МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ХИМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКЕ
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 136

УДК 519.1

НЕСКОЛЬКО СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ГРАФОВ

В.А.Колмыков

Памяти М.В. Сумина

1. В спектральной теории графов хорошо известны формулы Швенка ([1, с. 81]):

$$G(\lambda) = \lambda G_v(\lambda) - \sum_{u \cdot v} G_{uv}(\lambda) - 2\sum_{C \cdot v} G_C(\lambda), \qquad (1)$$

$$G(\lambda) = G_{\overline{uv}}(\lambda) - G_{uv}(\lambda) - 2\sum_{C \cdot \overline{uv}} G_C(\lambda). \qquad (2)$$

Здесь $G(\lambda)$ – характеристический многочлен G;G_H – граф, получающийся из G удалением всех вершин подграфа H и инцидентных им ребер; $G_{\overline{uv}}$ – граф, получающийся из G удалением ребра $\overline{uv}$ (все вершины G и все другие ребра сохраняются). Первое суммирование ведется по всем вершинам u, смежным с v, второе – по всем простым циклам C, содержащим вершину v, третье – по всем простым циклам C, содержащим ребро $\overline{uv}$.

2. Пусть при некоторой нумерации вершин граф G имеет матрицу смежности A, а вершины α и β – номера i и j соответственно. Из (2) нетрудно выводится (см. п.6):

$$(-1)^{i+j}\left|(\lambda I-A)_j^i\right| = \sum_{\alpha \cdot P \cdot \beta} G_P(\lambda). \qquad (3)$$

Здесь индекс вверху (внизу) у матрицы $\lambda I - A$ означает вычеркивание i-й строки (столбца), суммирование в правой части ведется по всем простым цепям с концами α и β.

Наоборот, если независимо доказать (3), то (1) и (2) будут простыми следствиями (Швенк доказывал формулы (1) и (2) сравнением коэффициентов в левой и правой части).

3. Сочетая (3) и формулу Сильвестра, отнесенную к двум индексам $|B|\cdot|B^{ij}_{ij}| - |B^{i}_{i}|\cdot|B^{j}_{j}| + |B^{i}_{j}|\cdot|B^{j}_{i}| = 0$, получаем формулу:

$$\Big[\sum_{\alpha\cdot P\cdot\beta} G_P(\lambda)\Big]^2 = G_\alpha(\lambda)G_\beta(\lambda) - G(\lambda)G_{\alpha\beta}(\lambda). \tag{4}$$

4. ЛЕММА СУМИНА. *Справедливо*

$$\rho(\alpha,\beta) = n-1 - \frac{1}{2}\deg[G_\alpha(\lambda)G_\beta(\lambda) - G(\lambda)G_{\alpha\beta}(\lambda)],$$

где ρ *– расстояние в* G, n *– число вершин в* G, $\deg$ *– степень многочлена.*

5. При помощи (4) из (1) и (2) получаем:

$$G(\lambda) = \lambda G_v(\lambda) - \sum_{u\cdot v} G_{uv}(\lambda) - 2\sum_{\substack{\alpha\cdot v,\beta\cdot v\\ \alpha\neq\beta}} \sqrt[0]{G_{\alpha v}(\lambda)G_{\beta v}(\lambda) - G_v(\lambda)G_{\alpha\beta v}(\lambda)}, \tag{5}$$

$$G(\lambda) = G_{\overline{uv}}(\lambda) - G_{uv}(\lambda) - 2\sqrt[0]{G_u(\lambda)G_v(\lambda) - G_{\overline{uv}}(\lambda)G_{uv}(\lambda)}\,. \tag{6}$$

Здесь $\sqrt[0]{\ }$ – квадратный корень в кольце многочленов.

6. Вывод формулы (3).

<u>Случай 1</u>. Пусть α и β смежны в G. Тогда, с одной стороны, имеем

$$G(\lambda) = G_{\overline{\alpha\beta}}(\lambda) + G_{\alpha\beta}(\lambda) - 2\sum_{\alpha\cdot P\cdot\beta} G_P(\lambda).$$

С другой стороны, разложим определитель $|\lambda I - A|$ в сумму двух определителей в соответствии с разложением i-й строки $(a-1b) = (a0b) + (0-10)$ (здесь и ниже строки - это блок-матрицы, состоящие из трех блок-строк длины соответственно $j-1$, 1 и $n-j$). Затем первый из полученных определителей разложим по i-му столбцу: $(a-1b)^t = (a0b)^t + (0-10)^t$; второй из вновь полученных определителей разложим по i-й строке: $(c0d) = (c-1d) + (010)$. В результате получим:

$$G(\lambda) = G_{\overline{\alpha\beta}}(\lambda) + G_{\alpha\beta}(\lambda) - 2(-1)^{i+j}|(\lambda I - A)_j^i| .$$

Случай 2. Пусть α и β несмежны в G. Обозначим через $\hat{G}$ граф, получающийся из G добавлением ребра $\overline{\alpha\beta}$. Тогда

$$\sum_{\alpha\cdot P\cdot\beta} G_P(\lambda) = \sum_{\alpha\cdot P\cdot\beta} \hat{G}_P(\lambda) - G_{\alpha\beta}(\lambda) =$$

$$= (-1)^{i+j}|(\lambda I-\hat{A})_j^i| - |(\lambda I-A)_{ij}^{ij}| = (-1)^{i+j}|(\lambda I-A)_j^i|.$$

Литература

1. ЦВЕТКОВИЧ Д., ДУБ М., ЗАХС Х. Спектры графов. Теория и применение. - Киев: Наукова думка, 1984.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 октября 1990 года