СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 135

УДК 517.948

ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (4,2)

В.Х. Лев

В теории физических структур, разрабатываемой Ю.И.Кулаковым и его учениками,исследуется вопрос о существовании и единственности физических структур, определенных на одном, двух и более множествах физических объектов [1,4].

Задача о существовании физических структур на двух множествах полностью решена Г.Г. Михайличенко в его диссертации. Им же были исследованы физические структуры ранга $r = 3$, $r = 4$, определенные на одном множестве. При решении этих задач применялся разработанный им специальный функциональный метод.Но решить вопрос о существовании структур на одном множестве ранга $r > 4$ функциональным методом не удалось.

Для исследования физических структур на одном множестве ранга $r > 4$ автором разработан общий параметрический метод, который является достаточно универсальным. С его помощью можно исследовать структуры, определенные на двух и более множествах [5]. Применение параметрического метода позволило внести интересные уточнения, связанные с единственностью решения для структур ранга (r,r), определенных на двух множествах.

В данной работе этим методом исследуется физическая структура ранга (4,2) и дается геометрическая интерпретация полученных результатов.

Приведем краткую постановку задачи.Пусть имеются два множества объектов $\mathfrak{M} = \{i,k,\ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha,\beta,\ldots\}$. Выберем из множества $\mathfrak{M}$ любые четыре элемента, а из $\mathfrak{N}$ - любые два элемента. Поставим в соответствие каждой паре элементов (по одному из каждого множества) (i,α) вещественное число $f(i\alpha)$. Всего таких чисел будет восемь.

Будем говорить, что элементы множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ находятся в отношении феноменологической симметрии (или существует физическая структура ранга (4,2)), если имеет место зависимость:

$$\Phi[f(i\alpha),f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta),\\ f(k\alpha),f(k\beta),f(l\alpha),f(l\beta)]=0 \qquad (1)$$

для $\forall i,j,k,l\in\mathfrak{M}$ и $\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{N}$. На множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и функции f и Φ вводятся достаточно естественные ограничения.

1. Множеству $\mathfrak{M}$ соответствует многообразие размерности m; множеству $\mathfrak{N}$ соответствует многообразие размерности n.

В [6,7] показано, что содержательными задачами в теории физических структур являются те, для которых выполняются условия: $m=s-1$, $n=r-1$, где (r,s) и есть ранг физической структуры; т.е. в рассматриваемом случае $m=1$; $n=3$.

Таким образом,это требование означает, что каждый элемент множества $\mathfrak{M}$ характеризуется одним параметром $(i)\to x_i$, а элемент из $\mathfrak{N}$ - тремя параметрами $(\alpha)\to\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha$. Двухточечная функция $f(i\alpha)$ имеет локальное координатное представление в виде:

$$f(i\alpha)=f(x_i,\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha).$$

2. Функция $f(i\alpha)$ - гладкая класса C^k (где k - достаточно большое) и существенным образом зависящая от своих координат (по Эйзенхарту [8,с.16]).

3. Функция Φ - достаточно гладкая, и $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$. Рассмотрим соотношение (1). Продифференцируем его по всем десяти параметрам $x_i,x_j,x_k,x_l,\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha,\xi_\beta,\eta_\beta,\zeta_\beta$. Получаем систему из десяти уравнений относительно восьми частных произ-

водных функции Φ по каждому аргументу. Матрица коэффициентов имеет следующий вид:

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c}
f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(l\alpha) & f_x(l\beta) \\
f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 & f_\xi(l\alpha) & 0 \\
f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 & f_\eta(l\alpha) & 0 \\
f_\zeta(i\alpha) & 0 & f_\zeta(j\alpha) & 0 & f_\zeta(k\alpha) & 0 & f_\zeta(l\alpha) & 0 \\
\hdashline
0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) & 0 & f_\xi(l\beta) \\
0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(j\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) & 0 & f_\eta(l\beta) \\
0 & f_\zeta(i\beta) & 0 & f_\zeta(j\beta) & 0 & f_\zeta(k\beta) & 0 & f_\zeta(l\beta)
\end{array}\right\|, \qquad (2)$$

где

$$f_x(i\alpha)=\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}; \quad f_x(j\alpha)=\frac{\partial f(j\alpha)}{\partial x_j};$$

$$f_\xi(i\alpha)=\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha}; \quad f_\xi(i\beta)=\frac{\partial f(i\beta)}{\partial \xi_\beta}$$

и т.д.

Так как по третьей аксиоме в постановке задачи $\mathrm{grad}\,\Phi \neq 0$, то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, ранг матрицы (2) меньше восьми. Можно показать, что определитель седьмого порядка, отмеченный пунктиром в (2), не равен нулю, т.е. ранг матрицы (2) равен семи. Выпишем все три окаймляющие его определителя восьмого порядка, равные нулю. Расскрывая их по первому столбцу и фиксируя элементы j, k,

α, β, получим систему из трех уравнений относительно функции $f(i\alpha)$:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i} B_\mu(i) + \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha} C^1_\mu(\alpha) + \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \eta_\alpha} C^2_\mu(\alpha) + \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \zeta_\alpha} C^3_\mu(\alpha) = 0, \tag{3}$$

где $\mu = 1,2,3$; $B_\mu(i) = B_\mu(x_i)$, $C^1_\mu(\alpha) = C^1_\mu(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)$ и т.д. Можно показать, что ранг системы равен трем, т.е. все уравнения линейно-независимы.

Решаем первое уравнение методом характеристик:

$$\frac{dx_i}{B_1(i)} = \frac{d\xi_\alpha}{C^1_1(\alpha)} = \frac{d\eta_\alpha}{C^2_1(\alpha)} = \frac{d\zeta_\alpha}{C^3_1(\alpha)} .$$

Его интегралы: $\psi_1(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) = k_1$; $\psi_2(\alpha) = k_2$; $\varphi_1(i) - \psi_3(\alpha) = k_3$. Делаем замену переменных: $k_1 = y_1$; $k_2 = y_2$; $k_3 = y_3$; $x = y_0$. Тогда из первого уравнения $f_{y_0}(i\alpha) = 0$, а второе и третье уравнения системы (3) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} & f_{y_3}[A_1(x_i) - R_3(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)] + f_{y_1} R_1(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) + \\ & \qquad + f_{y_2} R_2(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) = 0, \\ & f_{y_3}[A_2(x_i) - R_6(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)] + f_{y_1} R_4(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) + \\ & \qquad + f_{y_2} R_5(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$f_{y_1} = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_1}; \quad f_{y_2} = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_2}; \quad f_{y_3} = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_3} .$$

Для удобства перейдем к переменным $\bar{x}_i = \varphi_1(i)$; $\bar{\xi}_\alpha = \psi_1(\alpha)$; $\bar{\eta}_\alpha = \psi_2(\alpha)$; $\bar{\zeta}_\alpha = \psi_3(\alpha)$. Тогда $f(i\alpha) = f(\bar{\xi}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha, \bar{x}_i - \bar{\zeta}_\alpha)$. В дальнейшем штрихи и индексы у перемен - ных опускаем.

Рассмотрим первое уравнение системы (4). Продифференциру - ем его по x, затем его же по ζ и сложим полученные соот - ношения. Получаем

$$f_{y_1} R_{1\zeta} + f_{y_2} R_{2\zeta} + f_{y_3}(A_{1x} - R_{3\zeta}) = 0. \tag{5}$$

Такую же процедуру проделаем и с полученным уравнением. Получаем:

$$f_{y_1} R_{1\zeta\zeta} + f_{y_2} R_{2\zeta\zeta} + f_{y_3}(A_{1xx} - R_{3\zeta\zeta}) = 0. \tag{6}$$

Полученные два соотношения вместе с первым уравнением системы (4) образуют систему уравнений относительно трех "неизвестных" f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_3}. Так как ни одно из неизвестных не равно нулю (по второй аксиоме в постановке задачи), то определитель, сос - тавленный из коэффициентов системы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} R_1 & R_2 & A_1 - R_3 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} & A_{1x} - R_{3\zeta} \\ R_1 & R_{2\zeta\zeta} & A_{1xx} - R_{3\zeta\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем его по третьему столбцу:

$$A_1 \begin{vmatrix} R_{1\zeta} & R_{2\zeta} \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} \end{vmatrix} - A_{1x} \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} \end{vmatrix} + A_{1xx} \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} & R_{3\zeta} \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} & R_{3\zeta\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Фиксируя переменные ξ, η, ζ, получаем

$$a_0 A_{1xx} + a_1 A_{1x} + a_2 A_1 = h_0 . \qquad (7)$$

Здесь возможны два случая:

1) все коэффициенты равны нулю;

2) не все коэффициенты равны нулю.

<u>Рассмотрим случай 1</u>. Пусть $a_0 = a_1 = a_2 = h_0 = 0.$ Рассмотрим

$$a_0 = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $\dfrac{R_{1\zeta}}{R_1} = \dfrac{R_{2\zeta}}{R_2}$. Решая, получаем: $R_2 = \Theta_1(\xi,\eta) R_1 = \Theta_1(y_1, y_2) R_1$. Подставляя значение R_2 в первое уравнение системы (4) и сокращая на R_1, имеем:

$$f_{y_1} + f_{y_2}\Theta_1(y_1,y_2) + f_{y_3}\left[A_1 \frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1}\right] = 0 .$$

Отсюда

$$A_1 \frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} = \chi\,(\underbrace{\xi}_{y_1}, \underbrace{\eta}_{y_2}, \underbrace{x-\zeta}_{y_3}).$$

Это функциональное уравнение легко решается:

$$\chi = \Theta_2(y_1,y_2)\exp k_1 y_3 - \Theta_3(y_1,y_2).$$

Подставляя χ в первое уравнение, получаем:

$$f_{y_1}+f_{y_2}\theta_1(y_1,y_2)+f_{y_3}[\theta_2(y_1,y_2)\exp k_1 y_3 - \\ - \theta_3(y_1,y_2)] = 0. \qquad (8)$$

Рассмотрим случай 2. Не все коэффициенты a_0, a_1, a_2, h_0 равны нулю.

Умножим первое уравнение системы (4) на a_2, (5) – на a_1, (6) – на a_0 и сложим их. Учитывая (7), получаем:

$$f_{y_1}[a_2R_1+a_1R_{1\zeta}+a_0R_{1\zeta\zeta}]+f_{y_2}[a_2R_2+a_1R_{2\zeta}+a_0R_{2\zeta\zeta}] + \\ + f_{y_3}[h_0-(a_2R_3+a_1R_{3\zeta}+a_0R_{3\zeta\zeta})] = 0.$$

Если не все скобки равны нулю, то производим деление, например, на скобку при f_{y_1}, получаем:

$$f_{y_1}+f_{y_2}\Phi_1(\xi,\eta,\zeta)+f_{y_3}\Phi_2(\xi,\eta,\zeta) = 0.$$

Можно показать, что такое уравнение ведет к потере существенного аргумента, что не допускается по аксиоме 2 в постановке задачи, т.е. все скобки равны нулю, и окончательно имеем:

$$\left.\begin{array}{l} a_0A_{1xx}+a_1A_{1x}+a_2A_1= h_0;\ a_0R_{1\zeta\zeta}+a_1R_{1\zeta}+a_2R_1=0; \\ a_0R_{3\zeta\zeta}+a_1R_{3\zeta}+a_2R_3= h_0;\ a_0R_{2\zeta\zeta}+a_1R_{2\zeta}+a_2R_2=0. \end{array}\right\} \quad (*)$$

В общем случае можно считать, что ни один из коэффициентов a_0, a_1, a_2, h_0 не равен нулю. При равенстве нулю одного из коэффициентов получающиеся решения будут являться частными случаями общего решения. Пусть $\underline{\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \neq 0}$. Из (*) находим:

$$A_1= c_1\exp k_1x + c_2\exp k_2x + h_0/a_2;$$

$$R_1= \phi_1(\xi,\eta)\exp k_1\zeta + \phi_2(\xi,\eta)\exp k_2\zeta;$$

$$R_2 = \psi_3(\xi,\eta)\exp k_1\zeta + \psi_4(\xi,\eta)\exp k_2\zeta;$$

$$R_3 = \psi_5(\xi,\eta)\exp k_1\zeta + \psi_6(\xi,\eta)\exp k_2\zeta + h_0/a_2;$$

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_0}.$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (4) и разделив его на $\exp k_2\zeta$, получаем:

$$[f_{y_1}\psi_1 + f_{y_2}\psi_3 + f_{y_3}(c_1\exp k_1y_3 - \psi_5)]\exp(k_1-k_2)\zeta +$$

$$+ [f_{y_1}\psi_2 + f_{y_2}\psi_4 + f_{y_3}(c_2\exp k_2y_3 - \psi_6)] = 0.$$

Так как $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \neq 0$, то $k_1 \neq k_2$ и можно показать, что квадратные скобки равны нулю. В результате получаем два уравнения, аналогичных уравнению (8).

Если $\underline{\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0}$, то $k_1 = k_2$ и коэффициенты A_1, R_1, R_2, R_3 имеют следующий вид:

$$A_1 = (c_1x + c_2)\exp k_1x + h_0/a_2;\quad R_1 = (\psi_1\zeta + \psi_2)\exp k_1\zeta;$$

$$R_3 = (\psi_5\zeta + \psi_6)\exp k_1\zeta + h_0/a_2;\quad R_2 = (\psi_3\zeta + \psi_4)\exp k_1\zeta.$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (4) и разделив его на $\exp k_1\zeta$, получаем:

$$f_{y_3}c_1x\cdot\exp k_1y_3 + \zeta[f_{y_1}\psi_1 + f_{y_2}\psi_3 - f_{y_3}\psi_5] +$$

$$+ [f_{y_1}\psi_2 + f_{y_2}\psi_4 - f_{y_3}\psi_6] = 0. \qquad (9)$$

Продифференцируем это соотношение по x, затем его же по ζ и, сложив, получаем:

$$f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) \;+$$

$$+ f_{y_3}[c_1 \exp k_1 y_3 - \psi_5(y_1, y_2)] = 0.$$

Подставляя его в (9), получаем:

$$f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) +$$
$$+ f_{y_3}[(c_1 y_3 + c_2)\exp k_1 y_3 - \psi_6(y_1,y_2)] = 0. \quad (10)$$

И, наконец, последний вариант: $k_1 = k_2 = 0$. Перепишем уравнение, корнями которого являются k_1 и k_2 : $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$. Если $k_1 = k_2 = 0$, то и $a_2 = 0$. Тогда $k(a_0 k + a_1) = 0$. Отсюда $k_1 = 0$, $a_0 k + a_1 = 0$. Если $a_0 = 0$, то возвращаемся к случаю I для уравнения (7). При $a_0 \neq 0$ имеем $k_2 = -a_1/a_0 = 0$, т.е. $a_1 = a_2 = 0$. Тогда $a_0 A_{1xx} = h_0$; $R_{1\zeta\zeta} = 0$; $R_{2\zeta\zeta} = 0$; $a_0 R_{3\zeta\zeta} = h_0$. Отсюда получаем:

$$A_1 = \frac{h_0}{2a_0}x^2 + c_1 x + c_2; \quad R_1 = \psi_1(\xi,\eta)\zeta + \psi_2(\xi,\eta);$$

$$R_2 = \psi_3(\xi,\eta)\zeta + \psi_4(\xi,\eta); \; R_3 = \frac{h_0}{2a_0}\zeta^2 + \psi_5(\xi,\eta)\zeta + \psi_6(\xi,\eta).$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (4), получаем:

$$[f_{y_1}\psi_2 + f_{y_2}\psi_4 + f_{y_3}(c_2 - \psi_6] + \zeta[f_{y_1}\psi_1 + f_{y_2}\psi_3 - f_{y_3}\psi_5] +$$
$$+ f_{y_3}\left[\frac{h_0}{2a_0}x^2 - c_1 x - \frac{h_0}{2a_0}\zeta^2\right] = 0 \ . \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по x , затем его же по ζ и, складывая, получаем:

$$f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2)+f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2)+$$

$$+f_{y_3}\left[\frac{h_0}{a_0}y_3+c_1-\psi_5(y_1,y_2)\right]=0$$

Используя полученное уравнение, из (11) получаем:

$$f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2)+f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2)+$$

$$+f_{y_3}\left[\frac{h_0}{2a_0}y_3^2+c_1y_3+c_2-\psi_6(y_1,y_2)\right]=0. \qquad (12)$$

Таким образом, первое уравнение системы (4) исследовано полностью. Возможны три варианта: (8),(10),(12).

Аналогичным образом исследуется и второе уравнение системы (4); для него также имеем три варианта.

Исследуя все возможные комбинации для уравнений системы (4), приходим к двум возможным вариантам, приводящим к невырожденным решениям.

<u>Вариант I:</u>

$$\left.\begin{aligned}&f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2)+f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2)+\\&\qquad+f_{y_3}[\exp k_1y_3-\psi_5(y_1,y_2)]=0,\\&f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2)+f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2)+\\&\qquad+f_{y_3}[\exp k_2y_3-\psi_6(y_1,y_2)]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

<u>Вариант П:</u>

$$f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2)+f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2)+$$

$$+f_{y_3}[c_1y_3-\psi_5(y_1,y_2)]=0$$

$$\left.\begin{aligned} & f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2)+f_{y_3}\psi_4(y_1,y_2)+ \\ & \qquad + f_{y_3}\left[\frac{c_1}{2}y_3^2+y_3-\psi_6(y_1,y_2)\right]=0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Рассмотрим вариант I.

Для упрощения введем переменные $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(y_1,y_2)$ и $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(y_1,y_2)$ такие, что $\bar{y}_{2y_1}\psi_1 + \bar{y}_{2y_2}\psi_2 = 0$; $\bar{y}_{1y_1}\psi_2 + \bar{y}_{1y_2}\psi_4 = 0$. В новых переменных система (13) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & f_{\bar{y}_1} + f_{y_3}[\Phi_1(\bar{y}_1,\bar{y}_2)\exp k_1 y_3 - \Phi_5(\bar{y}_1,\bar{y}_2)]=0, \\ & f_{\bar{y}_2} + f_{y_3}[\Phi_2(\bar{y}_1,\bar{y}_2)\exp k_2 y_3 - \Phi_6(\bar{y}_1,\bar{y}_2)]=0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

(Далее штрихи опускаем.)

Запишем систему в операторном виде: $X_\mu f(i\alpha) = 0$, $\mu = 1,2$. По теории [9,с.61], если система дифференциальных уравнений в частных производных имеет решение, то оно должно удовлетворять также уравнениям:

$$(X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu)f(i\alpha) = [X_\mu,X_\nu]f(i\alpha) = 0 .$$

Если систему $X_\mu f(i\alpha) = 0$ записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{3} \varphi^{\mu k}(y_1,y_2,y_3)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_k} = 0,$$

то $[X_\mu,X_\nu]f(i\alpha)=0$ запишутся в виде:

$$\sum_{\rho=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi^{\mu\rho}}{\partial y_k}\varphi^{\nu\rho} - \frac{\partial\varphi^{\nu\rho}}{\partial y_k}\varphi^{\mu\rho}\right)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_k}\right\} = 0. \qquad (16)$$

Составим уравнение (16) для системы (15) ($\mu,\nu=1,2$). Получим следующее соотношение:

$$(\psi_1\psi_3)(y_1,y_2)(k_1-k_2)\exp(k_1+k_2)y_3+$$
$$+[\psi_{1y_2}-k_1(\psi_1\psi_4)(y_1,y_2)]\exp k_1y_3-$$
$$-[\psi_{3y_1}-k_2(\psi_2\psi_3)(y_1,y_2)]\exp k_2y_3+\psi_{4y_1}-\psi_{2y_2}=0. \quad (17)$$

Если $k_1+k_2\neq 0$, то $\psi_1\psi_3=0$ (так как $k_1\neq k_2$). Но равенство нулю ψ_1 или ψ_3 приводит к потере существенного аргумента, что не допускается, т.е. $k_1+k_2=0$. Тогда из (17) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{1y_2}-k_1\psi_1\psi_4=0; \qquad \psi_{3y_1}-k_2\psi_2\psi_3=0;\\ &2k_1\psi_1\psi_3+\psi_{4y_1}-\psi_{2y_2}=0. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Решаем первое уравнение системы (15) методом характеристик:

$$\frac{dy_1}{1}=\frac{dy_3}{\psi_1\exp k_1y_3-\psi_2}=\frac{dy_2}{0}.$$

Его интегралы: $y_2=\mathrm{const}$; $T_1(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+T_2(y_1,y_2)=\mathrm{const}$. Делаем замену переменных: $y_2=\rho_1$; $T_1(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+T_2(y_1,y_2)=\rho_2$.

Второе уравнение из (15) после замены:

$$f_{\rho_1}+f_{\rho_2}\{T_{1y_2}\exp(-k_1y_3)+T_{2y_2}+$$
$$+T_1(-k_1)[\psi_3\exp(-k_1y_3)-\psi_4]\exp(-k_1y_3)\}=0.$$

Коэффициент при f_{ρ_2} :

$$-k_1(T_1\psi_3)(y_1,y_2)\exp(-2k_1y_3) +$$

$$+(k_1T_1\psi_4+ T_{1y_2})(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+ T_{2y_2}=$$

$$= \chi\,[\,\underbrace{y_2}_{\rho_1}:\underbrace{T_1(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+ T_2(y_1,y_2)}_{\rho_2}]. \qquad (19)$$

Можно, используя явный вид T_1 и T_2 и условия (18), выразить коэффициент при f_{ρ_2} через переменные ρ_1 и ρ_2. Можно и непосредственно исследовать выражение (19). Продифференцируем (19) по $(\exp(-k_1y_3))$:

$$2\exp(-k_1y_3)(-k_1)T_1\psi_3+k_1T_1\psi_4+T_{1y_2}= \chi_{\rho_2}T_1.$$

Поделим соотношение на T_1 $(T_1\neq0)$ и продифференцируем еще раз по $(\exp(-k_1y_3))$: $-2k_1\psi_3 = \chi_{\rho_2\rho_2}T_1$, т.е. $\chi_{\rho_2\rho_2} =$ $= \Phi(y_1,y_2)$. Легко показать, что $\Phi(y_1,y_2) = \Phi(y_2) =$ $= \Phi(\rho_1)$. Тогда, интегрируя полученное соотношение, получим второе уравнение в виде:

$$f_{\rho_1}+ f_{\rho_2}[\Phi_1(\rho_1)\rho_2^2+ \Phi_2(\rho_1)\rho_2+ \Phi_3(\rho_1)]= 0. \qquad (20)$$

Уравнение характеристики имеет вид:

$$\frac{d\rho_2}{d\rho_1} = \Phi_1(\rho_1)\rho_2^2+ \Phi_2(\rho_1)\rho_2+ \Phi_3(\rho_1).$$

Это уравнение Рикатти.

Выберем какое-нибудь частное решение: $\bar{\rho}_2(\rho_1)$. Тогда общее решение [10,c,47]:

$$\rho_2 = \bar{\rho}_2(\rho_1) + \frac{1}{GA_1(\rho_1) + A_2(\rho_1)} .$$

Отсюда

$$G = \frac{1 - A_2(\rho_1)\rho_2 + A_2(\rho_1)\varphi_1(\rho_1)}{A_1(\rho_1)\rho_2 - A_1(\rho_1)\varphi_1(\rho_1)} .$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем:

$$G = \frac{\exp[-k_1(x-\zeta)]F_1(\xi,\eta,\zeta) + F_2(\xi,\eta,\zeta)}{\exp[-k_1(x-\zeta)]F_3(\xi,\eta,\zeta) + F_4(\xi,\eta,\zeta)} .$$

Сокращая на $F_3(\xi,\eta,\zeta)\exp k_1\zeta$, окончательно получаем интеграл системы (15) в виде:

$$G = \Psi(i\alpha) = \frac{\bar{x}_i\bar{\xi}_\alpha + \bar{\eta}_\alpha}{\bar{x}_i + \bar{\zeta}_\alpha} . \tag{21}$$

Общее решение имеет вид: $f(i\alpha) = \chi[\Psi(i\alpha)]$, где χ - строго монотонная функция.

Рассмотрим вариант П (система (14)).

Как и в варианте I, вводим те же новые переменные $\bar{y}_1(y_1,y_2)$, $\bar{y}_2(y_1,y_2)$ и после упрощений получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} & f_{\bar{y}_1} + f_{y_3}[c_1 y_3 \bar{\Phi}_1(\bar{y}_1,\bar{y}_2) + \bar{\Phi}_2(\bar{y}_1,\bar{y}_2)] = 0, \\ & f_{\bar{y}_2} + f_{y_3}\left[\left[\frac{c_1}{2}\, y_3^2 + y_3\right]\bar{\Phi}_3(\bar{y}_1,\bar{y}_2) + \bar{\Phi}_4(\bar{y}_1,\bar{y}_2)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Решаем первое уравнение (штрихи опускаем):

$$\frac{dy_3}{dy_1} = c_1\varphi_1(y_1,y_2)y_3 + \varphi_2(y_1,y_2); \quad y_2 = \text{const}.$$

Это линейное уравнение. Его интеграл: $T_1(y_1,y_2)y_3 + T_2(y_1,y_2) = \text{const}$.

Производим замену переменных: $y_2 = \rho_1$; $T_1 y_3 + T_2 = \rho_2$. Второе уравнение системы (22) после замены имеет вид:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(y_1,y_2)y_3^2 + \Phi_2(y_1,y_2)y_3 + \Phi_3(y_1,y_2)] = 0.$$

Как и в варианте I, можно показать, что функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 зависят только от y_2. И уравнение принимает вид:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(\rho_1)\rho_2^2 + \Phi_2(\rho_1)\rho_2 + \Phi_3(\rho_1)] = 0,$$

т.е. такой же, как и в варианте I.

Итак, решение системы (4), соответствующей физической структуре ранга (4,2), имеет вид:

$$f(x_1,\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha) = \chi\left[\frac{x_1\xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_1 + \zeta_\alpha}\right], \tag{23}$$

где χ - строго монотонная функция одного аргумента.

В теории физических структур одним из важных вопросов является вопрос физической интерпретации полученных результатов. В работах Ю.И.Кулакова [1,2] было показано, что структура (2,2), например, связана с законом Ньютона, (3,2) - с электродинамикой постоянных токов и т.д. В работах Г.Г.Михайличенко [3] и автора [4,5] показано, что физическая структура ранга $r = 4$ описывает все возможные двумерные геометрии, $r = 5$ - трехмерные и т.д.

Как же можно интерпретировать результат (23) для физической структуры (4,2)? Напомним одно замечательное свойство частных решений уравнения Рикатти: ангармоническое отношение любых четырех частных решений уравнения Рикатти равно постоянному [10,с.50]. Таким образом, если уравнение Рикатти записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

а частные решения обозначить y_1, y_2, y_3, y_4, то

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = G, \quad \text{где} \quad G = \mathrm{const}.$$

Хорошо известно, что ангармоническое отношение (или сложное отношение) есть инвариант проективных отображений. Это отношение, позволяющее охарактеризовать проективную эквивалентность, "является основным инвариантом проективной геометрии, подобно тому, как расстояние между точками, характеризующее конгруэнтность, есть основной инвариант геометрии элементарной" [11].

Таким образом, видно, что структура (4,2) связана с проективной геометрией.

В своей диссерации Г.Г.Михайличенко [13] нашел решение (23) и указал явный вид функции Φ, связывающей все восемь функций $f(i\alpha), \ldots, f(l\beta)$:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (24)$$

Интересно, что точно такой же определитель (в других обозначениях) приведен в "шестом мемуаре о формах" А.Кэли как условие проективного соответствия двух четверок точек [12,с.225].

Определитель (24) можно преобразовать следующим образом. Прибавим к (24) два определителя 4-го порядка, равные нулю, у которых 1,2,4 столбцы совпадают с 1,2,4 столбцами в (24), третий столбец в первом определителе есть первый из (24), умноженный на $(-f(1\beta))$, и третий столбец во втором есть второй из (24), умноженный на $(-f(1\alpha))$. Складывая определители, получаем:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & [f(i\alpha)f(i\beta)-f(1\beta)f(i\alpha)-f(1\alpha)f(i\beta)] & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & [f(j\alpha)f(j\beta)-f(1\beta)f(j\alpha)-f(1\alpha)f(j\beta)] & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & [f(k\alpha)f(k\beta)-f(1\beta)f(k\alpha)-f(1\alpha)f(k\beta)] & 1 \\ f(1\alpha) & f(1\beta) & [f(1\alpha)f(1\beta)-f(1\beta)f(1\alpha)-f(1\alpha)f(1\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Вычтем последнюю строчку из первых трех. Разлагая по последнему столбцу и группируя члены, получаем:

$$\begin{vmatrix} [f(i\alpha)-f(1\alpha)] & [f(i\beta)-f(1\beta)] & [f(i\alpha)-f(1\alpha)][f(i\beta)-f(1\beta)] \\ [f(j\alpha)-f(1\alpha)] & [f(j\beta)-f(1\beta)] & [f(j\alpha)-f(1\alpha)][f(j\beta)-f(1\beta)] \\ [f(k\alpha)-f(1\alpha)] & [f(k\beta)-f(1\beta)] & [f(k\alpha)-f(1\alpha)][f(k\beta)-f(1\beta)] \end{vmatrix} = 0.$$

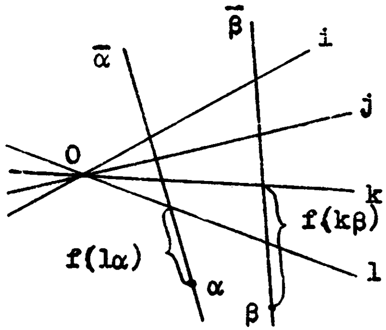
Разделим на произведение скобок в каждой строчке:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{f(i\beta)-f(1\beta)} & \dfrac{1}{f(i\alpha)-f(1\alpha)} & 1 \\ \dfrac{1}{f(j\beta)-f(1\beta)} & \dfrac{1}{f(j\alpha)-f(1\alpha)} & 1 \\ \dfrac{1}{f(k\beta)-f(1\beta)} & \dfrac{1}{f(k\alpha)-f(1\alpha)} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая третью строчку из первой и второй и преобразуя полученное соотношение, окончательно получаем:

$$\frac{f(k\alpha)-f(i\alpha)}{f(k\alpha)-f(j\alpha)} : \frac{f(1\alpha)-f(i\alpha)}{f(1\alpha)-f(j\alpha)} = \frac{f(k\beta)-f(i\beta)}{f(k\beta)-f(j\beta)} : \frac{f(1\beta)-f(i\beta)}{f(1\beta)-f(j\beta)} . \tag{25}$$

Как видно, левая и правая части равенства не зависят от α и от β .



Геометрическая интерпретация решения для физической структуры ранга (4,2) может быть следующей. Пусть элементами множества $\mathcal{M}$ являются всевозможные прямые из плоского пучка прямых с центром 0, а элементами множества $\mathcal{N}$ являются любые другие прямые этой плоскости, пересекающие прямые пучка. Выберем из $\mathcal{M}$ любые четыре прямые из пучка i,j,k,l, а из $\mathcal{N}$ - любые две прямые, пересекающие их, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$. Введем на прямых $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ проективные системы координат [11,с.278], т.е. определим начало системы координат: на прямой $\bar{\alpha}$ - α, на прямой $\bar{\beta}$ - β. Обозначим расстояния от начала координат до точек пересечения прямых i,j,k,l с прямыми $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ соответственно через $f(i\alpha),\ldots,f(l\alpha),f(i\beta),\ldots,f(l\beta)$. Тогда для любых четырех прямых из пучка и любых двух их пересекающих прямых выполняется соотношение (25), которое и определяет инвариантность сложного отношения для четырех элементов из множества $\mathcal{M}$.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.- Новосибирск, 1968.- 226 с.

2. Его же. О новом виде симметрии, лежащей в основании теорий феноменологического типа// Докл.АН СССР.-1971.- Т. 201, № 3.- С.570-572.

3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии//Докл.АН СССР. - 1981.- Т.260,№ 4.- С.803-805.

4. ЛЕВ В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур// Методологические и технологические проблемы информа-

ционно-логических систем.- Новосибирск,1988.- Вып.125: Вычислительные системы.-С.90-103.

5. ЛЕВ В.Х. Бинарная физическая структура ранга (3.3) // Структурный анализ символьных последовательностей. - Новосибирск,1984.- Вып.101: Вычислительные системы.- С.91-113.

6. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Методы решения некоторых уравнений теории физических структур// Вопросы теории и методики преподавания физики. (Научные труды. Вып.71.) - Новосибирск,1971.- С.3-12.

7. КУЛАКОВ Ю.И. О теории физических структур//Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. - Л.: Наука,1983.- Т.127, вып.№ 15.- С.103-151. (Зап. научных семинаров ЛОМИ.)

8. ЭЙЗЕНХАРТ Л.П. Непрерывные группы преобразований.- М.: ИЛ, 1947.- 40 с.

9. КАМКЕ Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.- М.: Наука,1966.-260 с.

10. СТЕПАНОВ В.В. Курс дифференциальных уравнений.-М.:Гос. изд.физ.-мат.лит.,1958.- 468 с.

11. ЕФИМОВ Н.В. Высшая геометрия.- М.: Наука,1971.-576 с.

12. КЭЛИ А. Шестой мемуар о формах //Об основаниях геометрии: Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей.- М.: ГИТТЛ, 1956.- С.222-252.

13. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона: Автореф. дис...канд.физ.-мат.наук: 01.01.01 и 01.04.02. - Новосибирск, 1973.- 13 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

14 июня 1990 года