П Р И Б Л И Ж Е Н И Е   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)

1990 год Выпуск 137

УДК 519.651

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ЛОКАЛЬНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Т.Жанлав, В.Л.Мирошниченко

Введение

В последнее время широкое распространение получили методы приближения функций, использующие локальную аппроксимацию сплайнами [1-7]. Локально-аппроксимационные сплайны по точности приближения близки к интерполяционным сплайнам, и в то же время они существенно проще с точки зрения численной реализации. В работах [2,4] предложен новый тип локальной аппроксимации сплайнами, занимающий промежуточное положение между формулами локальной аппроксимации и интерполяционными сплайнами. В дальнейшем такие сплайны будем называть локально-интерполяционными. В данной статье выводятся оценки погрешности аппроксимации функций и их производных локально-интерполяционными кубическими сплайнами.

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах сетки $\Delta_N: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b;\ h_i = x_{i+1} - x_i$, известны значения $f(x_i) = f_i, i = 0,1,\ldots,N$, функции $f(x)$. Будем предполагать, что $N = 2n$ - четное число и дополним сетку Δ_N точками $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0$, $x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$. Кубический сплайн $S \in C^2[a,b]$ с узлами на сетке Δ_N допускает представление

$$S(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \beta_j B_j(x), \tag{1}$$

где $B_j(x)$ – кубические B-сплайны [1], а β_j - числовые коэффициенты. Полагая $\beta_j = \hat{\alpha}_j$, $j = 1,\dots,N-1$, где

$$\hat{\alpha}_j = f_j + \frac{1}{3(h_j + h_{j-1})}\left[h_j^2 \frac{f_j - f_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1}^2 \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}\right],$$

и выбирая подходящим образом коэффициенты $\beta_{-1}, \beta_0, \beta_N, \beta_{N+1}$ (см. [4]), получаем локально-аппроксимационный сплайн, который обеспечивает такую же по порядку точность приближения, как и кубический интерполяционный сплайн. В частности, на достаточно гладких функциях реализуется максимальный для кубических сплайнов четвертый порядок точности.

Сплайн (1) назовем локально-интерполяционным, если

$$S(x_{2i}) = f_{2i}, \quad i = 0,1,\dots,n, \tag{2}$$

$$\beta_{2j+1} = \hat{\alpha}_{2j+1}, \quad j = 0,1,\dots,n-1. \tag{3}$$

Из условий интерполяции (2) вытекает, что

$$\beta_{2i} = \frac{1}{B_{2i}(x_{2i})}[f_{2i} - \hat{\alpha}_{2i-1}B_{2i-1}(x_{2i}) - \\ -\hat{\alpha}_{2i+1}B_{2i+1}(x_{2i})], \quad i = 1,\dots,n-1. \tag{4}$$

Для определения оставшихся четырех коэффициентов β_{-1}, $\beta_0, \beta_N, \beta_{N+1}$ к двум еще не использованным условиям интерполяции (2) при $i = 0, N$ добавим, как это предлагается в [4], краевые условия (в данном случае типа 1):

$$S'(x_0) = f_0', \quad S'(x_N) = f_N'. \tag{5}$$

Из условий $S(x_0) = f_0$, $S'(x_0) = f_0'$ получаем для коэффициентов β_{-1}, β_0 систему

$$\left.\begin{aligned} B_{-1}(x_0)\beta_{-1}+B_0(x_0)\beta_0&=f_0-B_1(x_0)\hat{\alpha}_1,\\ B'_{-1}(x_0)\beta_{-1}+B'_0(x_0)\beta_0&=f'_0-B'_1(x_0)\hat{\alpha}_1,\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

которая имеет единственное решение [4]. Аналогичным образом находятся величины β_N, β_{N+1}. В итоге локально-интерполяцион - ный сплайн, определяемый условиями (2),(3),(5), существует и единствен.

Отметим, что наряду с соотношениями (5) можно, по аналогии с интерполяционными сплайнами, рассматривать и другие типы краевых условий [1]. Кроме того, следуя [4], можно потребовать в дополнение к (2) выполнения условий интерполяции в узлах x_1, x_{N-1} :

$$S(x_1)=f_1,\ S(x_{N-1})=f_{N-1}.\tag{7}$$

При решении практических задач во многих случаях этот тип краевых условий удобнее условий (5),так как для его реализации не требуются значения производных f'_0, f'_N .

В §1-3 выводятся оценки погрешности приближения локально-интерполяционными сплайнами с граничными условиями (5),(7).Отметим, что надобность в граничных условиях отпадает, когда известны все значения f_i, требуемые для определения коэффици - ентов β_{2j+1} по формуле (3) при всех $j=-1,0,\dots,n$ (например, это имеет место при аппроксимации периодической функ - ции). Оценки погрешности для этого случая легко получить из результатов §1-3, вычленив из них ту часть, которая относится к отрезку $[x_2,x_{N-2}]$.

§1. Оценки погрешности на неравномерной сетке

Получим оценки погрешности приближения функции $f(x)\in W^4_\infty[a,b]$ и ее производных $f^{(r)}(x)$, $r=1,2,3$, когда локально-интерполяционный сплайн (1) удовлетворяет условиям (2),(3),(5).

Пусть $S_{32}(x)$ - эрмитов кубический сплайн, определяемый условиями $S_{32}(x_j) = f_j$, $S'_{32}(x_j) = f'_j$, $j = 0,\dots,N$. Имеем

$$|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)| \le |S^{(r)}(x)- S_{32}^{(r)}(x)| +$$
$$+ |S_{32}^{(r)}(x)- f^{(r)}(x)|, \qquad (8)$$
$$r = 0,1.$$

Так как оценки для $|S_{32}^{(r)}(x)- f^{(r)}(x)|$ известны [1], то достаточно оценить величины $|S^{(r)}(x)- S_{32}^{(r)}(x)|$. Используя формулу для $S_{32}(x)$ [1], на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$| S(x)- S_{32}(x) | \le$$
$$\le (1-t)^2(1+2t)|S_i-f_i|+ t^2(3-2t)|S_{i+1}-f_{i+1}|+$$
$$+ h_i t(1-t)[(1-t)|S'_i-f'_i|+ t|S'_{i+1}-f'_{i+1}|], \qquad (9)$$

$$| S'(x)-S'_{32}(x) | \le$$
$$\le 6t(1-t)\left|\frac{S_{i+1}-f_{i+1}}{h_i}-\frac{S_i-f_i}{h_i}\right|+ |1-4t+3t^2||S'_i-f'_i|+$$
$$+ t|3t-2||S'_{i+1}-f'_{i+1}|, \qquad (10)$$

где $t= (x-x_i)/h_i$, $S_j^{(r)}= S^{(r)}(x_j)$ Таким образом, вопрос об оценке для $|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|$, $r = 0,1$, сводится в конечном счете к получению оценок величин $|S_j^{(r)}- f_j^{(r)}|$, $r = 0,1$.

Приведем формулы [1, с.140] для узловых значений B-сплайнов и их производных:

$$B''_{i-1}(x_i) = 6/[(h_{i-1}+h_i)(h_{i-2}+h_{i-1}+h_i)],$$

$$B''_{i+1}(x_i) = 6/[(h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})],$$

$$B'_{i-1}(x_i) = -B''_{i-1}(x_i)h_i/2,$$

$$B_{i-1}(x_i) = B''_{i-1}(x_i)h_i^2/6,$$

$$B'_{i+1}(x_i) = B''_{i+1}(x_i)h_{i-1}/2,$$

$$B_{i+1}(x_i) = B''_{i+1}(x_i)h_{i-1}^2/6,$$

а также тождества:

$$\left.\begin{aligned}
&B^{(r)}_{i-1}(x_i) + B^{(r)}_{i}(x_i) + B^{(r)}_{i+1}(x_i) = \delta_{r0},\\
&(h_i - h_{i-1})B^{(r)}_{i}(x_i) - (2h_{i-1}+h_{i-2})B^{(r)}_{i-1}(x_i) +\\
&\qquad\qquad + (2h_i + h_{i+1})B^{(r)}_{i+1}(x_i) = 3\delta_{r1},\\
&-h_i h_{i-1} B^{(r)}_{i}(x_i) + h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2})B^{(r)}_{i-1}(x_i) +\\
&\qquad\qquad + h_i(h_i + h_{i+1})B^{(r)}_{i+1}(x_i) = 6\delta_{r2},\\
&\qquad r = 0,1,2
\end{aligned}\right\}\quad (11)$$

(δ_{ij} - символ Кронекера), которые будут использованы при выводе оценок.

Обозначим $H = \max\limits_i h_i$.

ЛЕММА 1. *Если* $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$, *то для локально-интерполяционного сплайна, удовлетворяющего условиям* (2), (3), (5), *имеют место оценки*

$$|S^{(r)}_{2j+1} - f^{(r)}_{2j+1}| \le d_r H^{4-r} \|f^{IV}\|_\infty, \tag{12}$$

$$r = 0,1,2;\ j = 0,\ldots,n-1,$$

где $d_0 = 1/24$, $d_1 = 1/12$, $d_2 = 5/24$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, легко показать, что

$$\beta_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f_i' - \frac{h_i h_{i-1}}{6} f_i'' + A_i$$

$$\text{при} \quad i = 2j+1;\ j = 0,\dots,n-1, \qquad (13а)$$

$$\beta_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f_i' - \frac{h_i h_{i-1}}{6} f_i'' + \omega_i$$

$$\text{при} \quad i = 2j;\ j = 1,\dots,n-1, \qquad (13б)$$

где

$$A_i = \frac{1}{18(h_i + h_{i-1})}\left[-\frac{h_{i-1}^2}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - v)^3 f^{IV}(v)\,dv - \right.$$

$$\left. - \frac{h_i^2}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v - x_{i-1})^3 f^{IV}(v)\,dv\right], \qquad (14)$$

$$\omega_i = -\frac{1}{B_i(x_i)}[(I_{1i} + A_{i-1})B_{i-1}(x_i) +$$

$$+ (I_{2i} + A_{i+1})B_{i+1}(x_i)], \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{1i} &= \frac{1}{6}\int_{x_{i-1}}^{x_i} [(v - x_{i-1})^3 + (h_{i-2} - h_{i-1})(v - x_{i-1})^2 - \\ &\qquad - h_{i-1}h_{i-2}(v - x_{i-1})] f^{IV}(v)\,dv, \\ I_{2i} &= \frac{1}{6}\int_{x_i}^{x_{i+1}} [(x_{i+1} - v)^3 + (h_{i+1} - h_i)(x_{i+1} - v)^2 - \\ &\qquad - h_{i+1}h_i(x_{i+1} - v)] f^{IV}(v)\,dv. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Пусть $i=2j+1$, $1\le j\le n-2$. Тогда, принимая во внимание (13) и (11), получаем

$$R_i^{(r)}\equiv S_i^{(r)}-f_i^{(r)}=B_i^{(r)}(x_i)A_i+(I_{1i}+\omega_{i-1})B_{i-1}^{(r)}(x_i)+$$
$$+(I_{2i}+\omega_{i+1})B_{i+1}^{(r)}(x_i),\ r=0,1,2. \qquad (17)$$

Из (14), (15) немедленно вытекают оценки:

$$\left.\begin{aligned}
|A_i| &\le \frac{h_i^2h_{i-1}^2}{72}\,\|f^{IV}\|_\infty ,\\
|I_{1i}| &\le \frac{h_{i-1}^3(2h_{i-2}+h_{i-1})}{72}\,\|f^{IV}\|_\infty ,\\
|I_{2i}| &\le \frac{h_i^3(2h_{i+1}+h_i)}{72}\,\|f^{IV}\|_\infty .
\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Далее, учитывая (11) и (18), из (15) получаем

$$|\omega_i|\le\frac{h_ih_{i-1}}{72}\max\{h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2}),$$
$$h_i(h_i+h_{i+1})\}\|f^{IV}\|_\infty\le\frac{h_{i-1}h_iH^2}{36}\|f^{IV}\|_\infty. \qquad (19)$$

Из (17), используя первое из тождеств (11), имеем

$$|R_i|\le|A_i|+(|I_{1i}|+|\omega_{i-1}|+|A_i|)B_{i-1}(x_i)+$$
$$+(|I_{2i}|+|\omega_{i+1}|+|A_i|)B_{i+1}(x_i).$$

Отсюда, привлекая оценки (18), (19), находим

$$|R_i|\le\frac{h_ih_{i-1}}{72}\left[h_ih_{i-1}+\frac{h_i\Omega_1+h_{i-1}\Omega_2}{h_i+h_{i-1}}\right]\|f^{IV}\|_\infty , \qquad (20)$$

где
$$\Omega_1=\frac{2h_{i-2}(H^2+h_{i-1}^2)+h_{i-1}(h_i^2+h_{i-1}^2)}{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i}\ ;$$

$$\Omega_2=\frac{2h_{i+1}(H^2+h_i^2)+h_i(h_i^2+h_{i-1}^2)}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}\ .$$

Учитывая, что величины Ω_1 и Ω_2 являются возрастающими функциями h_{i-2} и h_{i+1} соответственно, получаем

$$h_i\Omega_1+h_{i-1}\Omega_2\le$$

$$\le\frac{2}{h_{i-1}+h_i+H}\{H(h_{i-1}+h_i)(H^2+h_{i-1}h_i)+h_{i-1}h_i(h_{i-1}^2+h_i^2)\}\le$$

$$\le\frac{2H(h_{i-1}+h_i)}{h_{i-1}+h_i+H}\ (H^2+2h_{i-1}h_i)\le 2H^2(h_{i-1}+h_i)\ .$$

В результате из (20) имеем

$$|R_i|\le\frac{h_ih_{i-1}}{72}\ (h_ih_{i-1}+2H^2)\,\|f^{IV}\|_\infty\le\frac{H^4}{24}\|f^{IV}\|_\infty\ ,\qquad(21)$$

$$i=3,5,\dots,N-3\ .$$

Далее, из (17) с учетом (11),(18),(19) получаем

$$|R_i'|\le\frac{h_ih_{i-1}}{24(h_i+h_{i-1})}(\Omega_1+\Omega_2)\,\|f^{IV}\|_\infty\ .$$

Так как

$$\Omega_1+\Omega_2\le\frac{2H(2H^2+h_i^2+h_{i-1}^2)+(h_{i-1}+h_i)(h_i^2+h_{i-1}^2)}{H+h_{i-1}+h_i}\le$$

$$\le\frac{4H(H^2+h_i^2+h_{i-1}^2)}{H+h_{i-1}+h_i}\le 4H^2,$$

то

$$|R_i'| \le \frac{H^2}{6} \cdot \frac{h_i h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} \|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^3}{12} \|f^{IV}\|_\infty, \; i=3,5,\ldots,N-3. \quad (22)$$

Из (17) имеем

$$|R_i''| \le \frac{1}{12(h_i+h_{i-1})}(h_{i-1}\Omega_1 + h_i\Omega_2)\|f^{IV}\|_\infty .$$

Покажем, что

$$(h_{i-1}\Omega_1 + h_i\Omega_2)/(h_i+h_{i-1}) \le 5H^2/2. \quad (23)$$

В самом деле,

$$\frac{h_{i-1}\Omega_1 + h_i\Omega_2}{h_{i-1}+h_i} \le$$

$$\le \frac{2H^3(h_i+h_{i-1})+2H(h_{i-1}^3+h_i^3)+(h_i^2+h_{i-1}^2)^2}{(h_{i-1}+h_i)(H+h_i+h_{i-1})},$$

и (23) будет иметь место при выполнении неравенства

$$4H^3(h_i+h_{i-1})+4H(h_{i-1}^3+h_i^3)+2(h_i^2+h_{i-1}^2)^2 \le$$

$$\le 5H^2(h_{i-1}+h_i)(H+h_i+h_{i-1}),$$

которое, как нетрудно видеть, сводится к очевидному соотношению

$$H(h_{i-1}+h_i)[H^2-(h_i-h_{i-1})^2+3H(h_{i-1}+h_i)-3(h_{i-1}^2+h_i^2)+$$

$$+ 2h_ih_{i-1}]+2[H^2(h_{i-1}+h_i)^2-(h_i^2+h_{i-1}^2)^2] \ge 0.$$

Таким образом, (23) имеет место, и, следовательно,

$$|R_i''| \le \frac{5}{24} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad i = 3,5,\ldots, N-3.$$

Объединяя этот результат с (21), (22), получаем (12) при $j = 1,\ldots, n-2$.

Вычислив из системы (6) коэффициент β_0, после несложных выкладок находим

$$\beta_0 = f_1 - \frac{2h_0+h_{-1}}{3} f_1' + \frac{h_0(h_0+h_{-1})}{6} f_1'' + B - \frac{h_{-1}}{h_0+h_1} A_1 ,$$

где

$$|B| = \frac{h_{-1}+h_0+h_1}{6(h_0+h_1)} \left| \int_{x_0}^{x_1} (u-x_0)^2 (u-x_1) f^{IV}(u)\,du \right| \le$$

$$\le \frac{(h_{-1}+h_0+h_1)h_0^4}{72(h_0+h_1)} \|f^{IV}\|_\infty .$$

При этом справедливо соотношение

$$R_1^{(r)} = B_0^{(r)}(x_1)\left[B - \frac{h_{-1}}{h_0+h_1} A_1\right] + B_1^{(r)}(x_1)A_1 +$$

$$+ B_2^{(r)}(x_1)(I_{21} + \omega_2).$$

Отсюда, учитывая оценки величин $|B|, |A_1|, |I_{21}|, |\omega_2|$, имеем

$$|R_1| \le B_0(x_1)|B| + |A_1|\left\{B_1(x_1) - \frac{h_{-1}}{h_0+h_1} B_0(x_1)\right\} +$$

$$+ B_2(x_1)(|\omega_2| + |I_{21}|) =$$

$$= \frac{h_0^2 h_1}{72} \cdot \frac{(h_0+2h_1+2h_2)h_0 h_1 + 2h_2(h_1^2+H^2)+h_1^3}{(h_0+h_1)(h_0+h_1+h_2)} \|f^{IV}\|_\infty \le$$

$$\le \frac{5H^4}{216}\|f^{IV}\|_\infty < \frac{H^4}{24}\|f^{IV}\|_\infty, \quad (24)$$

что доказывает (12) при $j = 0$, $r = 0$ (эта же оценка верна, конечно, при $j = n-1$) . Аналогичным образом рассматриваются случаи $r = 1,2$.

ЛЕММА 2. *Если* $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ *, то для локально-интерполяционного сплайна, удовлетворяющего условиям* (2), (3), (5), *имеют место оценки*

$$|S^{(r)}_{2j} - f^{(r)}_{2j}| \le \bar{d}_r H^{4-r} \|f^{IV}\|_\infty, \ r = 0,1,2; j = 0,\dots,n, \quad (25)$$

где $\bar{d}_0 = 0$, $\bar{d}_1 = 1/18$, $\bar{d}_2 = 1/6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r = 0$ оценка (25) прямо следует из условий интерполяции (2), входящих в определение локально-интерполяционного сплайна. Для четного $i = 2,4,\dots,N-2$ и $r = 1,2$ имеем

$$R^{(r)}_i = \frac{1}{B_i(x_i)}[c^{(r)}_i(I_{1i}+A_{i-1}) + d^{(r)}_i(I_{2i}+A_{i+1})], \quad (26)$$

где

$$c^{(r)}_i = B_i(x_i)B^{(r)}_{i-1}(x_i) - B^{(r)}_i(x_i)B_{i-1}(x_i),$$

$$d^{(r)}_i = B_i(x_i)B^{(r)}_{i+1}(x_i) - B^{(r)}_i(x_i)B_{i+1}(x_i), \quad r = 1,2.$$

При $r = 1$ из (26) после некоторых выкладок получаем

$$|R'_i| \le \frac{1}{24}(h_{i-2}+h_{i-1})(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1}) \times$$
$$\times \max(B_{i-1}(x_i), B_{i+1}(x_i)) \|f^{IV}\|_\infty .$$

Функция $h^2_i(h_{i-1}+h_{i-2})(h_i+h_{i+1})/(h_{i-2}+h_{i-1}+h_i)$ является возрастающей относительно h_i и $h_{i-1}+h_{i-2}$, и поэтому

$$(h_{i-2}+h_{i-1})(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1})B_{i-1}(x_i) \le \frac{4}{3}H^3 .$$

Аналогичным образом получается неравенство

$$(h_{i-2}+h_{i-1})(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1})B_{i+1}(x_i) \le \frac{4}{3}H^3 .$$

В результате

$$|R_i'| \le \frac{H^3}{18}\|f^{IV}\|_\infty, \quad i = 2,4,\ldots, N-2.$$

Для $r = 2$ из (26) имеем оценку

$$|R_i''| \le \frac{1}{12}\max\{h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2}), h_i(h_i+h_{i+1})\}\|f^{IV}\|_\infty \le$$
$$\le \frac{H^2}{6}\|f^{IV}\|_\infty ,$$

при выводе которой было учтено, что

$$B_i(x_i)=$$
$$= \frac{h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2})(2h_i+h_{i+1})+h_i(h_i+h_{i+1})(2h_{i-1}+h_{i-2})}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-2}+h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})}.$$

Нам осталось доказать оценку (25) при $i = 0,N$; $r = 2$, так как при $r = 1$ в точках x_0, x_N оценка (25) имеет место в силу граничных условий (5). Имеем

$$R_0'' = B_{-1}''(x_0)(\beta_{-1}-\beta_0)+B_1''(x_0)(\beta_1-\beta_0)-f_0''.$$

Подставляя сюда значения β_{-1} и β_0, найденные из системы (6), и учитывая (13б), (18), получаем

$$|R_0''| = \frac{6}{h_0(h_0+h_1)}|I_{20}+ A_1| \le \frac{H^2}{6}\|f^{IV}\|_\infty .$$

Ясно, что такая же оценка имеет место и для $|R_N''|$ Лемма доказана полностью.

Теперь сформулируем основной результат этой части работы.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f(x) \in W_\infty^4[a,b]$ *, то для локально-интерполяционного сплайна, удовлетворяющего условиям* (2), (3), (5), *имеют место оценки*

$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_\infty < K_r H^{4-r}\|f^{IV}\|_\infty , \quad r = 0,1,2,3, \tag{27}$$

где $K_0 = 0.051002$, $K_1 = 0.1037$, $K_2 = 361/1152$, $K_3 = \frac{1}{8}\max(7{,}3\beta + 4/\beta)$, $\beta = H/\min h_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$ и i - четное число. Тогда из (9) с учетом лемм 1 и 2 получаем

$$|S(x)-S_{32}(x)| < \frac{H^4 t}{72}(-8t^2+7t+4)\,\|f^{IV}\|_\infty . \tag{28}$$

Если учесть известные [1] оценки для $|S_{32}(x)-f(x)|$, то из (8) и (28) находим

$$|S(x)-f(x)| < \frac{H^4}{72}\varphi_0(t)\,\|f^{IV}\|_\infty , \tag{29}$$

где $\varphi_0(t) = t(3t^3-14t^2+10t+4)$, причем $\max\limits_{t\in[0,1]} \varphi_0(t) = \varphi_0(t^*) \approx 72\cdot 0.051002$, $t^* \approx 0.76900$ - корень уравнения $\varphi_0'(t) = 0$.

При нечетном i вместо (29) имеет место оценка

$$|S(x)-f(x)| \le \frac{H^4}{72}\varphi_0(1-t)\,\|f^{IV}\|_\infty . \tag{29'}$$

Объединяя (29),(29'), получаем (27) при $r = 0$. Оценка (27) при $r = 1$ получается из (8),(9) с использованием неравенств (21),(24), леммы 2 и известной оценки [1] для $|S'_{32}(x)-f'(x)|$. Для того, чтобы получить оценки (27) при $r = 2$ и $r = 3$, используем неравенства

$$\left.\begin{aligned} |S''(x)-f''(x)| &\le (1-t)|S''_i-f''_i| + t|S''_{i+1}-f''_{i+1}| + \\ &\qquad + |R_1(x)|, \\ |S'''(x)-f'''(x)| &\le \left|\frac{S''_{i+1}-f''_{i+1}}{h_i}\right| + \left|\frac{S''_i-f''_i}{h_i}\right| + |R_1(x)|, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где $R_1(x) = f''_i(1-t) + f''_{i+1}t - f''(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ - погрешность интерполяции сплайном первой степени функции $f''(x)$ на сетке Δ_N. Учитывая, что (см. [1])

$$|R_1(x)| \le \frac{h_i^2}{2} t(1-t)\|f^{IV}\|_\infty ,$$

$$|R_1'(x)| \le \frac{h_i}{2} (2t^2-2t+1)\|f^{IV}\|_\infty ,$$

и результаты лемм 1,2, из (30) приходим к (27) при $r = 2,3$. Доказательство теоремы завершено.

Оценки (27) являются, по-видимому, несколько завышенными. К этому выводу можно прийти, анализируя процесс их получения. По построению локально-интерполяционные сплайны занимают промежуточное положение между интерполяционными и локально-аппроксимационными сплайнами, а поэтому можно ожидать, что постоянная K_0 в (27) должна удовлетворять условию $5/384 \le K_0 \le 35/1152$ (5/384 и 35/1152 - постоянные соответственно в оценках для интерполяционного и локально-аппроксимационного сплайнов [1,7]). Нам удалось показать это для случая равномерной сетки, который рассматривается в следующем параграфе.

§2. Оценка погрешности на равномерной сетке

Пусть сетка Δ_N равномерная с шагом $h = (b-a)/N$. При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ локально-интерполяционный сплайн (1) определяется суммой

$$S(x) = \sum_{j=i-1}^{i+2} \beta_j B_j(x). \tag{31}$$

В дальнейшем нам понадобятся значения B-сплайнов [1] на равномерной сетке:

$$B_{i-1}(x) = (1-t)^3/6,$$

$$B_i(x) = (4-6t^2+3t^3)/6,$$

$$\left.\begin{aligned} B_{i+2}(x) &= t^3/6, \\ B_{i+1}(x) &= (1+3t+3t^2-3t^3)/6, \\ t &= \frac{x-x_i}{h}, \quad x\in [x_i, x_{i+1}]. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

ТЕОРЕМА 2. *Если* $f(x)\in W^4_\infty[a,b]$, *то для локально-интерполяционного сплайна на равномерной сетке, удовлетворяющего условиям (2),(3),(5), имеют место точные оценки*

$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_\infty \le K_r h^{4-r}\|f^{IV}\|_\infty, \quad r=0,1,2,3, \qquad (33)$$

где

$$K_0=\frac{41+65\sqrt{13}}{16\cdot 729}\approx 0.023608, \quad K_1=1/18, \quad K_2=1/6,$$

$$K_3=\frac{2}{3}+\frac{6959+211\sqrt{633}}{32\cdot 23^3}\approx 0.69818.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in [x_i, x_{i+1}]$. Сначала рассмотрим случай, когда i - четное число, причем $2\le i\le N-4$. Из формул (3) и (4) имеем

$$\left.\begin{aligned} \beta_j &= (-f_{j-1}+8f_j-f_{j+1})/6, \quad j=i-1,i+1; \\ \beta_k &= (f_{k-2}-8f_{k-1}+38f_k-8f_{k+1}+f_{k+2})/24, \\ &\qquad\qquad k=i,i+2. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Подставляя (32), (34) в (31), получаем

$$\begin{aligned} S(x)= &\,[t(7t^2-18t+12)(f_{i-2}-8f_{i-1})+ \\ &+(131t^3-252t^2+144)f_i+8(-16t^3+18t^2+12t)f_{i+1}+ \\ &+(53t^3-18t^2-12t)f_{i+2}+t^3(f_{i+4}-8f_{i+3})]/144, \qquad (35) \\ &\qquad x\in [x_i, x_{i+1}]. \end{aligned}$$

Заменив величины f_k, $k=i-2,i-1,\dots,i+4$, их разложениями по формуле Тейлора в точке x с остаточным членом в интегральной форме, из (35) получаем

$$S(x)-f(x)=\frac{1}{864}\left\{\sum_{\substack{j=-2\\ j\neq 0}}^{3}\int_{x_{i+j}}^{x_{i+j+1}}\varphi^i_{j+3}(t,v)f^{IV}(v)dv+\right.$$

$$\left.+\int_{x_i}^{x}\varphi^i_-(t,v)f^{IV}(v)dv+\int_{x}^{x_{i+1}}\varphi^i_+(t,v)f^{IV}(v)dv\right\}, \qquad (36)$$

где

$$\varphi^i_1(t,v)=(7t^2-18t+12)t(v-x_{i-2})^3,$$

$$\varphi^i_2(t,v)=(7t^2-18t+12)t((v-x_{i-2})^3-8(v-x_{i-1})^3),$$

$$\varphi^i_-(t,v)=\varphi^i_2(t,v)+(131t^3-252t^2+144)(v-x_i)^3,$$

$$\varphi^i_+(t,v)=8(-16t^3+18t^2+12t)(x_{i+1}-v)^3+\varphi^i_4(t,v),$$

$$\varphi^i_4(t,v)=(53t^3-18t^2-12t)(x_{i+2}-v)^3+\varphi^i_5(t,v),$$

$$\varphi^i_5(t,v)=t^3((x_{i+4}-v)^3-8(x_{i+3}-v)^3),$$

$$\varphi^i_6(t,v)=t^3(x_{i+4}-v)^3.$$

Исследование подынтегральных выражений в (36) показывает, что

$$\varphi^i_1(t,v)\geq 0,\ v\in[x_{i-2},x_{i-1}];$$

$$\varphi^i_2(t,v)\geq 0,\ v\in[x_{i-1},x_i];$$

$$\varphi^i_-(t,v)\leq 0,\ v\in[x_i,x];$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_+^i(t,v) \le 0,\ v\in [x,x_{i+1}];\\ &\varphi_4^i(t,v) \le 0,\ v\in [x_{i+1},x_{i+2}];\\ &\varphi_5^i(t,v) \ge 0,\ v\in [x_{i+2},x_{i+3}];\\ &\varphi_6^i(t,v) \ge 0,\ v\in [x_{i+3},x_{i+4}]. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Применяя неравенство Гёльдера в (36) и учитывая (37), находим

$$|S(x)-f(x)| \le \frac{h^4}{216}\,\varphi(t)\,\|f^{IV}\|_\infty , \quad (38)$$

где $\varphi(t)= 9t^4-16t^3+12t$ Легко показать, что

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(t)= \varphi(t_1)= \frac{41+65\sqrt{13}}{54}, \quad t_1= \frac{1+\sqrt{13}}{6}.$$

Следовательно, верна оценка

$$|S(x)-f(x)| \le K_0 h^4 \|f^{IV}\|_\infty , \quad x\in [x_i,x_{i+1}], \quad (39)$$

где $K_0= \dfrac{41+65\sqrt{13}}{54\cdot 216} \approx 0{,}023608$, $i = 2,4,\dots,N-4$.

По соображениям симметрии оценка (39) справедлива также для промежутков $[x_i,x_{i+1}]$, $i= 3,5,\dots,N-3$. Таким образом, (39) выполняется при $x\in [x_2,x_{N-2}]$, и нам осталось рассмотреть отрезки $[x_i,x_{i+1}]$ при $i= 0,1,N-2,N-1$.

Пусть $x\in [x_0,x_1]$. Согласно (6), имеем $\beta_{-1} = \beta_1-2hf_0'$ и, учитывая (32),(34), из (31) находим

$$\begin{aligned} S(x)=[&(131t^3-252t^2+144)f_0-12h(-12t+18t^2-7t^3)f_0' +\\ &+ 8(-23t^3+36t^2)f_1+(60t^3-36t^2)f_2 +\\ &+ t^3(f_4-8f_3)]/144, \quad x-x_0= th. \end{aligned} \quad (40)$$

Отсюда после подстановки разложений величин f_0,f_0',f_1,f_2,f_3 в точке x получаем

$$S(x)-f(x)=\frac{1}{864}\left\{\int_{x_0}^{x}\varphi_-^0(t,v)f^{IV}(v)dv+\right.$$

$$+\int_{x}^{x_1}\varphi_+^0(t,v)f^{IV}(v)dv+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{3}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\varphi_j^0(t,v)f^{IV}(v)dv\right\},$$

где

$$\varphi_-^0(t,v)=(131t^3-252t^2+144)(v-x_0)^3+$$

$$+36h(-12t+8t^2-7t^3)(v-x_0)^2,$$

$$\varphi_+^0(t,v)=8t^2(-23t+36)(x_1-v)^3+\varphi_1^0(t,v),$$

$$\varphi_1^0(t,v)=t^2(60t-36)(x_2-v)^3+\varphi_2^0(t,v),$$

$$\varphi_2^0(t,v)=t^3((x_4-v)^3-8(x_3-v)^3),$$

$$\varphi_3^0(t,v)=t^3(x_4-v)^3.$$

Анализ показывает, что в пределах интегрирования $\varphi_i^0(t,v)\geq 0$, $i=2,3$, $\varphi_\pm^0(t,v)\leq 0$, $\varphi_1^0(t,v)\leq 0$. После применения неравенства Гёльдера для каждого из интегралов получаем поточечную оценку

$$|S(x)-f(x)|\leq\frac{h^4t^2}{216}(9t^2-23t+18)\|f^{IV}\|_\infty. \tag{41}$$

Максимум функции $t^2(9t^2-23t+18)$ достигается в точке $t=1$ и равен 4. Следовательно,

$$|S(x)-f(x)| \le \frac{h^4}{54}\|f^{IV}\|_\infty, \quad x\in[x_0,x_1]. \tag{42}$$

Пусть $x\in[x_1,x_2]$. В этом случае мы приходим к равенствам

$$S(x)=[(23-111t+141t^2-53t^3)f_0+12h(1-t)^3f_0' +$$
$$+ 8(13+3t-33t^2+17t^3)f_1+(-132t^3+144t^2 +$$
$$+108t+24)f_2+(7t^3-3t^2-3t-1)(8f_3-f_4)]/144,$$

$$S(x)-f(x)= \frac{1}{864}\left\{\int_{x_0}^{x_1}(1-t)\phi_1^1(t,v)f^{IV}(v)dv + \right.$$
$$+\int_{x_1}^{x}(1-t)\phi_-^1(t,v)f^{IV}(v)dv+\int_{x}^{x_2}\phi_+^1(t,v)f^{IV}(v)dv+$$
$$\left.+ (1-t)(7t^2+4t+1)\sum_{j=2}^{3}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\phi_j^1(t,v)f^{IV}(v)dv\right\}, \tag{43}$$

где

$$\phi_1^1(t,v)=(53t^2-88t+23)(v-x_0)^3-36(1-t)^2h(v-x_0)^2,$$
$$\phi_-^1(t,v)=\phi_1^1(t,v)+8(-17t^2+16t+13)(v-x_1)^3,$$
$$\phi_+^1(t,v)=(-132t^3+144t^2+108t+24)(x_2-v)^3 +$$
$$+ (1-t)(7t^2+4t+1)\phi_2^1(t,v),$$
$$\phi_2^1(t,v)=-8(x_3-v)^3+(x_4-v)^3,$$

$$\varphi_3^1(t,v)=(x_4-v)^3 .$$

При этом $\varphi_1^1(t,v)\le 0, \varphi_\pm^1(t,v)\le 0, \varphi_j^1(t,v)\ge 0, j=2,3,$ и после применения неравенства Гёльдера из (43) получаем

$$|S(x)-f(x)|\le \frac{h^4(1-t)}{216}(-9t^3+10t^2+7t+4)\|f^{IV}\|_\infty . \tag{44}$$

Так как максимум правой части в (44) достигается в точке $t=1/3$ и равен 128/27, то верна оценка

$$|S(x)-f(x)| \le \frac{16}{729} h^4\|f^{IV}\|_\infty, \quad x\in[x_1,x_2]. \tag{45}$$

Понятно, что оценки (42) и (45) справедливы соответственно на интервалах $[x_{N-1},x_N]$ и $[x_{N-2},x_{N-1}]$.

Из (39), (42) и (45) следует (33) при $r=0$. Существенно более сложной оказалась задача получения оценок (33) при $r=1,2,3$. Продемонстрируем возникающие здесь трудности на примере вывода оценки для отрезков $[x_i,x_{i+1}]$, $i=2,4,\ldots,N-4$.

Дифференцируя (36) и применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|\le$$

$$\le \frac{h^{-r}\|f^{IV}\|_\infty}{864}\left\{\sum_{\substack{j=-r\\ j\ne 0}}^{3}\int_{x_{i+j}}^{x_{i+j+1}}\left|\frac{\partial^r\varphi^i_{j+3}(t,v)}{\partial t^r}\right|dv+\right.$$

$$\left.+\int_{x_i}^{x}\left|\frac{\partial^r\varphi^i_-(t,v)}{\partial t^r}\right|dv+\int_{x}^{x_{i+1}}\left|\frac{\partial^r\varphi^i_+(t,v)}{\partial t^r}\right|dv\right\}, \tag{46}$$

$$r=1,2,3.$$

Главная проблема при получении констант в оценках - это вычисление интегралов в (46). В отличие от случая $r=0$, подынтегральные функции здесь, вообще говоря, не знакопостоянные, что требует определения точек перемены знака, которые затруднительно выразить в аналитическом виде. Мы использовали для нахождения постоянных в оценках аналитические выкладки в сочетании с численными расчетами на ЭВМ. А именно, вначале численно определялись точки, в которых достигается максимум поточечной оценки (определение поточечной оценки сводится к вычислению правой части (46) при фиксированном t). При всех $r = 1,2,3$ этой точкой оказывается узел x_1. Затем с помощью аналитических выкладок вычисляется точная оценка в узле x_1, и тем самым определяются постоянные в оценках (33).

По-видимому, неравенства (33) для $r = 1,2,3$ могут быть доказаны строго аналитически. Однако, шаги, предпринятые нами в этом направлении, натолкнулись на чрезвычайно громоздкие выкладки.

Погрешность приближения локально-интерполяционным сплайном в случае краевых условий (7) характеризует

ТЕОРЕМА 3. *Если* $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ *, то для локально-интерполяционного сплайна на равномерной сетке, удовлетворяющего условиям* (2), (3), (7), *имеют место оценки:*

$$|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)| \le \tilde{K}_r h^{4-r} \|f^{IV}\|_\infty , \quad r = 0,1,2,3, \tag{47}$$

где

$\tilde{K}_r = K_r$, *если* $x \in [x_2, x_{N-2}]$,

$\tilde{K}_0 = 0{,}018266$, $\tilde{K}_1 = 5/72$, $\tilde{K}_2 = 0.17014$,

$\tilde{K}_3 = 3/4$ *если* $x \in [x_1, x_2] \cup [x_{N-2}, x_{N-1}]$;

$$\tilde{K}_0 = 0.036368, \quad \tilde{K}_1 = 2/9, \quad \tilde{K}_2 = 5/6, \quad \tilde{K}_3 = 17/12,$$

если $\quad x \in [x_0, x_1] \cup [x_{N-1}, x_N].$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Метод вывода оценок (47) тот же, что был использован при доказательстве теоремы 2. Очевидно, постоянные $\tilde{K}_r$ в (47) при $x \in [x_2, x_{N-2}]$ должны совпадать с величинами K_r в оценках (33). Поэтому достаточно рассмотреть отрезок $[x_0, x_2]$ (при $x \in [x_{N-2}, x_N]$ оценки будут такими же). Действуя так же,как при выводе оценок (38), (41), нетрудно получить

$$|S(x)-f(x)| \le \frac{h^4}{72}\,\theta(t)\,\|f^{IV}\|_\infty,$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} (3t^2-14t+16)\,t(1-t), & x \in [x_0, x_1], \\ (-3t^2+2t+5)\,t(1-t), & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Отсюда находятся значения постоянных $\tilde{K}_0$ при $x \in [x_0, x_1]$ и $x \in [x_1, x_2]$. Постоянные $\tilde{K}_r$, $r = 1,2.3$,как и в теореме 2,были получены путем комбинации аналитических выкладок и численных расчетов на ЭВМ.

Отметим, что использование граничных условий (7) вместо (5) приводит к росту постоянных в оценках приближения на крайних интервалах (исключением является постоянная $\tilde{K}_0$ при $x \in$ $\in [x_1, x_2] \cup [x_{N-2}, x_{N-1}]$). Поэтому условия (7) следует использовать лишь тогда, когда неизвестны значения f'_0, f'_N.

§3. Асимптотические оценки погрешности

Если предположить, что функция $f(x)$ более гладкая, чем это требовалось в теоремах 2,3, то в выражении погрешности аппроксимации локально-интерполяционным сплайном можно выделить главный член погрешности, оценивая который приходим к так называемым асимптотическим оценкам. Когда шаг сетки достаточно мал, то такие оценки в ряде случаев дают более точную информацию о погрешности, чем оценки, сформулированные в теоремах 2,3.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $f(x)\in C^4[a,b]$, *то для локально-интерполяционного сплайна на равномерной сетке, удовлетворяющего условиям (2),(3),(5), верны оценки*

$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_\infty \le AK_r h^{4-r}\|f^{IV}\|_C+o(h^{4-r}),\ r=0,1,2,3, \quad (48)$$

где $AK_0=1/72$, $AK_1=2/81$, $AK_2=1/6$, $AK_3=2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (35) разложения

$$f_k=\sum_{r=0}^{4}\frac{f^{(r)}(x)}{r!}(x_k-x)^r+o((x_k-x)^4),$$

после приведения подобных получаем асимптотическое представление погрешности приближения для локально-интерполяционного сплайна (см. также [5]):

$$S(x)-f(x)=-\frac{h^4}{72}\varphi_1(t)f^{IV}(x)+o(h^4), \quad (49)$$

где $\varphi_1(t)=t^2(3t^2-8t+6)$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=2,4,\dots,N-4$. Из (40) получаем, что соотношение (49) верно также при $x\in[x_0,x_1]$ и, следовательно, оно справедливо для всех интервалов $[x_{2j},x_{2j+1}]$, $j=0,\dots,n-1$. Для интервалов $[x_{2j+1},x_{2j+2}]$, $j=0,\dots,n-1$, как нетрудно видеть, имеем

$$S(x)-f(x)=-\frac{h^4}{72}\varphi_1(1-t)f^{IV}(x)+o(h^4). \quad (50)$$

Вычислив максимум $|\varphi_1(t)|$, получаем (48) при $r=0$.

Дифференцируя (49), (50), можно получить выражения для $S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)$, из которых вытекают оценки (48) при r = 1,2,3. Теорема доказана.

Сравнение асимптотических постоянных AK_r с точными постоянными K_r в (33) показывает, что при r = 0,1 и малых h асимптотические оценки предпочтительнее точных.

В случае краевых условий (7) при $x\in[x_2,x_{N-2}]$ имеют место представления (49), (50) и, следовательно, на этом отрезке справедливы оценки (48) с теми же постоянными AK_r. Далее нетрудно показать, что

$$S(x)-f(x)=\frac{1}{24}t(1-t)(2-t)^2h^4f^{IV}(x)+o(h^4),x\in[x_0,x_1],$$

$$S(x)-f(x)=\frac{-1}{24}t(1-t)(1-t^2)h^4f^{IV}(x)+o(h^4),x\in[x_1,x_2].$$

Отсюда следуют оценки

$$|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|\leq \widetilde{AK}_r h^{4-r}\|f^{IV}\|_C+o(h^{4-r}),$$

$$r=0,1,2,3,$$

где

$$\widetilde{AK}_0=(51\sqrt{17}+107)/12288\approx 0{,}025820,$$

$$\widetilde{AK}_1=1/6,\quad \widetilde{AK}_2=2/3,\quad \widetilde{AK}_3=5/4$$

при $x\in[x_0,x_1]\cup[x_{N-1},x_N]$;

$$\widetilde{AK}_0=(51\sqrt{17}-107)/12288\approx 0{,}0084048,$$

$$\widetilde{AK}_1=1/24,\ \widetilde{AK}_2=1/6,\ \widetilde{AK}_3=3/4$$

при $x\in[x_1,x_2]\cup[x_{N-2},x_{N-1}]$.

Отметим, что асимптотические оценки для граничных условий (7) на крайних интервалах грубее аналогичных оценок для граничных условий (5) (исключая постоянные $\widetilde{AK}_0$, $\widetilde{AK}_2$ при $x\in[x_1,x_2]\cup[x_{N-2},x_{N-1}]$). Поэтому для достижения большей точности приближения следует использовать граничные условия (5). Если величины f_0',f_N' не известны, их можно заменить пятиточечными разностными аппроксимациями. Пусть $L_i(x)$ - полином Лаг -

ранжа четвертой степени, интерполирующий в узлах x_k значения f_k, $k = i, i+1, \dots, i+4$. Тогда вместо условий (5) можно использовать граничные условия вида

$$S'(x_0) = L_0'(x_0), \quad S'(x_N) = L_{N-4}'(x_N). \tag{51}$$

На равномерной сетке имеем

$$L_0'(x_0) = (-25f_0+48f_1-36f_2+16f_3-3f_4)/(12h),$$

$$L_{N-4}'(x_N) = (3f_{N-4}-16f_{N-3}+36f_{N-2}-48f_{N-1}+25f_N)/(12h).$$

Легко видеть, что для локально-интерполяционного сплайна с граничными условиями (51) сохраняют силу оценки (48).

Интересен вопрос о сравнении асимптотических представлений погрешности локально-интерполяционного - $S(x)$ и локально-аппроксимационного - $\hat{S}(x)$ сплайнов. Для $\hat{S}(x)$ коэффициенты β_i в (1) задаются равенствами $\beta_i = (-f_{i-1}+8f_i - f_{i+1})/6$, $i = 1, \dots, N-1$ (остальные четыре коэффициента определяются краевыми условиями).

Имеем (см.[5])

$$\hat{S}(x)-f(x) = -\frac{1}{72}(2+3t^2(1-t)^2)h^4 f^{IV}(x)+o(h^4),$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}], \; i = 2, \dots, N-2. \tag{52}$$

Если $\hat{S}(x)$ удовлетворяет краевым условиям (5) и $\hat{S}(x_k) = f_k$, $k = 0, N$, то

$$\hat{S}(x)-f(x) = \psi_i(t)h^4 f^{IV}(x)+o(h^4),$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}], \; i = 0, 1, N-2, N-1, \tag{53}$$

где

$$\psi_0(t) = -t^2(4-5t+2t^2)/48,$$

$$\psi_{N-1}(t) = \psi_0(1-t).$$

$$\psi_1(t) = -(3+3t+3t^2-11t^3+6t^4)/144,$$
$$\psi_{N-2}(t) = \psi_1(1-t).$$

Из (52),(53) следует оценка

$$\|\hat{S}-f\|_C \le \left(\frac{1}{36}+\frac{1}{384}\right)h^4\|f^{IV}\|_C + o(h^4). \qquad (54)$$

Сравнение оценок (48),(54) показывает, что погрешность приближения функции $f(x)$ сплайном $S(x)$ для малых h примерно в два раза меньше погрешности приближения локально-аппроксимационным сплайном $\hat{S}(x)$ Что же касается точности приближения производных, то на крайних интервалах $[x_0,x_2]$, $[x_{N-2},x_N]$ она примерно одинакова для обоих сплайнов. Однако на отрезке $[x_2,x_{N-2}]$ точность приближения производных сплайном $\hat{S}(x)$ выше, чем сплайном $S(x)$ Например, из (52) следует оценка

$$|\hat{S}'(x)-f'(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{216}h^3\|f^{IV}\|_C + o(h^3),$$
$$x \in [x_2,x_{N-2}].$$

Аналогом граничных условий (7) в случае локальной аппроксимации являются требования

$$\hat{S}(x_k) = f_k, \quad k = 0,1,N-1,N. \qquad (55)$$

При этом в (53) следует положить

$$\psi_0(t) = t(1-t)(6-5t+t^2)/24,$$
$$\psi_1(t) = -t(6-3t-4t^2+3t^3)/72.$$

Сравнение асимптотических представлений для $S(x)$ и $\hat{S}(x)$ с краевыми условиями (7) и (55) соответственно показывает, что локально-интерполяционный сплайн здесь также дает большую точность приближения функции, нежели локально-аппрок - симационный.

§4. Численные результаты

Приведем результаты об аппроксимации четырех функций из [1, с.52]:

$$f_1(x) = \exp(x),$$

$$f_2(x) = \exp(-10x),$$

$$f_3(x) = \sin(\pi x),$$

$$f_4(x) = [1+100(x-1/2)^2]^{-1}, \quad x\in[0,1],$$

локально-интерполяционным - $S(x)$ и локально-аппроксимационным - $\hat{S}(x)$ сплайнами на равномерной сетке Δ_N с шагом h.

Таблица

h	f	R_0	$\hat{R}_0$	R_1	$\hat{R}_1$
0.1	f_1	$3,5\cdot10^{-6}$	$6,9\cdot10^{-6}$	$6,2\cdot10^{-5}$	$6,8\cdot10^{-5}$
	f_2	$6,1\cdot10^{-3}$	$7,4\cdot10^{-3}$	$1,2\cdot10^{-1}$	$1,3\cdot10^{-1}$
	f_3	$1,4\cdot10^{-4}$	$2,9\cdot10^{-4}$	$2,5\cdot10^{-3}$	$1,3\cdot10^{-3}$
	f_4	$8,3\cdot10^{-2}$	$6,7\cdot10^{-2}$	$1,5$	$1,8$
0.05	f_1	$2,3\cdot10^{-7}$	$4,7\cdot10^{-7}$	$8,0\cdot10^{-6}$	$8,9\cdot10^{-6}$
	f_2	$5,7\cdot10^{-4}$	$8,8\cdot10^{-4}$	$2,2\cdot10^{-2}$	$2,2\cdot10^{-2}$
	f_3	$8,5\cdot10^{-6}$	$1,8\cdot10^{-5}$	$3,0\cdot10^{-4}$	$1,2\cdot10^{-4}$
	f_4	$7,2\cdot10^{-3}$	$1,7\cdot10^{-2}$	$3,0\cdot10^{-1}$	$6,0\cdot10^{-1}$
0.025	f_2	$4,4\cdot10^{-5}$	$7,9\cdot10^{-5}$	$3,2\cdot10^{-3}$	$3,4\cdot10^{-3}$
	f_4	$5,8\cdot10^{-4}$	$2,0\cdot10^{-3}$	$5,0\cdot10^{-2}$	$1,0\cdot10^{-1}$

В таблице обозначено

$$R_r = \max_{x\in\Delta}|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|, \quad r = 0,1,$$

где Δ — равномерная сетка на $[0,1]$ с шагом $h/10$ Аналогичные величины для сплайна $\hat{S}(x)$ обозначены через $\hat{R}_r$, $r = 0,1$.

Данные таблицы свидетельствуют о том, что локально-интерполяционный сплайн обеспечивает более высокую точность приближения функции по сравнению с локально-аппроксимационным сплайном, Несоответствие выводам асимптотического анализа погрешности приближения, которое наблюдается для функции f_4 при $h = 0.1$, объясняется тем, что при таком шаге сетки асимптотические оценки еще "не работают" (см.результаты при $h = 0.05$, 0.025).

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. -М.: Изд-во Моск. ун-та,1983.-208 с.

3. ЖАНЛАВ Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через В-сплайны //Методы сплайн-функций.-Новосибирск, 1981. - Вып. 87: Вычислительные системы. -С. 3-10.

4. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами //Проблемы обработки информации. - Новосибирск,1983. - Вып. 100: Вычислительные системы. -С. 83-100.

5. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Локальная аппроксимация кубическими сплайнами с элементами интерполяции //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1987. -Вып. 121: Вычислительные системы.-С.46-54.

5. ЮФЕРЕВ В.С. Локальная аппроксимация кубическими сплайнами // Журн.вычисл.математики и мат.физики. - 1981. -Т. 21, № 1. -С. 5-10.

6. ЖЕЛУДЕВ В.А. О локальной сплайн-аппроксимации на произвольных сетках //Изв.вузов. Математика. - 1987. - № 8. - С. 14-18.

Поступила в ред.-изд.отд.

28 сентября 1990 года