МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ НАУКИ
(Вычислительные системы)
1991 год Выпуск 138

УДК 518.74

ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ (МЕТОДОЛОГИЯ, МЕТОД, ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА SINTEZ). 1. МЕТОДОЛОГИЯ

Е.Е. Витяев

Введение

В настоящее время в таких областях науки, как экспертное оценивание, социология, психология, экономика, геология, сельское хозяйство и т.д. собраны разнообразные массивы данных. Эти данные могут иметь различную форму записи, включать признаки и величины различной природы, измеряться в различных шкалах.

Одними из широко используемых методов обработки данных являются методы обнаружения закономерностей и предсказания.

Если мы знаем, что обрабатываемые данные являются только количественными или только дискретными, то, как правило, проблем при обработке этих данных не возникает. Их надо обрабатывать известными методами обнаружения закономерностей и предсказания. Проблемы возникают при обработке данных с недостаточно определенной группой допустимых преобразований шкал, смешанных данных и новых видов данных:

- для обработки смешанных данных или новых видов данных, как правило, разрабатываются новые методы,

- при приведении данных к одному из известных видов они часто искажаются. Если они преобразуются в количественные данные (т.е. с числами разрешается производить любые математические операции, вне зависимости от их интерпретации), то в них вносится бессмысленная информация (связанная с произволом в выборе числовых представлений), проявляющаяся в том,что невозможно приемлемым образом проинтерпретировать полученные результаты. Если рассматриваемые данные преобразуются в количественные данные за счет использования дополнительных предположений или моделей, то это связано с большими математическими трудностями. Если данные преобразуются в дискретные, то это ведет к потере информации.

Эти трудности возникают из-за разнообразия и неопределенности эмпирического содержания данных. Под эмпирическим содержанием данных понимается такое содержание данных,которое не зависит от произвола в выборе числовых представлений величин и, в частности, от выбора единиц измерения. Более точно - это то содержание данных, которое в соответствии с теорией измерений [1-5] может быть представлено многосортной эмпирической системой и системой аксиом, которые интерпретируются в системе понятий предметной области (в решаемой задаче).Точное определение эмпирического содержания данных будет дано в §2 в виде эмпирической аксиоматической теории.

Поставим задачу "полного" эмпирического анализа содержания данных. Такая постановка требует нового подхода к обработке данных - представления данных в соответствии с теорией измерений в многосортных эмпирических системах, удовлетворяющих некоторым системам аксиом, и применения к ним специально разработанных методов обнаружения закономерностей и предсказания, работающих с многосортными эмпирическими системами.

"Полнота" эмпирического анализа будет следовать из:

1) полноты учета всей интерпретируемой (в системе понятий предметной области) информации,содержащейся в данных, которая следует из теории измерений;

2) "полноты" рассматриваемого множества закономерностей (см. §5).

С этой целью разработаны метод обнаружения закономерностей и реализующая его программная система SINTEZ.

Пользователь в диалоге с программной системой задает некоторое параметрическое семейство формул:

$$A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; A_n \Rightarrow A_0, \tag{1}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ - логические выражения (логические выражения включают логические связки AND, OR, NOT, скобки и произвольные арифметические выражения с параметрами). Параметры могут быть произвольными и изменяться в цикле. Параметрами могут быть номера признаков, интервалы изменения признаков, выделенные значения признаков, параметры,модифицирующие признак (подвергающие его различным преобразованиям),и т.д. Для каждого набора значений параметров мы получаем конкретную формулу вида:

$$\forall X_1,\ldots,X_n (P_1^{\varepsilon 1}(X_1^1,\ldots,X_{m1}^1) \;\&\; \ldots \;\&\; P_n^{\varepsilon n}(X_1^n,\ldots,X_{mn}^n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_0^{\varepsilon 0}(X_1^0,\ldots,X_{m0}^0)),$$

которая проверяется на закономерность.

Множество формул (1) является в определенном смысле полным (см.§5). Формулы (1) проверяются на закономерности на многосортной эмпирической системе.

Программная система SINTEZ позволяет реализовать стратегию направленного и все более детального анализа эмпирического содержания данных, задавая последовательно уточняющиеся параметрические семейства формул (1). Эта стратегия согласуется с теорией измерений, показывающей, что шкалы величин упорядочены в соответствии с богатством информации, содержащейся в значениях величин - от шкалы наименований и шкалы порядка к шкале интервалов, отношений и абсолютной шкале.

В соответствии с этой стратегией, сначала следует провести грубую обработку данных в шкале наименований. Имеющиеся числовые значения следует разбить на интервалы, которые можно задавать параметрами. Затем следует найти все закономерности в шкале порядка и наименований. После такой обработки все признаковое пространство разобьется на области, выделяемые именами или интервалами, внутри которых будет иметь место монотонная зависимость в шкале порядка между некоторыми признаками.

Более точный анализ вида зависимости нужно проводить за счет информации, содержащейся в более сильных шкалах, используя соответствующие этим шкалам отношения и операции. Для этого следует проверить выполнимость известных систем аксиом теории измерений на обнаруженных участках монотонности.Это можно сделать системой SINTEZ, проверяя выполнимость заложенных в ней систем аксиом теории измерений. Если какая-либо система аксиом выполнена, то это позволяет определить вид функциональной зависимости и адекватные решаемой задаче шкалы величин. Если система аксиом не обнаружена, то система позволяет определять в виде закономерностей характерные свойства функций (монотонность, аддитивность, экспоненциальность и т.д.), наиболее точно характеризующие вид зависимости.

§2. Критический анализ методов анализа данных

Проведем критический анализ известных методов обработки матриц объект-признак - методов регрессионного, корреляционного, дисперсионного и ковариационного анализов. Эти методы, за редким исключением, применяются следующим образом: данные либо усиливаются (в смысле теории измерений) путем абсолютизации числовых значений величин (т.е. с числами разрешается производить любые математические действия вне зависимости от их осмысленности и интерпретируемости), либо данные сводятся к дискретным данным путем различного рода градуирований. В первом случае вносится бессмысленная информация,которая проявляется в том, что невозможно приемлемым образом проинтерпретировать полученные результаты (или точнее, эти результаты не инвариантны относительно допустимых преобразований шкал), во втором случае часть информации теряется. Поясним этот тезис.

Рассмотрим отдельно шесть случаев.

1.1. Матрица объект-признак содержит только физические величины, и априори известно, что решаемая задача относится к области физики.В этом случае эмпирические системы величин известны [4] и применение перечисленных выше методов анализа данных наиболее обоснованно. Но даже в этом случае возникают следующие трудности.

а) Так как величины являются физическими и закономерная связь между величинами физически интерпретируема, то, как следует из теории измерений, эти величины измеряются в шкале отношений или лог-интервальной шкале. Требование инвариантности методов обработки данных относительно допустимых преобразований шкал является необходимым критерием осмысленности получаемых методами результатов - результаты обработки данных не должны зависеть от нашего произвола в выборе числовых представлений величин и, в частности, от произвола в выборе единиц измерения. Проверка методов обработки данных на инвариантность и поиск инвариантных методов, как показано в работах [6-11], являются трудной математической задачей. Показано, что далеко не всякий метод инвариантен относительно допустимых преобразований шкал.

Требование инвариантности не является,тем не менее,достаточным критерием осмысленности.

б) Даже если метод обработки данных инвариантен относительно допустимых преобразований шкал,то,как показано в теории измерений [1,2,4,12], это еще не означает, что результаты обработки данных интерпретируемы в терминах отношений из эмпирических систем. Такому более сильному требованию на интерпретируемость удовлетворяют основные законы классической физики,но существующие методы обработки данных ему, как правило, не удовлетворяют. Тем не менее, для многих практических задач требуется именно такая интерпретируемость - в системе понятий предметной области, в которой интерпретируются измерительные процедуры эмпирических систем и решаемая задача. Только при такой интерпретации результаты обработки данных будут результатами для соответствующей предметной области.

Инвариантные методы удовлетворяют более слабому требованию на интерпретируемость. Если методом, например аппроксимации,установлено, что величины $y, x_1, \ldots, x_n$ в матрице объект-признак связаны зависимостью $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, то, хотя мы и не можем проинтерпретировать функцию f в терминах отношений из эмпирических систем или вывести ее из соответствующих систем аксиом, как это имеет место для законов классической физики, мы можем проинтерпретировать отношение равенства "=". Интерпретация равенства означает,что относительно величины y мы можем сказать только то, что она является некоторой функцией величин $x_1, \ldots, x_n$. Относительно самой функции мы ничего более сказать не можем. То же самое верно и для других методов. Например, в задачах распознавания образов не интерпретируются решающие правила,задаваемые функциями, а интерпретируется только решение - принадлежность первому или второму образам. В некоторых методах таксономии не интерпретируются функции, определяющие вид таксонов, а интерпретируется только принадлежность первому, второму и т.д. таксонам.

1.2. Матрица объект-признак содержит только физические величины,но рассматриваемая задача является не физической, а, например, геологической, медицинской, сельскохозяйственной и т.д. В этом случае шкалы рассматриваемых физических величин неизвестны, так как неизвестны их множества допустимых преобразований. Допустимые преобразования определяются эмпирической и числовой системами. Если рассматриваемые величины физические, то эмпирические системы должны быть физически интерпретируемы. Если решаемая задача также физическая, то интерпретация эмпирической системы сохраняется. Если же решаемая задача принадлежит к другой области, то необходимо проверить, можно ли проинтерпретировать измерительную процедуру и отношения из эмпирической системы в терминах этой предметной области. Если какие-то отношения нельзя проинтерпретировать, то эмпирическую систему следует изменить, убрав, например, некоторые отношения. Это изменит эмпирическую систему и множество допустимых преобразований. Например, для многих физических величин существует эмпирически интерпретируемое физическое отношение "$\bullet$", обладающее свойствами операции сложения. Для физических величин, не имеющих этой операции, она определяется с помощью закона, связывающего эту величину с двумя другими физическими величинами, имеющими такое отношение. Примером может служить температура, измеряемая посредством термометра. Температура не имеет отношения "$\bullet$", но его можно определить с помощью термометра, используя закон, связывающий температуру с длиной ртутного столба в термометре. Отношение $t_1 \bullet t_2 \sim t_3$ будет иметь место тогда и только тогда, когда для длин e_1, e_2, e_3 ртутного столба выполнено отношение $e_1 \bullet e_2 \sim e_3$. Рассмотрим это же отношение в случае, если решаемая задача относится к области медицины. Матрица объект-признак для медицинской задачи может содержать различные физические величины, характеризующие больных - температуру, давление, рост, вес и т.д. Отношение $t_1 \bullet t_2 \sim t_3$, обладающее свойствами операции сложения, в медицине неинтерпретируемо. При *существующем уровне наших знаний* невозможно придумать такую опе -

рацию или процедуру над больным, имеющую медицинский смысл, чтобы из двух его температур t_1 и t_2 можно было получить температуру $t_1 \bullet t_2$. Но, может быть, операцию $t_1 \bullet t_2$ можно проинтерпретировать с помощью закона, связывающего температуру с какой-нибудь другой величиной, например, ростом, весом, возрастом и т.д., как это имеет место в физике с термометром. При существующем уровне наших знаний это также представляется невозможным. Таким образом, операцию $t_1 \bullet t_2$ в медицине проинтерпретировать не удается. Тогда эмпирическая система температуры для медицинских задач должна быть какой-то другой, например, содержать только отношение порядка. Отсюда следует, что множество допустимых преобразований величины "температура" не определено, и, значит, у нас нет даже необходимого критерия осмысленности результатов обработки данных - инвариантности относительно множества допустимых преобразований, так как это множество неизвестно. Зависимость типа шкал от того, в какой области знаний они рассматриваются, признается и другими авторами [2,13,14]. Несмотря на это, числовые методы широко применяются для решения различных нефизических задач.

Какую же пользу несет применение этих методов? Как и в п. 1.1б, интерпретируемым остается только отношение равенства, но уже не относительно инвариантной функции f, а относительно параметризованного семейства таких функций (определение адекватной параметризации см. в [2, с. 48]). Это относится и к решающим правилам, и к функциям регрессии и т.д. Решающие правила позволяют по величинам $x_1, \ldots, x_n$ осуществлять предсказания принадлежности к образу; функции, описывающие таксоны, позволяют классифицировать объекты и т.д. В получении предсказаний с помощью параметризованных семейств функций и состоит польза от применения числовых методов.

Таким образом, этими методами задача предсказания решается. Однако задача обнаружения закономерностей в этом случае смысла не имеет. Закономерности должны отражать изучаемую нами действительность, а не наш произвол в выборе числовых представлений. Поэтому они должны быть инвариантны относительно допу - стимых преобразований шкал. В теории измерений это требование формулируется как требование адекватности [2].Так как множество допустимых преобразований неизвестно, то мы не можем найти адекватные функциональные зависимости.

1.3. Матрица объект-признак содержит нефизические количественные величины. Так как для нефизических количественных величин твердо установленных шкал практически не существует, то неопределенность во множестве допустимых преобразований еще больше. Поэтому мы придем к тому же выводу, что и в п. 1.2.

1.4. Матрица объект-признак содержит только дискретные данные (все признаки измерены в шкале наименований). В этом случае все обстоит достаточно благополучно благодаря тому, что для шкал наименований нет практически разницы между эмпирической и числовой системами. Числа в шкале наименований играют роль имен, а не собственно чисел. Требование инвариантности относительно допустимых преобразований переходит в этом случае в требование инвариантности относительно переименований значений признаков. Этому требованию существующие методы, как пра - вило, удовлетворяют. Они удовлетворяют и более сильному требованию на интерпретируемость, рассмотренному в п.1.1.6 - интерпретируемости в терминах отношений из эмпирических систем. Это следует из представимости дискретных данных в рамках эмпирических систем с помощью одноместных отношений. Методы обработки дискретных данных также нетрудно представить как методы обработки данных в терминах одноместных отношений.

1.5. Матрица объект-признак содержит не количественные и дискретные величины, а, например, ранговые, балльные, полупорядковые, балльные со сложением и т.д. В этом случае мы по - лучим те же выводы, что и в п. 1.3. Отличие состоит в том, что такие матрицы часто пытаются свести к матрицам, содержащим только дискретные величины. Это делается путем различного рода градуирований и разбиений значений признаков. Можно показать, что при таком сведении теряется довольно много существенной информации.

1.6. Матрица объект-признак содержит смесь различных данных. В этом случае возникают все из упомянутых уже трудностей и, кроме того, возникает необходимость разрабатывать методы, оперирующие смешанными данными. В настоящее время уже разработаны некоторые методы обработки смесей данных [15-18]. При этом, как правило, для каждого сочетания различных данных разрабатываются свои методы.

§2. Эмпирические аксиоматические теории

В данном параграфе вводится центральное понятие эмпирической аксиоматической теории. Оно является формальным выражением понятия "эмпирическое содержание данных". Формулировка метода обнаружения закономерностей, рассматриваемая в следующем параграфе, определяется в рамках этих теорий. Эмпирические аксиоматические теории являются конкретизацией соответствующего понятия, возникающего в логике эмпирических исследований [19]. Но это понятие возникло не только из логики эмпирических исследований, но и из критического анализа основных понятий теории измерений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Эмпирической аксиоматической теорией будем называть набор:

$$\mathfrak{M} = \langle \mathrm{Obs}^{V}, V, \Omega, S \rangle ,$$

где

Obs^{V} - измерительная процедура, задающая интерпретацию символов словаря V. Ее применение к произвольному множеству объектов $\mathbf{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ дает конечную формальную конструкцию pr^V, состоящую из символов объектов $a_1, \dots, a_m$, символов словаря V и,возможно, других вспомогательных символов. Эту конструкцию будем называть протоколом наблюдения, проведенного в соответствии с инструкцией Obs^V над множеством объектов $\mathbb{A}$ в словаре V. Будем предполагать, что измерительная процедура Obs^V применима к любому множеству объектов $\mathbb{A}$.Это всегда можно сделать введением третьего значения истинности "не определено" для отношений из V. Кроме того,будем предполагать, что измерительная процедура определена настолько подробно, что после предъявления множества объектов $\mathbb{A}$ дальнейший ход измерений, вплоть до получения протокола, определяется однозначно. Таким образом, Obs^V можно определить как отображение, ставящее в соответствие каждому множеству объектов $\mathbb{A}$ протокол $pr^V = Obs^V(\mathbb{A})$;

pr^V - протокол наблюдения. Мы специально не будем конкретизировать вид этой формальной конструкции, так как в разных наблюдениях она может быть различной.Единственно,что всегда будет требоваться - это точное определение истинности высказываний в словаре V на pr^V ;

$V = \{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{n_1}\}$ - словарь (сигнатура) наблюдаемых терминов. Будем предполагать, что равенство "=" всегда содержится в V ;

$\Omega = \{P_1, \dots, P_{n_2}\}$ - словарь (сигнатура) теоретических терминов. Отношения из Ω являются теоретическими конструктами и идеализацией непосредственно наблюдаемых отношений $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ словаря $V = \{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\}$.Взаимосвязь отношений теоретического и эмпирического уровней должна осуществляться с помощью правил соответствия;

$S = S^V \cup S^\Omega \cup S^{V \cup \Omega}$ - система аксиом в словаре $V \cup \Omega$. Она включает аксиомы S^V в словаре V наблюдаемых терминов, аксиомы $S^{V \cup \Omega}$ в объединенном словаре $V \cup \Omega$ и аксиомы в словаре теоретических терминов. Аксиомы $S^{V \cup \Omega}$, включающие одновременно термины эмпирического и теоретического уровней, определяют правила соответствия [20,21] между этими уровнями. Эти правила должны выводиться из той естественнонаучной теории, в рамках которой описывается измерительная процедура Obs^V. Если правил соответствия нет, то нет и теоретического уровня. Тогда множества Ω, $S^{V\cup\Omega}$, S^{Ω} пусты, и эмпирическая аксиоматическая теория принимает вид: $\mathfrak{M} = \{Obs^V, V, S^V\}$.

Будем говорить, что эмпирическая аксиоматическая теория имеет эмпирическую интерпретацию, если выполнены следующие условия: не только правила соответствия выводятся и интерпретируются в рамках рассматриваемой естественнонаучной теории, но и измерительная процедура Obs^V, протоколы наблюдений pr^V, словари V и Ω и система аксиом S описываются в рамках этой теории. В дальнейшем мы будем рассматривать только эмпирически интерпретируемые эмпирические аксиоматические теории.

Понятие эмпирической системы $\mathfrak{M} = \langle A; \Omega \rangle$, используемое в теории измерений, можно сформулировать в рамках эмпирических аксиоматических теорий следующим образом. Эмпирическая система является неприводимой [2] моделью системы аксиом S^{Ω}. Смысл неприводимости состоит в том, что любые два объекта $a, b \in A$ различимы с помощью отношений из Ω. Понятием эмпирической системы мы будем пользоваться в указанном смысле.

§3. Представление известных типов данных в эмпирических аксиоматических теориях

Анализ эмпирического содержания данных должен начинаться с представления соответствующих данных в эмпирических аксиоматических теориях. Покажем, каким образом такие известные типы данных, как парные сравнения, множественные сравнения, матричное представление бинарных отношений, матрицы упорядочений, матрицы близости и матрицы объект-признак могут быть представлены в эмпирических аксиоматических теориях. Эти типы данных встречаются в таких областях, как экспертное оценивание,социология, психология,психофизика, геология, медицина, сельское хозяйство и т.д. Все эти области характеризуются тем, что в них встречаются признаки и величины самой разнообразной природы. Данный параграф преследует следующие цели.

1. Показать, что эмпирические аксиоматические теории являются достаточно общим способом представления данных.Это следует из того, что они позволяют представлять известные типы данных, смеси различных данных, признаки и величины, не имеющие числового представления,и данные, измеренные в различных шкалах.

2. Привести для каждого тига данных, используя представление их в эмпирических аксиоматических теориях, относящиеся к ним результаты теории измерений. Эти результаты включают в себя системы аксиом в языке первого порядка и теоремы представления и единственности, указывающие, какие числовые представления для данных систем аксиом существуют.Применяя метод обнаружения закономерностей к данным,представленным в рамках эмпирических аксиоматических теорий, можно определять выполнимость систем аксиом теории измерений и строить соответствующие этим системам аксиом числовые представления величин (шкалы) и функциональные зависимости. По шкалам величин можно определять группы допустимых преобразований, что позволяет корректно применять методы анализа данных, инвариантные относительно соответствующих групп допустимых преобразований.

3. Для каждого типа данных привести основные существующие в настоящее время методы их обработки. Для этих методов определить область их применимости и аргументировать, что эти области не перекрывают область применимости метода обнаружения закономерностей.

Рассмотрим сначала данные, в которых многоместные отношения возникают естественным образом в силу специфики самого объекта исследования. Как отмечается в работах [10,11], источником информации часто являются суждения человека. Как показали многие эксперименты, человек более правильно и с меньшими затруднениями отвечает на вопросы качественного, в частности, сравнительного характера, чем количественного. В различных дисциплинах человек называется по-разному: как эксперт в экспертных оценках, как испытуемый в психологии и психофизике, как респондент в социологии, как пациент в медицине и т.д.

3.1. Парные сравнения. Результаты, полученные по методу парных сравнений, можно представить в виде четырехмерной матрицы $(x_{ij\gamma\delta})$ [22], где i,j - номера сравниваемых объектов, взятых из некоторого множества $\mathbb{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\gamma = 1, \dots, n$ - номера экспертов, сравнивающих объекты из $\mathbb{A}$; $\delta = 1, \dots, r_\gamma$ - номер сравнения (пары объектов одним и тем же экспертом могут сравниваться r_γ раз). Обозначим [1] объект a_i, сравниваемый экспертом γ в сравнении с номером δ, через $a_i^{\gamma\delta}$. Тем самым мы предполагаем, что сам объект и эксперт могут изменяться от сравнения к сравнению. Значение $x_{ij\gamma\delta} = 0$ (1), если объект $a_i^{\delta\gamma}$ предпочтительнее, чем объект $a_j^{\delta\gamma}$.

Методы парного сравнения используются в социологии в экспертных оценках, психологии [23] и других областях.

Целью этих методов является получение полного упорядочения объектов множества $\mathbb{A}$. Для получения такого упорядочения в разных методах используются различные априорные предположения, формализованные в виде моделей парного сравнения [13,22].

---

1) Мы не будем, для простоты, вводить разные обозначения для объекта и символа этого объекта. Эту разницу будем выражать тем, что в первом случае будем говорить - объект $\mathbf{a}$, а во втором - символ объекта $\mathbf{a}$.

Этими моделями и определяются области применимости соответст - вующих методов.

Определим, какие эмпирические аксиоматические теории соответствуют методам парного сравнения. Для методов парного сравнения сделаем это подробно. Матрицу $(x_{ij\gamma\delta})$ можно понимать как матричную запись значений истинности n бинарных отношений предпочтения $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$, соответствующих предпочтениям n экспертов: $\mathbb{P}_\gamma(a_i^{\gamma\delta}, a_j^{\delta\gamma}) \Leftrightarrow (x_{ij\delta\gamma} = 1)$. Кроме того, у нас определено отношение равенства "=" между объектами. Равенство $a_i^{\delta\gamma} = a_j^{\delta\gamma}$ определено для объектов $a_i^{\delta\gamma}, a_j^{\delta\gamma}$, сравниваемых экспертом γ в сравнении δ, и истинно тогда и только тогда, когда эти объекты совпадают. Определим еще отношение эквивалентности "$\approx$", указывающее, что в разных сравнениях с разными экспертами участвует один и тот же объект из $\mathbb{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_i^{\delta_1\gamma_1} \approx a_j^{\delta_2\gamma_2} \Leftrightarrow i = j$. Словарем наблюдаемых терминов V, таким образом, является множество $V = \{=, \approx, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\}$. Определим протокол pr, являющийся представлением матрицы $(x_{ij\gamma\delta})$ в эмпирической аксиоматической теории. Пусть $A = \{a_j^{\delta\gamma}\}$. Только одно отношение "$\approx$" из V определено на всем множестве A. Отношения P_γ определены только на таких парах объектов $a_{i1}^{\delta_1\gamma_1}, a_{j2}^{\delta_2\gamma_2}$, для которых $\delta_1 = \delta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$. Введем для отношений из V третье значение истинности "не определено". Доопределим отношения $=, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ на всем множестве A с помощью этого значения. Тем самым мы определили предикаты из V на всем множестве A, что дает нам в качестве протокола наблюдения pr модель $pr = \langle A; V \rangle$. Инструкция к наблюдениям Obs^V, дающая в результате наблюдения над множеством $\mathbb{A}$, протокол pr^V, $Obs^V(\mathbb{A}) = pr$, состоит в том, чтобы провести все наблюде -

ния, необходимые для получения матрицы $(x_{ij\delta\gamma})$, и преоб - разовать ее в модель pr. Словарем Ω будет множество $\Omega = \{=, \sim, P_1, \dots, P_n\}$. Множества аксиом S^V и S^Ω содержат аксиомы, которым удовлетворяют отношения из V и Ω. Эти множества могут отличаться друг от друга, поскольку,например, свойство транзитивности может выполняться для отношения "$\sim$" и не выполняться для отношения "$\approx$". Аксиомы из $S^{V\cup\Omega}$ должны следовать из тех знаний и представлений об учете точности измерения, возможностях идеализации, которые сложились в рассматриваемой области.

Итак, мы определили эмпирические аксиоматические теории для методов парного сравнения. Результаты теории измерений,относящиеся к словарю V, будут приведены в п.3.3.

3.2. Множественные сравнения [10,11,13]. Пусть дано множество объектов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Группе из n экспертов поочередно предъявляются все возможные наборы из k объектов множества A. Каждый эксперт должен упорядочить каждый набор в соответствии с некоторым предпочтением. Обозначим через $a_{il}^{\delta\gamma}$ тот факт, что объект с номером i в наборе с номером δ экспертом γ был поставлен на l-е место, $i = 1,2,\dots$ $\dots, m$; $\gamma = 1,2,\dots, n$; $\delta = 1,2,\dots, \binom{k}{m}$; $l = 1,\dots, k$. Множество полученных упорядоченных наборов обозначим через $R = \{\langle a_{i_1 1}^{\gamma\delta}, a_{i_2 2}^{\gamma\delta}, \dots, a_{i_k k}^{\gamma\delta}\rangle\}$.

Целью метода множественных сравнений является построение результирующего упорядочения объектов по полученным упорядочениям из R. Эти методы также опираются на определенные априорные предположения в виде моделей множественного сравнения [10,11,13]. Этими моделями задается тем самым их область при - менимости.

Поставим в соответствие каждому эксперту γ и набору δ отношение предпочтения $P(a^{\delta\gamma}_{i_1 l_1}, a^{\delta\gamma}_{i_2 l_2}) \Leftrightarrow l_1 \le l_2'$. Определим два отношения эквивалентности "$\approx$" и "$\approx_\delta$":

$$a^{\delta_1\gamma_1}_{i_1 l_1} \approx a^{\delta_2\gamma_2}_{i_2 l_2} \Leftrightarrow i_1 = i_2;$$

$$a^{\delta_1\gamma_1}_{i_1 l_1} \approx_\delta a^{\delta_2\gamma_2}_{i_2 l_2} \Leftrightarrow \delta_1 = \delta_2$$

и отношение равенства "=":

$$a^{\delta\gamma}_{i_1 l_1} = a^{\delta\gamma}_{i_2 l_2},$$

истинное тогда и только тогда, когда в сравнении объектов из набора с номером δ экспертом γ объекты с именами $a^{\gamma\delta}_{i_1 l_1}$ и $a^{\gamma\delta}_{i_2 l_2}$ равны между собой. Получим словарь наблюдаемых терминов $V = \{=, \approx, \approx_\delta, P_1, \dots, P_n\}$ для методов множественного сравнения. Представление данных R в эмпирических аксиоматических теориях задается моделью pr, определенной на множестве $A = \{a^{\delta\gamma}_{il}\}$, $\gamma = 1,\dots,n$; $\delta = 1,\dots,\binom{k}{m}$; $i = 1,\dots,m$; $l = 1,\dots,k$. Отношения из V доопределяются на всем множестве A с помощью значения "не определено". Результаты из теории измерений, относящиеся к словарю V, также будут приведены в п.3.3.

3.3. Матричное представление бинарных отношений. Бинарное отношение $P(a,b)$, определенное на множестве объектов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, задается матрицей (ε_{ij}), $i,j = 1, \dots, m$; где $\varepsilon_{ij} = 1$ (0) означает, что $P(a_i, a_j)$ истинно (ложно). Такой матрицей можно задать произвольное бинарное отношение на множестве A. Такое представление широко исполь -

зуется в работах [9-11, 14,18,24-26] ввиду его привычности и простоты. Наиболее часто используются отношения эквивалентности, квазипорядка, частичного порядка и лексикографического порядка. Данные, включающие эти отношения, встречаются в следующих задачах.

3.3.1. Отношение эквивалентности. Задает некоторое разбиение множества объектов. С его помощью задают: номинальные признаки (признаки в шкале наименований), в частности признаки,определяющие принадлежность к образу в распознавании образов; результаты классификации, таксономии и кластеризации, полученные как опросом экспертов, так и применением машинных методов.

3.3.2. Отношения порядка и квазипорядка. Любой признак, измеримый в шкале порядка, задает некоторое отношение порядка, например,шкала Морса твердости минералов или шкала силы ветра. Упорядочения объектов экспертами и упорядочения, получаемые методами ранжирования, также являются примерами шкал порядка.

3.3.3. Отношения частичного и древовидного порядка. Возникают в лингвистике при построении дерева связей. В иерархической классификации, при задании вложенных классов или таксонов. В психологии и других областях, при задании дерева целей. В социологии [27] отмечается, что для социологических данных более типичны отношения частичного порядка и толерантности, чем порядка и квазипорядка. В психологии [23,28] также возникают нетранзитивные предпочтения.

Матрица бинарного отношения фиксирует некоторое бинарное отношение $\mathbb{P}$, которое включается в словарь $V = \{\mathbb{P}\}$ эмпирической аксиоматической теории $\mathfrak{M}$. Протокол наблюдения pr^V определим как модель $pr^V = \langle \mathbb{A}; \mathbb{P} \rangle$. В качестве словаря теоретических терминов возьмем словарь $\Omega = \{P\}$.

Приведем результаты теории измерений, относящиеся к словарям V, включающим одно бинарное отношение P.

3.3.4. Отношение толерантности:

I. $\mathbb{P}(a,a)$;

II. $\mathbb{P}(a,b) \Leftrightarrow \mathbb{P}(b,a)$.

3.3.5. Отношение эквивалентности:

I. $\mathbb{P}(a,a)$;

II. $\mathbb{P}(a,b) \Leftrightarrow \mathbb{P}(b,a)$;

III. $\mathbb{P}(a,b)$ & $\mathbb{P}(b,c) \Rightarrow \mathbb{P}(a,c)$.

3.3.6. Отношение строгого частичного порядка для любых $a,b,c \in A$:

I. $\overline{P}(a,a)$;

II. $P(a,b)$ & $P(b,c) \Rightarrow P(a,c)$.

Числового представления не существует.

3.3.7. Отношение интервального упорядочения для любых $a,b,c \in A$:

I. $P(a,a)$;

II. $P(a,b)$ & $P(c,d) \Rightarrow (P(a,d) \vee P(c,b))$.

Числовое представление существует [3, с.38]. Существуют две вещественнозначные функции U и σ, $\sigma: A \to Re^{+}$, такие, что для любых $a,b \in A$ имеем

$$P(a,b) \Leftrightarrow U(a) + \sigma(a) < U(b).$$

3.3.8. Отношение полупорядка. Отношение $\mathbb{P}$ называется отношением полупорядка, если оно является отношением интервального порядка и для любых $a,b,c,d \in A$ удовлетворяет аксиоме:

III. $\mathbb{P}(a,b)$ & $\mathbb{P}(c,d) \Rightarrow \mathbb{P}(a,d) \vee \mathbb{P}(b,c)$.

Числовое представление существует.Существует вещественнозначная функция U: $A \to Re$, такая, что для любых $a,b \in A$ $\mathbb{P}(a,b) \Leftrightarrow U(a)+1 < U(b)$.

3.3.9. Отношение древовидного порядка. Отношение $\mathbb{P}$ называется отношением древовидного порядка,если оно является отношением строгого частичного порядка и для любых $a,b,c \in A$ удовлетворяет аксиоме:

Ш. $P(a,b)$ & $P(a,c) \Rightarrow (P(b,c) \vee P(c,b))$.

Числового представления не существует.

3.3.10. <u>Отношение квазипорядка</u> для любых $a,b,c \in A$ удовлетворяет аксиомам:

I. $P(a,a)$;

П. $P(a,b)$ & $P(b,c) \Rightarrow P(a,c)$.

Числового представления не существует.

3.3.11. <u>Отношение слабого порядка</u> (квазисерии [1, с. 36], предпорядки [91, с.36]). Для любых $a,b,c \in A$ удовлетворяет аксиомам:

I. $P(a,b) \vee P(b,a)$;

П. $P(a,b)$ & $P(b,c) \Rightarrow P(a,c)$.

Если упорядоченная система $\langle A;P \rangle$ имеет счетную базу, то числовое представление существует [2, с. 76].

Не все из приведенных отношений имеют числовые представ - ления. Поэтому не всегда данные, содержащие бинарные отношения, можно представить в некотором числовом пространстве.

Рассмотрим, какие в настоящее время существуют методы обработки бинарных отношений. Большинство методов используют для обработки матриц расстояния или меры близости между матрицами. Эти расстояния и меры вводятся либо исходя из систем аксиом [18], либо из статистических предположений и свойств самих отношений, как, например, коэффициенты Стьюарта, ранговой корреляции Кендала, Спирмена, Юла, информационные меры и т.д. Введение расстояний и мер близости связано с определенными дополнительными предположениями, которые, в свою очередь, определяют области применимости соответствующих методов. К методам,использующим расстояния, относятся методы анализа структуры связей между объектами, методы классификации, методы построения регрессии и другие.

3.4. Матрицы упорядочений (r_{ij}), $i = 1,\ldots,k$; $j = 1,\ldots,n$; где r_{ij} - оценка i-го объекта по j-му признаку. Такие матрицы могут выражать либо упорядочения k объектов n экспертами, либо упорядочения k объектов по n ранговым признакам [10,11,23,30]. Такие матрицы обрабатываются методами многомерного шкалирования [30] и методами ранжирования [26], а также некоторыми из методов обработки матричного представления бинарных отношений (см. п.3.3.).

Поставим в соответствие каждому признаку j отношение P_j, определенное следующим образом:

$$\mathbb{P}_j(a_{i_1}, a_{i_2}) \Leftrightarrow r_{i_1 j} \leq r_{i_2 j}.$$

Получим совокупность бинарных отношений, образующую словарь наблюдаемых терминов $V = \{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$. Пусть $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots$ $\ldots, a_k\}$ - множество объектов, на которых получена матрица упорядочений. Тогда протоколом pr^V наблюдения над множеством $\mathbb{A}$ в словаре V будет модель $pr^V = \langle \mathbb{A}; \mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n \rangle$.

В теории измерений разработано много систем аксиом, определяющих взаимодействие нескольких отношений порядка [4].

3.5. Матрицы близости. Пусть дано некоторое множество объектов $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Матрицей близости для этих объектов называется матрица (r_{ij}), $i, j = 1, \ldots, m$; r_{ij} - числовые оценки меры близости (сходства или различия) в порядковой шкале (имеет смысл только сравнение величин $r_{i_1 j_1} \leq$ $\leq r_{i_2 j_2}$). Такие матрицы возникают в различных областях при сравнении или оценке экспертом двух объектов в некотором отношении.

Матрицы близости обрабатываются методами многомерного неметрического шкалирования (см. обзоры [9,30] и работы [10,11, 31,32]). Целью этих методов является представление объектов точками в некотором метрическом пространстве (евклидовом или римановом) минимальной размерности, так чтобы расстояния d_{ij} между ними с точностью до порядка соответствовали бы величинам

r_{ij}. Некоторые из этих методов в том же метрическом пространстве, называемом в этом случае объединенным психологическим пространством, представляют также и экспертов. Экспертам ставятся в соответствие точки, прямые или какие-либо другие подмножества метрического пространства [10]. Каждый метод исходит из некоторой модели взаимодействия объекта и субъекта. Эти методы обладают следующими общими недостатками. Во-первых, нет критериев проверки применимости той или иной модели к имеющимся данным. Во-вторых, не каждую матрицу близости можно вложить в конечномерное евклидово или даже гильбертово пространство.

После применения методов многомерного шкалирования мы получаем представление данных в метрическом пространстве. Эти данные можно записать в виде матрицы объект-признак, которые будут рассматриваться ниже.

Определим на множестве $\mathbb{A}$ отношение:

$$P(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}) \Rightarrow r_{i_1 i_2} \leq r_{i_3 i_4}.$$

Так как это отношение определено на всем множестве $\mathbb{A}$, то протоколом pr в словаре $V = \{\mathbb{P}\}$ будет модель $pr = \langle A; V \rangle$.

В теории измерений эмпирические системы, включающие подобные четырехместные отношения, обозначаются как $\mathfrak{M} = \langle A^*; \leq \rangle$, где $A^* \subset A \times A$, $\leq$ - бинарное отношение упорядочения, определенное на A^*. Приведем некоторые результаты теории измерений, относящиеся к таким эмпирическим системам.

3.5.1. <u>Шкала положительных разностей</u> [4, с.147]. Существует гомоморфизм $\Phi: A^* \to Re$, $A^* \neq \emptyset$, такой, что для любых пар (a,b), (b,c), (c,d) из A^* :

а) $(a,b) \leq (c,d) \Rightarrow \Phi(a,b) \leq \Phi(c,d)$,

б) $\Phi(a,c) = \Phi(a,b) + \Phi(b,c)$.

Отображение Φ единственно с точностью до положительного множителя (шкала отношений).

3.5.2. Шкала алгебраических разностей [4, с. 151]: $A^* = A \times A$. Существует гомоморфизм $\Phi : A \to Re$ такой, что для любых $a, b, c, d \in A$:

$$(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow \Phi(a) - \Phi(b) \leq \Phi(c) - \Phi(d).$$

Отображение Φ, обладающее этим свойством, единственно с точностью до лог-линейных преобразований (шкала интервалов).

3.5.3. Шкала разностей равных конечных промежутков [4, с. 168]: $A^* = A \times A$, A конечно, $A \neq \emptyset$. Существует гомоморфизм $\Phi: A \to N$ (натуральные числа) такой, что для любых $a, b, c, d \in A$:

$$(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow \Phi(a) - \Phi(b) \leq \Phi(c) - \Phi(d).$$

Отображение Φ единственно с точностью до линейных преобразований (шкала интервалов).

3.5.4. Шкала абсолютных разностей [4, с.172]: $A^* = A \times A$. Существует гомоморфизм $\Phi: A \to Re$ такой, что

$$(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow |\Phi(a) - \Phi(b)| \leq |\Phi(c) - \Phi(d)|.$$

Отображение Φ единственно с точностью до линейных преобразований (шкала интервалов).

3.6. Матрица объект-признак (x_{ij}), $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$; где x_{ij} - числовое значение j-го признака на i-м объекте. Признаки могут быть самыми произвольными: как количественными, так и качественными. Тот факт, что такая матрица получена в результате некоторых измерений (опросов, экспериментов, обследований и т.д.), говорит о том, что существуют n приборов или измерительных процедур, поставивших в соответствие каждому из m объектов числовые значения $x_{ij} = x_j(a_i)$ соответствующих признаков.

Данные такого типа имеют наибольшее распространение: анкетирование, тестирование, разнообразные социологические опросы, экспертное оценивание, карты обследований, геологоразведка, экспериментальные данные и т.д. Большинство известных методов предназначено для обработки именно таких данных. Общим ограничением этих методов является то, что они ориентированы на числовые данные, включающие признаки, измеряемые только в сильных шкалах.

Поставим в соответствие каждому признаку x_i словарь V_i. Рассмотрим два случая:

1) прибор x_i является хорошо изученным прибором, например, измеряющим некоторую физическую величину, и решаемая задача относится к области физики. Тогда словарь V и эмпирические аксиоматические теории этих величин известны [4];

2) эмпирическая система прибора x_i не полностью или не достаточно точно определена, либо решаемая задача не может быть описана в рамках физики. Такие измерения называются приборными [1] или косвенными измерениями. Примерами таких измерений являются различные результаты тестирования, социологического опроса, балльные оценки, субъективные оценки и т.д. Все эти величины характеризуются тем, что предметная область, в рамках которой они рассматриваются, недостаточно разработана и поэтому эмпирические системы величин не полностью известны (хотя сам прибор, как, например, физические приборы, известны хорошо). В этом случае прибор или тестирование дают нам косвенные измерения интересующих нас величин.

Как справедливо отмечается в [1, с.34], "единственность показания прибора определяется единственностью используемых первичных или производных числовых представлений, а совсем не методом, как это обычно кажется, калибровки прибора. Тот факт, что приборные измерения массы приводят к шкале отношений, связано вовсе не с тем, что на циферблате нанесены равные деления".

Рассмотрим, как можно определить словарь V_i приборных измерений.

Для любого числового отношения $R(y_1, \ldots, y_k)$, определенного на Re (множестве действительных чисел), можно определить следующее эмпирическое отношение на множестве объектов A :

$$P_j^R(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow R(x_j(a_1), \ldots, x_j(a_k)).$$

Это отношение может не иметь эмпирической интерпретации. Прибор $x_j(a)$ имеет эмпирическую интерпретацию, но связь его значений отношением R может уже не иметь эмпирическую интерпретацию. Поэтому нужно найти такие числовые отношения на Re, для которых отношение P_j^R имело бы эмпирическую интерпретацию. Предположим, что мы перебрали некоторые наиболее распространенные числовые отношения и нашли, что отношения $P_j^{R_1}, \ldots, P_j^{R_{kj}}$ имеют эмпирическую интерпретацию. Данное множество отношений не пусто, так как по крайней мере отношение $P_j^=$ имеет эмпирическую интерпретацию. Если имеет смысл величина $x_j(a_1)$, то смысл отношения

$$P_j^=(a_1, a_2) \Leftrightarrow x_j(a_1) = x_j(a_2)$$

состоит в том, что на объектах a_1 и a_2 величина x_j принимает одно и то же значение. Отношение $P_j^=$, как правило, является отношением эквивалентности. В теории измерений известно много систем аксиом, использующих для некоторых величин только отношение $P_j^=$ и приводящих, тем не менее, к сильным шкалам. Поэтому наличие в языке эмпирических систем одного лишь отношения $P_j^=$ может много дать. Определим словарь V_j приборного измерения x_j как множество $\{P_j^{R_1}, \ldots, P_j^{R_{kj}}\}$.

В качестве словаря наблюдаемых терминов для всей матрицы объект-признак возьмем словарь $V = V_1 \cup \ldots \cup V_n$.

Протокол pr^V результатов наблюдения в словаре V, соответствующий матрице объект-признак, определим так же, как и в предыдущих пунктах.

3.7. Из приводимых примеров можно понять, как другие не рассмотренные здесь способы представления данных могут быть представлены в рамках эмпирических аксиоматических теорий.

Общим аргументом в пользу универсальности эмпирических аксиоматических теорий является методологический принцип теории измерений, состоящий в том, что отношения первичны, а свойства (числовые представления) вторичны. Свойства - это сжатое, закодированное числами представление отношений.

§4. Условия универсальной аксиоматизируемости экспериментальной зависимости

Под экспериментальной зависимостью будем понимать совокупность всех формул в языке первой ступени в словаре V, истинных на любом результате наблюдения $pr^V = Ods^V(\mathbb{A})$.

В данном параграфе мы рассмотрим возможность построения достаточно общего метода обнаружения закономерностей в языке первого порядка.

Рассмотрим в общем случае множество закономерностей в языке первого порядка. Большинство известных законов и закономерностей можно выразить универсальными формулами (формулами, содержащими только кванторы всеобщности). Кроме того, универсальные формулы обладают еще одним важным свойством - они заведомо поддаются экспериментальной проверке [2], т.е. их можно опровергнуть в конечном эксперименте, если они неверны. Третьим, важным для нас свойством универсальности формул, является их разложимость на более простые формулы некоторого специального вида, которые позволяют разработать достаточно эффективный метод обнаружения закономерностей.

В теории измерений формулы с кванторами существования часто вводятся в систему аксиом не для того, чтобы отразить эмпирическое содержание исследуемых величин, а для того, чтобы можно было доказать соответствующие теоремы существования и единственности. Системы аксиом в теории измерений должны быть достаточно сильны, чтобы из их истинности на некоторой модели следовало бы существование гомоморфного отображения этой модели в числовую систему, а также чтобы можно было определить множество таких гомоморфных отображений (множество допустимых преобразований). Строго определить, имеет ли какая-нибудь аксиома эмпирическое содержание или нет, можно с помощью следующего понятия [2]. Аксиома Φ называется чисто технической в системе аксиом $\{\Phi_i\}_{i\in I}$, если из следующих двух систем аксиом $\Phi \cup \{\Phi_i\}_{i\in I}$ и $\{\Phi_i\}_{i\in I}$ вытекают одни и те же поддающиеся проверке (универсальные) высказывания. Многие аксиомы, встречающиеся в теории измерений и включающие квантор существования, являются чисто техническими.

Анализ не чисто технических аксиом теории измерений показывает, что для переменных, связанных кванторами существования, практически всегда существуют эмпирически интерпретируемые скулемовские функции [33], подстановка которых в формулу позволяет избавиться от кванторов существования.

Данные рассуждения показывают, что множество универсальных формул является практически достаточным для представления закономерностей.

Определим те эмпирически интерпретируемые свойства измерительных процедур Obs^{V}, благодаря которым экспериментальная зависимость может быть представлена совокупностью универсальных формул в словаре V. Эти свойства дадут, во-первых, возможность понять, почему большинство известных законов выражаются универсальными формулами, а, во-вторых, определят область применимости метода обнаружения закономерностей.

Уточним понятия измерительной процедуры Obs^V и протокола наблюдения pr^V ,которые остались не конкретизированными в §2 при определении эмпирической аксиоматической теории.

Определим протокол наблюдения pr^V как модель [33] $\mathrm{pr}^V = \langle \mathbb{B}; \mathrm{v} \rangle = \mathrm{Obs}^V(\mathbb{A})$, где $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ - множество измеряемых объектов; $\mathrm{v} = \{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$ - словарь наблюдаемых терминов; $\mathbb{B} = \{a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_e\}$ - множество символов объектов.Поясним это определение.Каждый протокол наблюдения должен удовлетворять системе аксиом S^V.Так как в этой системе аксиом могут быть аксиомы с квантором существования,требующие существования объектов с определенными свойствами,то для того,чтобы эти аксиомы были истинными на протоколе pr^V ,нужно в процессе проведения измерений проводить построение некоторых новых объектов.Поэтому множество символов объектов $\mathbb{B}$ состоит как из символов объектов для множества объектов $\mathbb{A}$,так и из символов объектов $b_1, \ldots, b_e$,построенных в процессе измерения процедурой Obs^V.Будем предполагать, что нам известна функция $\pi : \mathbb{A} \overset{1:1}{\rightarrow} \{a_1, \ldots, a_m\}$, взаимно-однозначно ставящая в соответствие объектам из множества $\mathbb{A}$ их символы в протоколе pr^V . Будем предполагать, что индексы символов объектов начинаются с 1 и кончаются m без пропусков.

Уточним понятие истинности формул на протоколе наблюдения pr^V. Так как протокол является моделью, то таким определением является стандартное определение выполнимости формул на моделях [33].

4.1. <u>Наследственность результатов измерений как необходимое и достаточное условие универсальной аксиоматизируемости экспериментальной зависимости</u>. Пусть у нас есть некоторая эмпирическая аксиоматическая теория $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{Obs}^V, \mathrm{v}, \Omega, S \rangle$. Обозначим через PR множество всех конечных моделей (с точностью до изоморфизма), которые могут быть получены в качестве протоколов наблюдения процедурой Obs^V над всеми возможными множествами объектов $\mathbb{A}$. Обозначим через $\mathbb{T}$ абстрактный класс всех конечных моделей сигнатуры $\mathbb{V}$. Нам нужно найти необходимое и достаточное условие универсальной аксиоматизируемости класса $\mathbb{PR}$ в классе $\mathbb{T}$.

Класс $\mathbb{PR}$ называется универсально аксиоматизируемым в классе $\mathbb{T}$, если существует совокупность $\mathbb{W}$ универсальных формул сигнатуры $\mathbb{V}$ (формул, содержащих только кванторы всеобщности), истинных на тех и только тех моделях из $\mathbb{T}$, которые принадлежат $\mathbb{PR}$. Тогда множество $\mathbb{W}$ является системой аксиом для класса конечных моделей $\mathbb{PR}$ и выражает в языке первой ступени экспериментальную зависимость, проявляющуюся в экспериментах, проводимых измерительной процедурой $\mathrm{Obs}^{\mathbb{V}}$.

ТЕОРЕМА 1 (Тарский, Лось) [33]. *Для того чтобы подкласс* $\mathbb{PR}$ *класса* $\mathbb{T}$ *был универсально аксиоматизируем в классе* $\mathbb{T}$ *, необходимо и достаточно, чтобы класс* $\mathbb{PR}$ *был локально замкнут в* $\mathbb{T}$.

Условие локальной замкнутости трудно эмпирически проинтерпретировать, поэтому мы найдем более простое условие универсальной аксиоматизируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [33]. Подкласс $\mathbb{PR}$ называется наследственным в $\mathbb{T}$, если каждая подмодель в $\mathbb{T}$ модели из $\mathbb{PR}$ принадлежит $\mathbb{PR}$.

Свойство наследственности имеет следующую интерпретацию. Для каждого протокола эксперимента $\mathrm{pr}^{\mathbb{V}} = \langle \mathbb{A} ; \mathbb{V} \rangle$ любой подпротокол $\mathrm{pr}' = \langle \mathbb{B} : \mathbb{V} \rangle$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, с точностью до переименования символов объектов также может быть получен в результате эксперимента.

УТВЕРЖДЕНИЕ [34]. *Для классов конечных моделей* $\mathbb{PR}$ *и* $\mathbb{T}$ *из наследственности класса* $\mathbb{PR}$ *в классе* $\mathbb{T}$ *вытекает локальная замкнутость класса* $\mathbb{PR}$ *в классе* $\mathbb{T}$ *и в силу теоремы - универсальная аксиоматизируемость класса* $\mathbb{PR}$ *в классе* $\mathbb{T}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Достаточные условия универсальной аксиоматизируемости:

1. Для любого множества $\mathbb{A}$ $pr^v = \langle \pi(\mathbb{A}); v\rangle = Obs^v(\mathbb{A})$.

2. Для любого протокола $pr^v = \langle \pi(\mathbb{A}); v\rangle = Obs^v(\mathbb{A})$ и любого подмножества $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ протокол $pr' = \langle \pi'(\mathbb{B}); v\rangle = Obs^v(\mathbb{B})$, полученный на этом подмножестве, изоморфен подмодели $\langle \pi(\mathbb{B}); v\rangle$ протокола pr^v $(\pi(\mathbb{B}) \subset \pi(\mathbb{A}))$.

Интерпретация первого свойства состоит в том, что в процессе эксперимента не производится построение новых объектов.

Интерпретация второго свойства состоит в том, что значения истинности отношений из pr^v, определенные на некотором подмножестве $\mathbb{B}$ объектов множества $\mathbb{A}$, не зависят от свойств других объектов и истинности отношений на других объектах. Для физических экспериментов это свойство почти всегда выполняется, но если взять, например, реакции испытуемого на стимулы из некоторого множества $\mathbb{A}$, то на подмножестве $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ эти реакции могут быть другими, чем на этих же стимулах во всем множестве $\mathbb{A}$. В этом случае добавление к множеству $\mathbb{B}$ новых стимулов из $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ может изменить прежние реакции испытуемого на стимулы из множества $\mathbb{B}$.

ТЕОРЕМА 2. *Из условий 1 и 2 определения 3 следует наследственность класса* $\mathbb{PR}$ *в классе* $\mathbb{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный протокол класса $\mathbb{PR}$. Он изоморфен некоторому протоколу $pr = \langle \mathbb{B} : v\rangle = Obs^v(\mathbb{A})$. В силу первого свойства $\mathbb{B} = \pi(\mathbb{A})$. Возьмем произвольную подмодель $pr' = \langle \mathbb{C}; v\rangle, \mathbb{C} \subset \pi(\mathbb{A})$ модели $pr = \langle \pi(\mathbb{A}); v\rangle$. Для множества символов объектов $\mathbb{C}$ определим соответствующее ему множество объектов $\mathbb{C} = \pi^{-1}(\mathbb{C})$. Проведем процедурой Obs измерение над этим множеством. Получим протокол $pr'' = \langle \pi''(\mathbb{C}); v\rangle$. В силу свойства 2 этот протокол будет изоморфен подмодели pr' протокола pr. Отсюда следует, что подмодель pr' также принадлежит классу PR.

§5. Общая формулировка метода обнаружения закономерностей

Пусть у нас есть некоторая эмпирическая аксиоматическая теория $\mathfrak{M} = \langle Obs^V, V, \Omega, S \rangle$, в которой инструкция к наблюдениям и понятие протокола конкретизированы так, как это сделано в §4. Метод обнаружения закономерностей следует понимать как метод индукции, состоящий в увеличении наших знаний об измерительной процедуре Obs^V. Точное определение закономерности будет дано в следующей части работы. Пока под закономерностью можно понимать любую формулу языка первого порядка в словаре V, истинную на любом результате наблюдения pr^V.

Так как нас интересуют только закономерности в языке первого порядка, то увеличение наших знаний должно состоять в логическом усилении множества S, например, за счет добавления новых формул. Мы будем предполагать, что увеличение наших знаний должно происходить путем анализа результатов наблюдений pr_0 и обнаружения на них закономерностей в словаре V. Усиление множеств $S^{V\cup\Omega}$ и S^{Ω} должно происходить в результате использования правил соответствия той естественно-научной теории, в которой описывается эмпирическая аксиоматическая теория $\mathfrak{M}$. При анализе pr_0 может использоваться априорная информация об Obs^V, содержащаяся в S^V. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Методом обнаружения закономерностей мы будем называть отображение $M\colon \langle S^V, pr_0\rangle \to S^V_m$, ставящее в соответствие каждой паре $\langle S^V, pr\rangle$, где S^V истинно на pr_0, множество формул S^V_m языка первого порядка в словаре V. Формулы из S^V_m невыводимы из S^V.

Если выполнены достаточные условия универсальной аксиоматизируемости (см. §4), то существует совокупность универсальных формул W, истинных на тех и только тех конечных моделях сигнатуры V, которые могут быть получены в результате наблюдений измерительной процедурой Obs^V над некоторым множеством объектов, т.е. множество результатов наблюдения универсально аксиоматизируемо.

Из этого же предположения следует, что без ограничения общности можно считать, что априорная информация S^V представляет собой совокупность универсальных формул. Множество закономерностей S_m^V должно включать закономерности, истинные на каждом протоколе, полученном процедурой Obs^V. Поэтому без потери общности можно ограничиться рассмотрением методов M, обнаруживающих закономерности, выраженные универсальными формулами.

Множество W может быть бесконечным. Для бесконечного множества трудно построить метод обнаружения закономерностей. Мы ограничимся случаем, когда множества S^V и S_m^V конечны.

Таким образом, уточнение метода обнаружения закономерностей, вытекающие из свойства измерительной процедуры (определение 2) состоит в следующем: множества S^V и S_m^V являются конечными совокупностями универсальных формул. Описание метода обнаружения закономерностей, являющееся уточнением метода [35-37], будет приведено в следующей части работы.

Литература

1. Психологические измерения /Под ред. Л.Д.Мешалкина.-М.: Мир, 1967. - 120 с.

2. ПФАНЦАГЛЬ И. Теория измерений. - М.: Мир,1976. - 248 с.

3. ФИШБЕРН П.С. Теория полезности для принятия решений.- М.: Наука, 1978. - 352 с.

4. Foundations of measurement. Vol. 1. /Krantz D.H., Zuce R.D., Suppes P., Tversky A. - New York - London; Academic press, 1971. - 577 p.

5. KRANTZ D.H., TVERSKY A. Conjoint measurement analysis of composition rules in psychology //Phychol. Rew. - 1971. - Vol. 78. - P. 151-169.

6. КУЗЬМИН В.Б., ОРЛОВ А.И. О средних величинах, сравне - ние которых инвариантно относительно допустимых преобразований шкалы //Статистические методы анализа экспертных оценок.-М., 1977. - С. 220-227.

7. ОРЛОВ А.И. Допустимые средние в некоторых задачах экспертных оценок и агрегирования показателей качества //Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. - М.: Наука, 1979. - С. 388-393.

8. ОРЛОВ А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Наука, 1977. - 182 с.

9. ТЕРЕХИНА А.Ю. Методы многомерного шкалирования и визуализация данных (обзор) //Автоматика и телемеханика. -1973.-№7. - С. 80-94.

10. ТЮРИН Ю.Н., ЛИТВАК Б.Г., ОРЛОВ А.И.,САТАРОВ Г.А.,ШМЕРЛИНГ Д.С. Анализ нечисловой информации. - М., 1981. - 80 с. (Науч. совет АН СССР по комп. пробл. "Кибернетика".)

11. ТЮРИН Ю.Н., ЛИТВАК Б.Г., ОРЛОВ А.И.,САТАРОВ Г.А.,ШМЕРЛИНГ Д.С. Анализ нечисловой информации //Всесоюзная школа "Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа". - Ереван, 1979. - С. 231-243.

12. ROBERTS F.S., FRANKE C.H. On the theory of Uniqueness in Measurement //J.Math. Phychol. 1976. - Vol. 14. -P. 211-218.

13. ШМЕРЛИНГ Д.С. О построении моделей парных и множественных сравнений со связями.//Прикладной многомерный статистиче - ский анализ. - М., 1978. - С. 164-189.

14. МИРКИН Б.Г. Анализ качественных признаков и структур.- М.: Статистика, 1980. - 316 с.

15. ЛБОВ Г.С., КОТЮКОВ В.И., МАНОХИН А.Н. Об одном алгоритме распознавания в пространстве разнотипных признаков //Вычислительные системы. - Новосибирск, 1973. - Вып.55. -С. 108-110.

16. МАНОХИН А.Н. Методы распознавания образов, основанные на логических решающих функциях //Эмпирическое предсказание и распознавание речи. - Новосибирск, 1976. - Вып. 67: Вычисли - тельные системы. - С. 42-53.

17. Машинные методы обнаружения закономерностей (Материалы Всесоюзного симпозиума 5-7 апреля 1976 г.) /Под ред. Н.Г.Загоруйко, В.Н.Елкиной. - Новосибирск, 1976. - 167 с.

18. МИРКИН Б.Г. Анализ качественных признаков. - М.: Статистика, 1976. - 166 с.

19. ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф., СВИРИДЕНКО Д.И. Логика эмпирических исследований. - Новосибирск, 1978. - 66 с.

20. КАРНАП Р. Философские основания физики.-М.: Прогресс, 1971. - 387 с.

21. PZELECKI M. The logic of empirical theories. - London: Routledge Kogan Paul, 1969. - 109 p.

22. ДЕВИД Г. Метод парных сравнений.-М.: Статистика,1978. - 150 с.

23. КОЗЕЛЕЦКИЙ Ю. Психологическая теория принятия решений. - М.: Прогресс, 1979. - 503 с.

24. ДРОБЫШЕВ Ю.П. Задачи и методы анализа данных //Математические вопросы анализа данных /Под ред. Ю.П.Дробышева, Новосибирск, 1980. - С. 6-14.

25. КУПЕРШТОХ В.Л., МИРКИН Б.Г., ТРОФИМОВ В.А. Метод наименьших квадратов в анализе качественных признаков //Проблемы анализа дискретной информации, Новосибирск, 1976.

26. ТЮРИН Ю.Н., ВАСИЛЕВИЧ А.П., АНДРУКЕВИЧ П.Ф. Статистические методы ранжирования //Статистические методы анализа экспертных оценок. - М., 1977. - С. 30-58.

27. САГАНЕНКО Г.И. Социологическая информация. - Л.: Наука, 1979. - 142 с.

28. Нормативные и дискрептивные модели принятия решений (По материалам советско-американского семинара.) - М.: Наука, 1981. - 340 с.

29. ТЮРИН Ю.Н. Непараметрические методы статистики. -М.: Знание, 1978. - 64 с.

30. КАМЕНСКИЙ В.С. Модели и методы неметрического многомерного шкалирования (обзор) //Автоматика и телемеханика. - 1977. - №8. - С. 118-156.

31. САТАРОВ Г.А., КАМЕНСКИЙ В.С. Общий подход к анализу экспертных оценок методами неметрического многомерного шкалирования //Статистические методы анализа экспертных оценок.-М., 1977. - С. 251-266.

32. HOLMAN E.W. Completely Nonmetric Multidimensional scaling //J. Math. Psychol. - 1978. - Vol. 18, N.1. -P.39-51.

33. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. -М.: Наука,1970. - 392 с.

34. ВИТЯЕВ Е.Е. Анализ данных с применением языка эмпирических систем //Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.13.01. - Новосибирск, 1982. - 15 с.

35. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания //Эмпирическое предсказание и распознавание образов. - Новосибирск, 1976.—Вып. 67: Вычислительные системы. - С. 54-68.

36. ВИТЯЕВ Е.Е. Закономерности в языках эмпирических систем и законы классической физики //Эмпирическое предсказание и распознавание образов. - Новосибирск, 1979.—Вып. 79: Вычислительные системы. - С. 45-56.

37. ВИТЯЕВ Е.Е., ПОДКОЛОДНЫЙ Н.Л. От экспертных систем к системам, создающим теории предметных областей //Компьютерный анализ структуры, функции и эволюции генетических макромолекул. - Новосибирск, 1989. - С. 264-282.

Поступила в ред.-изд.отд.

20 июня 1991 года