СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 135

УДК 517.948:530,1:539.12

К ТЕОРИИ БИНАРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР РАНГА (5,5;б) И ВЫШЕ

А.В.Соловьёв

Введение

Данная работа выполнена в русле идей бинарной геометрофизики [1,2] и имеет своей целью исследование комплексифицированных бинарных структур более высокого ранга по сравнению с изучавшимися ранее физическими структурами рангов: (2,2), (3,3;б) и (4,4;б). Наряду с рассмотрением некоторых общих свойств бинарных структур типа "б", значительное внимание уделено характерным особенностям, возникающим в теории структуры ранга (5,5;б). Напомним [3], что при $n \geq 1$ закон структуры ранга ($n+1, n+1$;б) записывается в виде равенства нулю определителя $(n+1)$-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \dots & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & \dots & a_{l\gamma} & a_{l\delta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где парные отношения между элементами множеств $\mathfrak{M} = \{i, k, \dots, j, \dots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \dots, \gamma, \dots\}$ выражаются следующим образом:

$$a_{i\alpha} = \sum_{r=1}^{n} i^r \alpha^r . \tag{2}$$

Здесь i^r и α^r - по n комплексных параметров, поставленных в соответствие элементам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ соответственно. Для определенности, в дальнейшем будем предполагать, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - линейные пространства. Тогда параметры элементов можно интерпретировать как координаты относительно некоторых базисов, выбранных в этих пространствах. Тем самым $i^r, \alpha^r, \ldots$ превращаются в векторы $\mathbb{C}^n$. Последние будут играть ключевую роль во всех дальнейших построениях.

§1. Бинарная структура ранга $(n+1, n+1; б)$ и финслерова геометрия

Как обычно, назовем фундаментальным $m \times m$-отношением $(1 \le m \le n)$ между $\{i, k, \ldots, j\} \in \mathfrak{M}^m$ и $\{\alpha, \beta, \ldots \ldots, \gamma\} \in \mathfrak{N}^m$ величину минора m-го порядка, расположенного в левом верхнем углу определителя (1). В бинарной геометрофизике особое место занимают фундаментальные $n \times n$-отношения, которые, как нетрудно убедиться, всегда могут быть представлены в виде:

$$\begin{bmatrix} ik\ldots j \\ \alpha\beta\ldots\gamma \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \ldots & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \ldots & a_{k\gamma} \\ \ldots & & \ldots & \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \ldots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & \ldots & j^1 \\ i^2 & k^2 & \ldots & j^2 \\ \ldots & & \ldots & \\ i^n & k^n & \ldots & j^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \ldots & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \ldots & \gamma^2 \\ \ldots & & \ldots & \\ \alpha^n & \beta^n & \ldots & \gamma^n \end{vmatrix} . \tag{3}$$

Во-первых, они являются отличными от нуля минорами максимально возможного порядка (так называемыми базисными минорами), т.е. выделены чисто алгебраически. Во-вторых, - и это главное - анализ показывает, что среди всех фундаментальных отношений $n \times n$-отношения инвариантны относительно наиболее широкой группы линейных преобразований параметров элементов. А именно: преобразования

$$i'^r = A^r_s i^s, \quad \alpha'^r = \tilde{A}^r_s \alpha^s \qquad (A^r_s, \tilde{A}^r_s \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

сохраняют (3) неизменным в том и только в том случае, если выполняются условия $\det A = \det \tilde{A} = 1$, где $A \equiv \|A^r_s\|$, $\tilde{A} \equiv \equiv \|\tilde{A}^r_s\|$. Отсюда следует, что $A, \tilde{A} \in SL(n, \mathbb{C})$.

Унимодулярность преобразований (4), очевидно, равносильна существованию инвариантных n-точечных "скалярных произведений":

$$\left.\begin{aligned} (i,k,\ldots,j) &= \varepsilon_{rs\ldots p} i^r k^s \ldots j^p \;; \\ (\alpha,\beta,\ldots,\gamma) &= \varepsilon_{rs\ldots p} \alpha^r \beta^s \ldots \gamma^p \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(сравните с определителями, стоящими в (3) справа). Здесь через $\varepsilon_{rs\ldots p}$ обозначен n-мерный символ Леви-Чивиты, выполняющий функции антисимметричного метрического тензора в пространстве $\mathbb{C}^n$. С его помощью путем образования сверток контравариантным тензорам можно сопоставлять ковариантные, т.е. в некотором смысле опускать индексы. При $n > 2$ эта процедура, вообще говоря, приводит к изменению ранга тензора.

В бинарной геометрофизике наибольший интерес представляет случай, когда $\tilde{A}^r_s = (A^r_s)^*$, а элементы множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ находятся "в парах", т.е.

$$\alpha^r = (i^r)^*, \ \beta^r = (k^r)^*, \ldots, \ \gamma^r = (j^r)^* \,. \tag{6}$$

Далее всюду эти соотношения будем предполагать выполненными. Рассмотрим контравариантный тензор над $\mathbb{C}^n$ с одним обычным и одним пунктирным индексами, построенный из параметров $2n$ элементов согласно формуле:

$$b^{r\dot{s}} = i^r\alpha^{\dot{s}} + k^r\beta^{\dot{s}} + \ldots + j^r\gamma^{\dot{s}}. \tag{7}$$

Отметим сразу, что имеет место одно замечательное соотношение, в справедливости которого легко убедиться непосредственным вычислением:

$$\begin{bmatrix} ik & \ldots & j \\ \alpha\beta & \ldots & \gamma \end{bmatrix} = \det B. \tag{8}$$

Здесь введено новое обозначение: $B \equiv \|b^{r\dot{s}}\|$. Как известно, закон преобразования тензора типа((7) записывается следующим образом; $b'^{r\dot{s}} = A^r_p \overset{*}{A}{}^{\dot{s}}_{\dot{q}} b^{p\dot{q}}$ или, в более удобной для дальнейших приложений, матричной форме:

$$B' = ABA^+, \tag{9}$$

где "+" означает эрмитово сопряжение. Напомним, что $A \in SL(n,\mathbb{C})$, и перепишем (9) символически в виде: $B' = \hat{L}(A)B$. Поскольку из (6) и (7) непосредственно следует, что $B^+ = B$, а эрмитовы матрицы n-го порядка образуют n^2-мерное вещественное линейное пространство, то $\hat{L}(A)$ можно рассматривать как оператор, действующий в этом пространстве. В силу самого своего определения он, очевидно, обладает свойствами:

1) $\hat{L}(A)$ - линейный оператор;
2) $\hat{L}(A)$ переводит эрмитовы матрицы в эрмитовы;
3) $\hat{L}(A_1A_2) = \hat{L}(A_1)\hat{L}(A_2)$.

На языке теории групп это означает, что отображение $T: A \mapsto$

$\mapsto \hat{L}(A)$, ставящее в соответствие каждой унимодулярной матрице A преобразование (9), является n^2-мерным линейным представлением группы $SL(n,\mathbb{C})$.

Зафиксируем теперь в пространстве эрмитовых матриц некоторый базис. В качестве элементов последнего всегда можно выбрать единичную матрицу I и систему таких n-рядных матриц τ^a, $a=\overline{1,n^2-1}$., что $tr\,\tau^a = 0$. При $n = 2$ это, например, могут быть матрицы Паули [1], при $n = 3$ - матрицы Гелл-Манна [2] и так далее. Таким образом, получаем следующее разложение:

$$B = p_0 I + p_a \tau^a, \tag{10}$$

где $p_\mu \in \mathbb{R}$, $\mu = \overline{0,n^2-1}$. Обозначим через $L = \|L^{\nu}_{\mu\cdot}\|$ матрицу оператора $L(A)$ в базисе $\{I,\tau^a\}$. Тогда преобразование (9) в координатной записи будет иметь вид:

$$p'_\mu = L^{\nu}_{\mu\cdot}\, p_\nu \quad . \tag{11}$$

Все $L^{\nu}_{\mu\cdot}$ здесь, очевидно, вещественны. Тем самым каждому преобразованию (4) над вектором из $\mathbb{C}^n$ отвечает вполне определенное линейное преобразование (11). Поскольку согласно формуле (10) $b^{r\dot{s}}$ выражаются через p_μ линейно, то $\det B$ автоматически оказывается алгебраической формой n-й степени относительно координат p_μ:

$$\det B = s^n(p) \equiv G^{\mu\nu\ldots\lambda} p_\mu p_\nu \ldots p_\lambda , \tag{12}$$

где явный вид $G^{\mu\nu\ldots\lambda}$ определяется выбором матриц τ^a. Кроме того, при $A\in SL(n,\mathbb{C})$ имеют место следующие равенства: $\det B' = \det A \det B \det A^{+} = \det B$, означающие, что $s^n(p)$ инвариантна относительно преобразований (9), а значит, и (11). Следует отметить, что в силу условий (6) фундаментальное

$n \times n$ -отношение (3) является неотрицательной величиной. Учитывая формулу (8), получаем окончательно:

$$\begin{bmatrix} ik\ldots j \\ \alpha\beta\ldots\gamma \end{bmatrix} = s^n(p) \geq 0. \tag{13}$$

Остается еще только заметить, что в соответствии с правилом частного коэффициенты $G^{\mu\nu\ldots\lambda}$ образуют тензор n-го ранга относительно преобразований (11). Все это позволяет интерпретировать (12) как метрическую функцию n^2-мерного вещественного пространства, элементами которого являются p_μ. Известно [4], что геометрии такого типа относятся к классу финслеровых. Итак, согласно (13) фундаментальное $n \times n$-отношение структуры ранга $(n+1, n+1; 6)$ имеет смысл финслеровой метрики. При $n = 2$ получаем обычное псевдоевклидово пространство с сигнатурой $(+ - - -)$ [1]. Случай $n = 3$ подробно рассмотрен в работе [2].

Определенный интерес представляют важные для приложений группы $SU(n) \subset SL(n, \mathbb{C})$. Пусть в формулах (4) $A \in SU(n)$, т.е.

$$A^+ = A^{-1}, \quad \det A = 1 . \tag{14}$$

Тогда (9), очевидно, перепишется в следующем виде: $B' = ABA^{-1}$. Таким образом, получаем еще один инвариант - $\mathrm{tr}B' = \mathrm{tr}B$. Поскольку в (10) все матрицы τ^a бесследовые, то $\mathrm{tr}\, B = np_0$. Отсюда вытекает, что при $A \in SU(n)$ преобразования (11) сохраняют p_0 неизменной: $p_0' = p_0$. В случае $n = 2$ они соответствуют 3-мерным пространственным поворотам, а при $n > 2$ являются их аналогами.

§2. Бинарная структура ранга (5,5;6) и группа O(6)

Сосредоточим теперь свое внимание на структуре ранга (5,5;6), поскольку она обладает особыми свойствами, не имеющими аналогов в теории структур меньших рангов. Согласно формуле (2) при $n = 4$ парное отношение между элементами i и α имеет вид: $a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3 + i^4\alpha^4$, где i^r, α^r - комплексные параметры. В дальнейшем все рассуждения будут существенно опираться на $SL(4,\mathbb{C})$-инвариантные "скалярные произведения", которые в соответствии с (5) записываются следующим образом:

$$(i,k,j,l)=\varepsilon_{rspq}i^r k^s j^p l^q; \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\varepsilon_{rspq}\alpha^r\beta^s\gamma^p\delta^q.$$

Ограничимся рассмотрением элементов множества $\mathfrak{M}$ (для элементов множества $\mathfrak{N}$ все рассуждения совершенно аналогичны). Прежде всего заметим, что, используя, например, теорему Лапласа, (i,k,j,l) можно представить в виде

$$\begin{aligned}(i,k,j,l)=&b^{12}(i,k)b^{34}(j,l)+b^{14}(i,k)b^{23}(j,l)+\\&+b^{13}(i,k)b^{42}(j,l)+b^{23}(i,k)b^{14}(j,l)+\\&+b^{42}(i,k)b^{13}(j,l)+b^{34}(i,k)b^{12}(j,l),\end{aligned} \quad (15)$$

где для удобства введены следующие обозначения:

$$b^{rs}(i,k)\equiv\begin{vmatrix} i^r & k^r \\ i^s & k^s \end{vmatrix}, \quad b^{rs}(j,l)\equiv\begin{vmatrix} j^r & l^r \\ j^s & l^s \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Величины (16), очевидно, являются бивекторными (антисимметричными тензорами 2-го ранга) относительно преобразований (4), а при $n = 4$ бивекторы, как известно, образуют 6-мерное комплексное линейное пространство. Таким образом, (15) представляет собой симметричную билинейную форму на бивекторах. Совершим невырожденное линейное преобразование от переменных $b^{rs}(i,k)$ к переменным x^a, т.е., иными словами, перейдем к новому базису в пространстве бивекторов:

$$\left.\begin{array}{l} b^{12}(i,k)=x^1+ix^2,\ b^{34}(i,k)=x^1-ix^2, \\ b^{23}(i,k)=x^3+ix^4,\ b^{14}(i,k)=x^3-ix^4, \\ b^{13}(i,k)=x^5+ix^6,\ b^{42}(i,k)=x^5-ix^6, \end{array}\right\} \qquad (17)$$

и аналогично для переменных $b^{rs}(j,l)$ и y^a .Нетрудно видеть, что преобразование (17) приводит билинейную форму (i,k,j,l) к диагональному виду:

$$(i,k,j,l) = 2\sum_{a=1}^{6} x^a y^a . \qquad (18)$$

Необходимо помнить, что x^a и y^a , вообще говоря, являются комплексными величинами. На самом деле (17) можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^1=b^{12}(i,k)+b^{34}(i,k),\ 2ix^2=b^{12}(i,k)-b^{34}(i,k), \\ 2x^3=b^{23}(i,k)+b^{14}(i,k),\ 2ix^4=b^{23}(i,k)-b^{14}(i,k), \\ 2x^5=b^{13}(i,k)+b^{42}(i,k),\ 2ix^6=b^{13}(i,k)-b^{42}(i,k). \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Поскольку $b'^{rs}(i,k)=A^r_p A^s_q b^{pq}(i,k)$, то в силу (17) и (19) каждой матрице **A** из (4) отвечает вполне определенное линейное преобразование вектора x^a :

$$x'^a = \Lambda^a_b x^b, \quad a,b = \overline{1,6}. \qquad (20)$$

Явный вид элементов матрицы $\Lambda \equiv \|\Lambda^a_b\|$ можно определить с помощью соотношений (19) и легко проверяемой, но довольно громоздкой формулы:

$$b'^{rs}(i,k) \pm b(i,k) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} A^r_1 & A^r_2 \\ A^s_1 & A^s_2 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_1 & A^p_2 \\ A^q_1 & A^q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^r_3 & A^r_4 \\ A^s_3 & A^s_4 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_3 & A^p_4 \\ A^q_3 & A^q_4 \end{vmatrix} \right) x^1 +$$

$$+ i\left(\begin{vmatrix} A^r_1 & A^r_2 \\ A^s_1 & A^s_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^p_1 & A^p_2 \\ A^q_1 & A^q_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^r_3 & A^r_4 \\ A^s_3 & A^s_4 \end{vmatrix} \mp \begin{vmatrix} A^p_3 & A^p_4 \\ A^q_3 & A^q_4 \end{vmatrix} \right) x^2 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} A^r_2 & A^r_3 \\ A^s_2 & A^s_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_2 & A^p_3 \\ A^q_2 & A^q_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^r_1 & A^r_4 \\ A^s_1 & A^s_4 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_1 & A^p_4 \\ A^q_1 & A^q_4 \end{vmatrix} \right) x^3 +$$

$$+ i\left(\begin{vmatrix} A^r_2 & A^r_3 \\ A^s_2 & A^s_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_2 & A^p_3 \\ A^q_2 & A^q_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^r_1 & A^r_4 \\ A^s_1 & A^s_4 \end{vmatrix} \mp \begin{vmatrix} A^p_1 & A^p_4 \\ A^q_1 & A^q_4 \end{vmatrix} \right) x^4 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} A^r_1 & A^r_3 \\ A^s_1 & A^s_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_1 & A^p_3 \\ A^q_1 & A^q_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^r_4 & A^r_2 \\ A^s_4 & A^s_2 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_4 & A^p_2 \\ A^q_4 & A^q_2 \end{vmatrix} \right) x^5 +$$

$$+ i\left(\begin{vmatrix} A^r_1 & A^r_3 \\ A^s_1 & A^s_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} A^p_1 & A^p_3 \\ A^q_1 & A^q_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^r_4 & A^r_2 \\ A^s_4 & A^s_2 \end{vmatrix} \mp \begin{vmatrix} A^p_4 & A^p_2 \\ A^q_4 & A^q_2 \end{vmatrix} \right) x^6 . \qquad (21)$$

Как уже отмечалось, (i,k,j,l) является инвариантом относительно преобразований (4), принадлежащих группе $SL(4,\mathbb{C})$. Из этого факта, а также из формулы (18) непосредственно следует, что при $A \in SL(4,\mathbb{C})$ матрица Λ удовлетворяет условиям

$$(\Lambda^{T})^a_b \, \Lambda^b_c = \delta^a_c \Leftrightarrow \Lambda^{T}\Lambda = I ,$$

т.е., иными словами, $\Lambda \in O(6,\mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $A \in SU(4)$. Прежде всего перепишем соотношения (14) в несколько ином виде:

$$A^{r}_{s} = (A^{r}_{s})^{*} , \qquad (22)$$

где A^r_s - алгебраическое дополнение элемента A^r_s. Напомним [5], что имеет место важная формула, выражающая миноры обратной матрицы через миноры такого же порядка исходной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A^{i_1}_{k_1} & A^{i_1}_{k_2} \\ A^{i_2}_{k_1} & A^{i_2}_{k_2} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+k_1+k_2} \begin{vmatrix} A^{\bar{i}_1}_{\bar{k}_1} & A^{\bar{i}_1}_{\bar{k}_j} \\ A^{\bar{i}_2}_{k_1} & A^{\bar{i}_2}_{k_2} \end{vmatrix} . \tag{23}$$

Здесь $i_1 < i_2$ вместе с $\bar{i}_1 < \bar{i}_2$, а $k_1 < k_2$ вместе с $\bar{k}_1 < \bar{k}_2$ образуют полную систему индексов: 1,2,3,4. Используя последовательно соотношения (22), формулы (21),(23) и (19), приходим к выводу, что все элементы Λ^a_b вещественны, т.е. $\Lambda \in O(6)$. Таким образом, каждое унитарное преобразование (4) индуцирует вещественный ортогональный поворот (20) 6-вектора x^a. Полученный результат находится в полном соответствии с известным из теории представлений групп фактом двулистного накрытия [6] $\chi : SU(4) \to SO(6)$.

В заключение следует отметить, что аналогичные рассуждения справедливы и в общем случае структуры ранга $(n+1, n+1; 6)$, где $n = 4k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Однако уже при $k = 2$ размерность пространства векторов x^a оказывается равной 70, и все соотношения приобретают чрезвычайно громоздкий вид.

Заключение

В данной работе рассмотрены математические аспекты теории комплексифицированных бинарных структур ранга (5,5;б) и выше. Не обсуждались, однако, их возможные физические приложения. Согласно идеям бинарной геометрофизики, развиваемой в группе

Ю.С.Владимирова, структура ранга (4,4;а) ответственна за электрослабые взаимодействия, структуры ранга (4,4;б) и (5,5;а) позволяют описывать элементы теории сильных взаимодействий (хромодинамики). Если этот ряд можно продлить и далее,то следует ожидать [7, с.55], что теория структуры ранга (5,5;б) окажется полезной для описания нового типа фундаментальных физических взаимодействий.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) //Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. - Новосибирск. - 1988. -Вып.125: Вычислительные системы. -С. 42-60.

2. ВЛАДИМИРОВ Ю.С., СОЛОВЬЕВ А.В. Физическая структура ранга (4,4;б) и трехкомпонентные спиноры //Настоящий сб. - С. 44-66.

3. КУЛАКОВ Ю.И. О теории физических структур //Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теорий функций. - Л.: Наука, 1983. -Т. 127, вып. 15. -С. 103-151. (Зап. научных семинаров ЛОМИ.)

4. АСАНОВ Г.С., ПОНОМАРЕНКО С.Ф.Финслерово расслоение над пространством-временем,ассоциируемые калибровочные поля и связности. - Кишинёв: Штиинца, 1989.

5. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. -М.: Наука, 1988.

6. ПОСТНИКОВ М.М. Группы и алгебры Ли. - М.: Наука, 1982.

7. ВЛАДИМИРОВ Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. -М.: Наука, 1989.

Поступила в ред.-изд.отд.

24 июля 1990 года