СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 135

УДК 512.816;513;811

УГЛЫ В ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЯХ

Е.Л.Лозицкий

Введение

Понятие физической структуры (феноменологической симметрии) было введено Ю.И.Кулаковым [1,2] в исследованиях по основаниям физики.

В основании теории физических структур лежит представление о множествах однородных объектов, между элементами которых существуют числовые отношения, удовлетворяющие определенным требованиям симметрии.

Рассмотрение физических структур на одном множестве объектов позволяет развить новый подход к вопросу об основаниях геометрии.

Геометрии плоскости соответствует структура ранга $r = 4$, которая была полностью исследована Г.Г.Михайличенко [3] и В.Х.Львом [4].

Приведем краткую постановку задачи*) и результаты, относящиеся к структуре ранга $r = 4$.

Пусть $\mathfrak{M}$ - топологическое многообразие размерности $m = 2$. Элементы $\mathfrak{M}$ будем называть точками и обозначать $i, j, k, \ldots, w$. Назовем расстоянием функцию $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^1$, которая ставит в соответствие каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in$

*) Точные формулировки и определения даны в работе [5].

$\in$ вещественное число a_{ij}. В локальных координатах функция a имеет представление $a_{ij} = f(x_i, x_j, y_i, y_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что пара $\langle \mathfrak{M}, a \rangle$ образует физическую структуру ранга $r = 4$, если для любых четырех точек $i, j, k, m \in \mathfrak{M}$ имеет место зависимость:

$$\Phi[a_{ij}, a_{ik}, a_{im}, a_{jk}, a_{jm}, a_{km}] = 0. \tag{1}$$

При этом на функции $\Phi : R^6 \to R^1$ и $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^1$ накладываются некоторые ограничения: функция a должна быть гладкой и существенным образом зависеть от координат x_i, y_i и x_j, y_j [6], функция Φ должна быть гладкой, причем $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$.

Возникает следующая задача: найти такие функции a и Φ, что для любых четырех точек $i, j, k, m \in \mathfrak{M}$ имеет место соотношение (1).

ТЕОРЕМА 1. *Все возможные расстояния невырожденной заменой координат и преобразованием* $a_{ij} \to \psi(a_{ij})$ *могут быть приведены к одной из следующих форм [3,4]:*

$$a_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \tag{2.1}$$

$$a_{ij} = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j), \tag{2.2}$$

$$a_{ij} = (x_i - x_j)(y_i - y_j)^q, \tag{2.3}$$

$$a_{ij} = \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] + \gamma \operatorname{arctg} \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}, \tag{2.4}$$

$$a_{ij} = (y_i - y_j) \exp \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}, \tag{2.5}$$

$$a_{ij} = (x_i - x_j) + (\delta_i - \delta_j) \ln(y_i - y_j), \tag{2.6}$$

$$a_{ij}=(\delta_i-\delta_j)(x_i-x_j)+(y_i-y_j)^2, \tag{2.7}$$

$$a_{ij}=\cos y_i \cos y_j \cos(x_i-x_j)+\sin y_i \sin y_j, \tag{2.8}$$

$$a_{ij}=\operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j \cos(x_i-x_j)-\operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j, \tag{2.9}$$

$$a_{ij}=\operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j \cos(x_i-x_j)-\operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j, \tag{2.10}$$

$$a_{ij}=x_iy_j-x_jy_i; \tag{2.11}$$

$$a_{ij}=\frac{(x_i-x_j)^2+\delta_i y_i^2+\delta_j y_j^2}{y_iy_j}, \tag{2.12}$$

где $q\neq 0, \gamma\neq 0$ – const; δ_i, δ_j – const, в (2.6) и (2.7) $\delta_i-\delta_j\neq 0$.

Некоторые из расстояний (2.1)-(2.12) являются простыми функциями от расстояний в известных геометриях: (2.1) есть евклидова плоскость, (2.2) - псевдоевклидова плоскость, (2.8) - двумерная сфера, (2.10) - плоскость Лобачевского, (2.11) - симплектическая плоскость. Остальные геометрии ранее, по-видимому, не были известны.

Г.Г.Михайличенко высказал предположение о связи групповой и феноменологической симметрий [7] и решил обратную задачу: зная группы преобразований плоскости [8], найти все невырожденные двухточечные инварианты [9]. Результаты полностью совпали с (2.1)-(2.12). Отсюда следует, что каждое расстояние является решением системы линейных однородных уравнений вида:

$$F_\nu(i)a_{ij}+F_\nu(j)a_{ij}=0, \quad \nu=1,2,3, \tag{3}$$

где $F_\nu(p)=\sigma_\nu(x_p,y_p)\partial x_p+\lambda_\nu(x_p,y_p)\partial y_p$; σ_ν и λ_ν - некоторые функции, задающие группу инфинитезимальных преобразований; x_p, y_p - координаты произвольной точки p, а $\partial x=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial y=\dfrac{\partial}{\partial y}$. Поскольку операторы F_ν, $\nu=1,2,3$, образуют алгебру Ли, они удовлетворяют коммутационным соотно - шениям [10]:

$$[F_\nu, F_\mu] = c^{\varkappa}_{\nu\mu} F_\varkappa \,, \qquad \nu,\mu,\varkappa = 1,2,3 \,, \tag{4}$$

где $c^{\varkappa}_{\nu\mu}$ - структурные константы. Каждому расстоянию, таким образом, соответствует набор трех операторов:

$$F_1 = \partial x, \quad F_2 = \partial y, \quad F_3 = y\partial x - x\partial y, \tag{5.1}$$

$$F_1 = \partial x, \quad F_2 = \partial y, \quad F_3 = y\partial x + x\partial y, \tag{5.2}$$

$$F_1 = \partial x, \quad F_2 = \partial y, \quad F_3 = y\partial y - qx\partial x, \tag{5.3}$$

$$F_1 = \partial x, \quad F_2 = \partial y, \quad F_3 = (2y - \gamma x)\partial x - (2x + \gamma y)\partial y, \tag{5.4}$$

$$F_1 = \partial x, \quad F_2 = \partial y, \quad F_3 = (x-y)\partial x + y\partial y, \tag{5.5}$$

$$F_1 = \partial x, \quad F_2 = \partial y, \quad F_3 = y\partial y - \delta\partial x, \tag{5.6}$$

$$F_1 = \partial x, \quad F_2 = \partial y, \quad F_3 = 2y\partial x - \delta\partial y, \tag{5.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = \partial x, \\ &F_2 = \operatorname{tg} y\cdot\sin x\cdot\partial x + \cos x\cdot\partial y, \\ &F_3 = \operatorname{tg} y\cdot\cos x\cdot\partial x - \sin x\cdot\partial y, \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = \partial x, \\ &F_2 = -\operatorname{th} y\cdot\sin x\cdot\partial x + \cos x\cdot\partial y, \\ &F_3 = -\operatorname{th} y\cdot\cos x\cdot\partial x - \sin x\cdot\partial y, \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = \partial x, \\ &F_2 = -\operatorname{cth} y\cdot\sin x\cdot\partial x + \cos x\cdot\partial y, \\ &F_3 = -\operatorname{cth} y\cdot\cos x\cdot\partial x - \sin x\cdot\partial y, \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

$$F_1 = x\partial y, \quad F_2 = y\partial x, \quad F_3 = x\partial x - y\partial y, \tag{5.11}$$

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = \partial x, \\ &F_2 = x\partial x + y\partial y, \\ &F_3 = (x^2 - \delta y^2)\partial x + 2xy\partial y. \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Мы дадим определение угла для произвольной плоской геометрии и для каждой из геометрий (2.1)-(2.12) найдем угол, как функцию трех сторон треугольника.

§1. Угол в плоской геометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть треугольником тройку точек $\langle i,j,k \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3*). Будем называть углом $\varphi(1ij)$ треугольника $\langle 1,i,j \rangle$ такую функцию $\varphi\colon R^3 \to R^1$, что для любых четырех точек $1,i,j,k$ имеет место соотношение:

$$\tilde{\Phi}[\varphi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}),\ \varphi(a_{1j},a_{1k},a_{jk}),\ \varphi(a_{1i},a_{1k},a_{ik})] = 0, \qquad (6)$$

причем на функции $\tilde{\Phi}\colon R^3 \to R^1$ и $\varphi\colon R^3 \to R^1$ накладываются некоторые ограничения: функция φ должна быть гладкой и $\varphi \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой области изменения своих трех переменных; функция $\tilde{\Phi}$ должна быть гладкой и $\mathrm{grad}\,\tilde{\Phi} \neq 0$. Соотношение (6) обобщает свойство аддитивности углов с общей вершиной.

Результатом этой работы является

ТЕОРЕМА 2. *Угол в произвольной плоскости геометрии имеет следующий вид:*

$$\varphi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = \chi\{c\cdot\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) + A(a_{1i}) - A(a_{1j})\},$$

где $c = \mathrm{const}$, $A\colon R^1 \to R^1$ *- гладкая функция, а* $\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij})$ *в зависимости от геометрии имеет*

---

*) Данное определение возникло в процессе обсуждения с Ю.И.Кулаковым и Г.Г.Михайличенко.

вид:

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = \arccos\frac{a_{1i}+a_{1j}-a_{ij}}{2\sqrt{a_{1i}a_{1j}}}\ , \qquad (7.1)$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = \mathrm{Arch}\ \frac{a_{1i}+a_{1j}-a_{ij}}{2\sqrt{a_{1i}a_{1j}}}\ , \qquad (7.2)$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = \ln R\ , \qquad (7.3)$$

где R - *решение уравнения* $a_{ij}=(a_{1j}-a_{1i}R^{-q})(1-R)^{q}$,

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = R\ , \qquad (7.4)$$

где R - *решение уравнения*

$$a_{ij}= \ln 2 + \ln\left[\mathrm{ch}\,\frac{R}{2} - \cos\frac{R-a_{1i}+a_{1j}}{\gamma}\right] +$$

$$+\ \gamma\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^{-\frac{R}{4}}\sin\dfrac{R+2a_{1j}}{2\gamma} + e^{\frac{R}{4}}\sin\dfrac{R-2a_{1i}}{2\gamma}}{e^{-\frac{R}{4}}\cos\dfrac{R+2a_{1j}}{2\gamma} - e^{\frac{R}{4}}\cos\dfrac{R-2a_{1i}}{2\gamma}}\ ,$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = \ln R\ , \qquad (7.5)$$

где R - *решение уравнения*

$$\left[\frac{a_{1i}}{a_{ij}}\right]^{R}\cdot\frac{a_{ij}}{a_{1j}} = R^{R}(1-R)^{1-R}\ ,$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = \ln R\ , \qquad (7.6)$$

где R - *решение уравнения*

$$a_{1i}+a_{ij}-a_{1j}=\varepsilon_{ij}\ln(1-R)+\varepsilon_{1i}\ln R,$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) =$$

$$=\frac{\sqrt{a_{1i}\varepsilon_{1j}\varepsilon_{ij}+a_{ij}\varepsilon_{1i}\varepsilon_{1j}-a_{1j}\varepsilon_{1i}\varepsilon_{ij}}}{\varepsilon_{1i}\varepsilon_{1j}}, \qquad (7.7)$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij})=\arccos\frac{a_{ij}-a_{1i}a_{1j}}{\sqrt{1-a_{1i}^2}\sqrt{1-a_{1j}^2}}, \qquad (7.8)$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij})=\mathrm{Arch}\,\frac{a_{ij}-a_{1i}a_{1j}}{\sqrt{1-a_{1i}^2}\sqrt{1-a_{1j}^2}}, \qquad (7.9)$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij})=\arccos\frac{a_{1i}a_{1j}-a_{ij}}{\sqrt{a_{1i}^2-1}\sqrt{a_{1j}^2-1}}, \qquad (7.10)$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) = \frac{a_{ij}}{a_{1i}a_{1j}}, \qquad (7.11)$$

$$\psi(a_{1i},a_{1j},a_{ij}) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\delta_1}}\arccos\frac{a_{1i}a_{1j}-2\delta_1 a_{ij}}{\sqrt{a_{1i}^2-4\delta_1\delta_i}\sqrt{a_{1j}^2-4\delta_1\delta_j}}, \qquad (7.12)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}=\delta_\mu-\delta_\nu.$

§2. Доказательство теоремы

Доказательство разобьем на две части*): сначала рассмотрим функцию φ как функцию шести координат:

$$\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = f(x_1, y_1, x_i, y_i, x_j, y_j) \tag{8}$$

и найдем ограничения, которые накладывает на функцию f соотношение (6).

Введем обозначения $f(x_1, y_1, x_i, y_i, x_j, y_j) = f(1ij)$ и подставим (8) в (6):

$$\tilde{\Phi}\,[f(1ij), f(1ik), f(1jk)] = 0. \tag{9}$$

Запишем соотношение (9) для четверки $\langle 1, i, j, p \rangle$:

$$\tilde{\Phi}[f(1ij), f(1ip), f(1jp)] = 0; \tag{10}$$

предполагая, для определенности, что $\dfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial f(1ij)}$, разрешим (10) относительно $f(1ij)$ и зафиксируем координаты x_p, y_p; обозначив $f(1ip) = \rho(1i)$, $f(1jp) = \rho(1j)$, получим:

$$f(1ij) = \Gamma[\rho(1i), \rho(1j)]. \tag{11}$$

ЛЕММА. *Функции* $z_i = \rho(1i)$, $z_j = \rho(1j)$, $z_k = \rho(1k)$ *восьми переменных* $x_1, y_1, x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ *независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: пусть существует функция $\theta: R^3 \to R^1$ такая, что для любой четверки $\langle 1, i, j, k \rangle$ имеет место соотношение

$$\theta[\rho(1i), \rho(1j), \rho(1k)] = 0. \tag{12}$$

Из (12) следует, что ранг матрицы Якоби

---

*) Идея такого разбиения принадлежит Г.Г.Михайличенко.

$$
\begin{Vmatrix}
\rho_{x_1}(1i) & \rho_{x_1}(1j) & \rho_{x_1}(1k) \\
\rho_{y_1}(1i) & \rho_{y_1}(1j) & \rho_{y_1}(1k) \\
\rho_{x_i}(1i) & 0 & 0 \\
\rho_{y_i}(1i) & 0 & 0 \\
0 & \rho_{x_j}(1j) & 0 \\
0 & \rho_{y_j}(1j) & 0 \\
0 & 0 & \rho_{x_k}(1k) \\
0 & 0 & \rho_{y_k}(1k)
\end{Vmatrix}
\qquad (13)
$$

должен быть меньше трех. Приравниваем нулю два определения третьего порядка,составленные из строк (3,5,7) и (4,6,8) мат - рицы (13):

$$\rho_{x_i}(1i)\rho_{x_j}(1j)\rho_{x_k}(1k) = 0, \qquad (14.1)$$

$$\rho_{y_i}(1i)\rho_{y_j}(1j)\rho_{y_k}(1k) = 0. \qquad (14.2)$$

Из (14.1) и (14.2) следует, что $\rho(1i) = \rho(x_1, y_1)$. С учетом этого из соотношений (8) и (11) получаем:

$$\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \varepsilon(x_1, y_1). \qquad (15)$$

Как отмечалось во введении,расстояния a_{ij} являются решениями систем уравнений $F_\nu(i)a_{ij} + F_\nu(j)a_{ij} = 0$, $\nu = 1,2,3$. Подействуем на уравнение (15) операторами $F_\nu(1) + F_\nu(i) + F_\nu(j)$:

$$\varphi_1(\ )(F_\nu(1)a_{1i}+F_\nu(i)a_{1i})+$$

$$+\varphi_2(\ )(F_\nu(1)a_{1j}+F_\nu(j)a_{1j})+$$

$$+\varphi_3(\ )(F_\nu(i)a_{ij}+F_\nu(j)a_{ij})=F_\nu(1)\varepsilon(x_1,y_1), \qquad (16)$$

где $\varphi_1(\ )$, $\varphi_2(\ )$, $\varphi_3(\ )$ - частные производные по первому, второму и третьему аргументам функции $\varphi(a_{1i},a_{1j},a_{ij})$. В силу уравнений (3) левая часть системы (16) обратится в ноль, следовательно, $F_\nu(1)\varepsilon(x_1,y_1)=0$, и в силу линейной независимости операторов $F_1(1)$, $F_2(1)$, $F_3(1)$, $\varepsilon(x_1,y_1)=\varepsilon$, где $\varepsilon=\mathrm{const}$, что противоречит условию $\varphi\not\equiv\mathrm{const}$. Этим завершается доказательство леммы.

Подставим (11) в соотношение (9)

$$\tilde{\Phi}\,[\Gamma(z_i,z_j),\Gamma(z_i,z_k),\Gamma(z_j,z_k)]=0. \qquad (17)$$

Уравнение (17) аналогично уравнению для структуры ранга $r=3$, решение которого приведено в работе [11]. Согласно доказанной лемме, z_i,z_j,z_k можно считать независимыми переменными. Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\Gamma(z_i,z_j)=\chi[u(z_i)-u(z_j)],$$

где $\chi: R^1\to R^1$, $u: R^1\to R^1$ - гладкие функции. Подставляя в $u(z_i)$ выражение $z_i=\rho(1i)$, получаем некоторую функцию $B(x_1,y_1,x_i,y_i)$ и из (11) и (8) имеем:

$$\varphi(a_{1i},a_{1j},a_{ij})=\chi[B(1i)-B(1j)]. \qquad (18)$$

На этом первая часть доказательства закончена. Теперь необходимо решить уравнение (18) для каждого из расстояний (2.1)-(2.12).

Подействуем на уравнение (18) операторами $F_\nu(1)+$ $+F_\nu(i)+F_\nu(j)$, $\nu=1,2,3$; учитывая, что $\chi'\neq 0$ (в противном случае $\varphi\equiv\mathrm{const}$), получаем:

$$F_\nu(1)B(1i) + F_\nu(i)B(1i) =$$
$$= F_\nu(1)B(1j) + F_\nu(j)B(1j),\ \nu = 1,2,3. \qquad (19)$$

Из (19) непосредственно следует, что

$$F_\nu(1)B(1i) + F_\nu(i)B(1i) = \omega_\nu(1),\ \nu = 1,2,3, \qquad (20)$$

где $\omega_\nu(1) = \omega_\nu(x_1, y_1)$. Система (20) аналогична системе (3) и отличается от последней наличием неоднородных членов $\omega_\nu(1)$.

Получим уравнение совместности системы (20). Для этого выпишем любые два уравнения:

$$F_\alpha(1)B(1i) + F_\alpha(i)B(1i) = \omega_\alpha(1), \qquad (21.1)$$

$$F_\beta(1)B(1i) + F_\beta(i)B(1i) = \omega_\beta(1). \qquad (21.2)$$

Подействуем на уравнение (21.1) оператором $F_\beta(1)$, на уравнение (21.2) - оператором $F_\alpha(1)$ и вычтем из второго первое:

$$c^\gamma_{\alpha\beta}F_\gamma(1)B(1i) + (F_\alpha(1)F_\beta(i) - F_\beta(1)F_\alpha(i))B(1i) =$$
$$= F_\alpha(1)\omega_\beta(1) - F_\beta(1)\omega_\alpha(1). \qquad (22)$$

Подействуем на уравнение (21.1) оператором $F_\beta(i)$, на уравнение (21.2) - оператором $F_\alpha(i)$ и из второго вычтем первое:

$$(F_\alpha(i)F_\beta(1) - F_\beta(i)F_\alpha(1))B(1i) + c^\gamma_{\alpha\beta}F_\gamma(i)B(1i) = 0. \qquad (23)$$

Складывая (22) и (23), с учетом (20) получаем:

$$c^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma(1) = F_\alpha(1)\omega_\beta(1) - F_\beta(1)\omega_\alpha(1),$$
$$\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3. \qquad (24)$$

Уравнение (24) есть искомые условия совместимости системы (20).

Опуская подробное решение системы (20) для каждой группы операторов (5.1)-(5.12), приведем результаты:

$$B(1i) = c\cdot\arccos\frac{y_1 - y_i}{\sqrt{a_{1i}}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.1}$$

$$B(1i) = c\cdot\mathrm{Arch}\,\frac{y_1 - y_i}{\sqrt{a_{1i}}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.2}$$

$$B(1i) = c\cdot\ln(y_1 - y_i) + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.3}$$

$$B(1i) = c\cdot\ln((x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2) + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.4}$$

$$B(1i) = c\cdot\ln(y_1 - y_i) + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.5}$$

$$B(1i) = c\cdot\ln(y_1 - y_i) + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.6}$$

$$B(1i) = c\cdot\frac{y_1 - y_i}{\delta_1 - \delta_i} + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.7}$$

$$B(1i) = c\cdot\arcsin\frac{\sin(x_1 - x_i)\cos y_i}{\sqrt{1 - a_{1i}^2}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.8}$$

$$B(1i) = c\cdot\mathrm{Arch}\,\frac{\sin(x_1 - x_i)\,\mathrm{ch}\, y_i}{\sqrt{1 - a_{1i}^2}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.9}$$

$$B(1i) = c\cdot\arcsin\frac{\sin(x_1 - x_i)\,\mathrm{sh}\, y_i}{\sqrt{a_{1i}^2 - 1}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.10}$$

$$B(1i) = c\,\frac{x_i}{x_1 a_{1i}} + A(a_{1i}) + \rho(1) \tag{25.11}$$

$$B(1i) = \frac{c}{\sqrt{\delta_1}} \arcsin \frac{2\sqrt{\delta_1}\,(x_1 - x_i)}{y_i\sqrt{a_{1i}^2 - 4\delta_1\delta_i}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \tag{25.12}$$

где a_{1i} - соответствующие расстояния, $A\colon R^1 \to R^1$ и $\rho\colon R^2 \to R^1$ - гладкие функции. Подставляя (25.1)-(25.12) в (18), можно получить (7.1)-(7.12).

В заключение отметим, что углы, согласно теореме 2, определены с точностью до двух произвольных функций $\chi\colon R^1 \to R^1$ и $A\colon R^1 \to R^1$ и с точностью до константы c . Предполагая, что $c \neq 0$ (иначе угол тривиален), угол можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{1}{c}\chi^{-1}(\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij})) =$$

$$= \psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) + \frac{A(a_{1i})}{c} - \frac{A(a_{1j})}{c}. \tag{26}$$

Обозначая

$$\frac{1}{c}\chi^{-1}(\varphi(a_{1\ }, a_{1j}, a_{ij})) = \bar{\varphi}(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}),$$

$$\frac{A(a_{1i})}{c} = \bar{A}(a_{1i}), \qquad \frac{A(a_{1j})}{c} = \bar{A}(a_{1j}) \quad ,$$

из соотношения (26) получаем:

$$\bar{\varphi}(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \psi(a_{1i}, a_{ij}, a_{ij}) + \bar{A}(a_{1i}) - \bar{A}(a_{1j}). \tag{27}$$

Если теперь принять за определение угла соотношение (27), то углы вида (7.1), (7.2), (7.8) и (7.10) будут отличаться от углов в обычных евклидовой, псевдоевклидовой, сферической геометриях и геометрии Лобачевского аддитивными слагаемыми вида $\bar{\lambda}(a_{ij})-\bar{\lambda}(a_{ij})$.

Неопределенность в выборе функции λ означает,что расстояние a_{ij} определяет геометрию неоднозначно, т.е. на плоскости с одним и тем же расстоянием a_{ij} может существовать множество различных геометрических структур.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур. -Новосибирск, 1968. - 226 с.

2. КУЛАКОВ Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа //Докл. АН СССР. - 1971. - Т. 201, № 3. - С. 570-572.

3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии //Докл. АН СССР. - 1981. -Т. 260, № 4. -С. 803-805.

4. ЛЕВ В.Х. Двумерные и трехмерные геометрии в теории физических структур //Машинный анализ сложных структур . - Новосибирск, 1986. -Вып. 118: Вычислительные системы.-С. 28-36.

5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение фундаментальных уравнений в теории физических структур //Докл. АН СССР. - 1972. -Т.206,№5. - С. 1056-1058.

6. ЭЙЗЕНХАРТ Л.П. Непрерывные группы преобразований. -М.: ИЛ., 1947.

7. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии //Сиб.мат.ж. - 1984. -Т. XXУ, № 5.-С. 99-113.

8. Его же. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости //Сиб.мат.ж. - 1982. - Т.23, № 5. - С.132-141.

9. Его же. Метрика плоскости как двухточечный инвариант /Ред. Сиб.мат.ж. - 1984. - 38 с. - Деп. ВИНИТИ 30.10.84, № 6980-84. Реферат //Сиб.мат.ж. - 1985.-Т. 26, №5. -С.198.

10. ЛЕВ В.Х. Алгебры Ли в теории физических структур //Моделирование в пленочной электромеханике. - Новосибирск, 1985. -Вып. 110: Вычислительные системы. -С. 89-94.

11. КУЛАКОВ Ю.И. О теории физических структур //Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. - Л.: Наука, 1983. -Т. 127, вып. 15. - С. 103-151 (Зап. науч. семинаров ЛОМИ).

Поступила в ред.-изд.отд.
14 июня 1990 года