$$

$$L_{24}= \frac{i}{2}(A_{11}A^*_{23}- A_{21}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{21}- A_{23}A^*_{11});$$

$$L_{25}= -\frac{1}{2}(A_{21}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{21}- A_{11}A^*_{23}- A_{23}A^*_{11});$$

$$L_{26}= \frac{i}{2}\,(A_{12}A^*_{23}- A_{22}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{22}- A_{23}A^*_{12});$$

$$L_{27}= -\frac{1}{2}\,(A_{22}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{22}- A_{12}A^*_{23}- A_{23}A^*_{12});$$

$$L_{28}= \frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{21}- A_{21}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{22}- A_{22}A^*_{12}- 2A_{13}A^*_{23}+ + 2A_{23}A^*_{13}) \;;$$

$$L_{30}= \frac{1}{2}\,(A_{11}A^*_{11}- A_{21}A^*_{21}+ A_{12}A^*_{12}- A_{22}A^*_{22}+ A_{13}A^*_{13}+ - A_{23}A^*_{23});$$

$$L_{31}= \frac{1}{2}\,(A_{11}A^*_{12}- A_{21}A^*_{22}+ A_{12}A^*_{11}- A_{22}A^*_{21});$$

$$L_{32}= \frac{i}{2}\,(A_{21}A^*_{22}+ A_{12}A^*_{11}- A_{11}A^*_{12}- A_{22}A^*_{21});$$

$$L_{33}= \frac{1}{2}\,(A_{11}A^*_{11}- A_{21}A^*_{21}- A_{12}A^*_{12}+ A_{22}A^*_{22});$$

$$L_{34}= \frac{1}{2}\,(A_{11}A^*_{13}- A_{21}A^*_{23}+ A_{13}A^*_{11}- A_{23}A^*_{21});$$

$$L_{35}= \frac{i}{2}\,(-A_{11}A^*_{13}+ A_{21}A^*_{23}+ A_{13}A^*_{11}- A_{23}A^*_{21});$$

$$L_{36}= \frac{1}{2}\,(A_{12}A^*_{13}- A_{22}A^*_{23}+ A_{13}A^*_{12}- A_{23}A^*_{22});$$

$$L_{37}= \frac{i}{2}\,(-A_{12}A^*_{13}+ A_{22}A^*_{23}+ A_{13}A^*_{12}- A_{23}A^*_{22});$$

$$L_{38}= \frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{11}- A_{21}A^*_{21}+ A_{12}A^*_{12}- A_{22}A^*_{22}- 2A_{13}A^*_{13}+ + 2A_{23}A^*_{23});$$

$$L_{40}= \frac{1}{2}\,(A_{11}A^*_{31}+ A_{31}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{32}+ A_{32}A^*_{12}+ A_{13}A^*_{33}+ + A_{33}A^*_{13});$$

$$L_{41}= \frac{1}{2}\,(A_{11}A^*_{32}+ A_{31}A^*_{12}+ A_{12}A^*_{31}+ A_{32}A^*_{11});$$

$$L_{42}= \frac{i}{2}\,(-A_{11}A^*_{32}- A_{31}A^*_{12} + A_{12}A^*_{31}+ A_{32}A^*_{11});$$

$$L_{43}= \frac{1}{2}\,(A_{11}A^*_{31}+ A_{31}A^*_{11}- A_{12}A^*_{32}- A_{32}A^*_{12});$$

$$L_{44}= \frac{1}{2} (A_{11}A^*_{33}+ A_{31}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{31}+ A_{33}A^*_{11});$$

$$L_{45}= \frac{i}{2} (-A_{11}A^*_{33}- A_{31}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{31}+ A_{33}A^*_{11});$$

$$L_{46}= \frac{1}{2} (A_{12}A^*_{33}+ A_{32}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{32}+ A_{33}A^*_{12});$$

$$L_{47}= \frac{i}{2} (-A_{12}A^*_{33}- A_{32}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{32}+ A_{33}A^*_{12});$$

$$L_{48}= \frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{31}+ A_{31}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{32}+ A_{32}A^*_{12}- 2A_{13}A^*_{33}- \\ - 2A_{33}A^*_{13});$$

$$L_{50}= \frac{i}{2} (A_{11}A^*_{31}- A_{31}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{32}- A_{32}A^*_{12}+ A_{13}A^*_{33}- \\ - A_{33}A^*_{13});$$

$$L_{51}= \frac{i}{2} (A_{11}A^*_{32}- A_{31}A^*_{12}+ A_{12}A^*_{31}- A_{32}A^*_{11});$$

$$L_{52}= -\frac{1}{2} (-A_{11}A^*_{32}+ A_{31}A^*_{12}+ A_{12}A^*_{31}- A_{32}A^*_{11});$$

$$L_{53}= \frac{i}{2} (A_{11}A^*_{31}- A_{31}A^*_{11}- A_{12}A^*_{32}+ A_{32}A^*_{12});$$

$$L_{54}= \frac{i}{2} (A_{11}A^*_{33}- A_{31}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{31}- A_{33}A^*_{11});$$

$$L_{55}= -\frac{1}{2} (-A_{11}A^*_{33}+ A_{31}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{31}- A_{33}A^*_{11});$$

$$L_{56}= \frac{i}{2} (A_{12}A^*_{33}- A_{32}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{32}- A_{33}A^*_{12});$$

$$L_{57}= -\frac{1}{2} (A_{32}A^*_{13}+ A_{13}A^*_{32}- A_{12}A^*_{33}- A_{33}A^*_{12});$$

$$L_{58}= \frac{i}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{31}- A_{31}A^*_{11}+ A_{12}A^*_{32}- A_{32}A^*_{12}- 2A_{13}A^*_{33}+ \\ + 2A_{33}A^*_{13});$$

$$L_{60}= \frac{1}{2} (A_{21}A^*_{31}+ A_{31}A^*_{21}+ A_{22}A^*_{32}+ A_{32}A^*_{22}+ A_{23}A^*_{33}+ \\ + A_{33}A^*_{23});$$

$$L_{61}= \frac{1}{2} (A_{21}A^*_{32}+ A_{31}A^*_{22}+ A_{22}A^*_{31}+ A_{32}A^*_{21});$$

$$L_{62}=\frac{i}{2}\,(-A_{21}A^*_{32}-A_{31}A^*_{22}+A_{22}A^*_{31}+A_{32}A^*_{21});$$

$$L_{63}=\frac{1}{2}\,(A_{21}A^*_{31}+A_{31}A^*_{21}-A_{22}A^*_{32}-A_{32}A^*_{22});$$

$$L_{64}=\frac{1}{2}\,(A_{21}A^*_{33}+A_{31}A^*_{23}+A_{23}A^*_{31}+A_{33}A^*_{21});$$

$$L_{65}=\frac{i}{2}\,(-A_{21}A^*_{33}-A_{31}A^*_{23}+A_{23}A^*_{31}+A_{33}A^*_{21});$$

$$L_{66}=\frac{1}{2}\,(A_{22}A^*_{33}+A_{32}A^*_{23}+A_{23}A^*_{32}+A_{33}A^*_{22});$$

$$L_{67}=\frac{i}{2}\,(-A_{22}A^*_{33}-A_{32}A^*_{23}+A_{23}A^*_{32}+A_{33}A^*_{22});$$

$$L_{68}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{21}A^*_{31}+A_{31}A^*_{21}+A_{22}A^*_{32}+A_{32}A^*_{22}-2A_{33}A^*_{23}-$$
$$-2A_{23}A^*_{33});$$

$$L_{70}=\frac{i}{2}\,(A_{21}A^*_{31}-A_{31}A^*_{21}+A_{22}A^*_{32}-A_{32}A^*_{22}+A_{23}A^*_{33}-$$
$$-A_{33}A^*_{23});$$

$$L_{71}=\frac{i}{2}\,(A_{21}A^*_{32}-A_{31}A^*_{22}+A_{22}A^*_{31}-A_{32}A^*_{21});$$

$$L_{72}=-\frac{1}{2}\,(-A_{21}A_{32}+A_{31}A^*_{22}+A_{22}A^*_{31}-A_{32}A^*_{21});$$

$$L_{73}=\frac{i}{2}\,(A_{21}A^*_{31}-A_{31}A^*_{21}-A_{22}A^*_{32}+A_{32}A^*_{22});$$

$$L_{74}=\frac{i}{2}\,(A_{21}A^*_{33}-A_{31}A^*_{23}+A_{23}A^*_{31}-A_{33}A^*_{21});$$

$$L_{75}=-\frac{1}{2}(-A_{21}A^*_{33}+A_{31}A^*_{23}+A_{23}A^*_{31}-A_{33}A^*_{21});$$

$$L_{76}=\frac{i}{2}\,(A_{22}A^*_{33}-A_{32}A^*_{23}+A_{23}A^*_{32}-A_{33}A^*_{22});$$

$$L_{77}=-\frac{1}{2}\,(-A_{22}A^*_{33}+A_{32}A^*_{23}+A_{23}A^*_{32}-A_{33}A^*_{22});$$

$$L_{78}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{21}A^*_{31}-A_{31}A^*_{21}+A_{22}A^*_{32}-A_{32}A^*_{22}-2A_{23}A^*_{33}+$$
$$+2A_{33}A^*_{23});$$

$$L_{80}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{11}+A_{21}A^*_{21}-2A_{31}A^*_{31}+A_{12}A^*_{12}+A_{22}A^*_{22}-$$
$$-2A_{32}A^*_{32}+A_{13}A^*_{13}+A_{23}A^*_{23}-2A_{33}A^*_{33});$$

$$L_{81}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{12}+A_{21}A^*_{22}-2A_{31}A^*_{32}+A_{12}A^*_{11}+A_{22}A^*_{21}-$$
$$-2A_{32}A^*_{31});$$

$$L_{82}=\frac{i}{2\sqrt{3}}(-A_{11}A^*_{12}-A_{21}A^*_{22}+2A_{31}A^*_{32}+A_{12}A^*_{11}+A_{22}A^*_{21}-$$
$$-2A_{32}A^*_{31});$$

$$L_{83}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{11}+A_{21}A^*_{21}-2A_{31}A^*_{31}-A_{12}A^*_{12}-A_{22}A^*_{22}+$$
$$+2A_{32}A^*_{32});$$

$$L_{84}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{11}A^*_{13}+A_{21}A^*_{23}-2A_{31}A^*_{33}+A_{13}A^*_{11}+A_{23}A^*_{21}-$$
$$-2A_{33}A^*_{31});$$

$$L_{85}=\frac{i}{2\sqrt{3}}(-A_{11}A^*_{13}-A_{21}A^*_{23}+2A_{31}A^*_{33}+A_{13}A^*_{11}+A_{23}A^*_{21}-$$
$$-2A_{33}A^*_{31});$$

$$L_{86}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(A_{12}A^*_{13}+A_{22}A^*_{23}-2A_{32}A^*_{33}+A_{13}A^*_{12}+A_{23}A^*_{22}-$$
$$-2A_{33}A^*_{32});$$

$$L_{87}=\frac{i}{2\sqrt{3}}(-A_{12}A^*_{13}-A_{22}A^*_{23}+2A_{32}A^*_{33}+A_{13}A^*_{12}+A_{23}A^*_{22}-$$
$$-2A_{33}A^*_{32});$$

$$L_{88}=\frac{1}{6}(A_{11}A^*_{11}+A_{21}A^*_{21}-2A_{31}A^*_{31}+A_{12}A^*_{12}+A_{22}A^*_{22}-$$
$$-2A_{32}A^*_{32}-2A_{13}A^*_{13}-2A_{23}A^*_{23}+4A_{33}A^*_{33}).$$

Поступила в ред.-изд.отд.
19 июня 1990 года