МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ НАУКИ
(Вычислительные системы)

1991 год Выпуск 138

УДК 510.221

ЛОГИКА И РЕАЛЬНОСТЬ

Н.В.Белякин

Введение

Рассмотрения; содержащиеся в этой статье, имеют двоякое отношение к проблемам искусственного интеллекта: в связи с теорией эмпирического прогнозирования и в связи с проектированием сложных систем. Когда методология эмпирических наук, решая задачу своей математизации и "кибернетизации", заимствует формальный аппарат у математической логики (которую в данном случае можно интерпретировать как методологию дедуктивных наук), то такое заимствование не всегда обосновано. Даже такая, казалось бы, безобидная вещь, как возможность свободно переходить (в логике предикатов) от функциональной сигнатуры к предикатной и обратно, для эмпирической логики становится проблематичной: откуда мы знаем, что сила тока есть функция напряжения и сопротивления? Как-никак мы тут выходим на идею причинности в достаточно жесткой формулировке. Вводя в сигнатуру функциональный символ, мы делаем предположение физического, а не логического характера. Поэтому критический анализ методологических предпосылок математической логики необходим для логики эмпирических наук. Наивная убежденность, будто логические правила не зависят от мыслимого содержания, не подтверждается реальной практикой мышления.

С другой стороны, при построении и использовании сложных управляющих и вычислительных систем (в том числе при органи - зации процессов их проектирования) мы неизбежно сталкиваемся с семантическими проблемами. Примером могут служить языки программирования высокого уровня: потребность в их корректной семантике заставляет разрабатывать весьма нетривиальные теории [1]; эти затруднения усугубляются при попытках соединения сложных языков с логической дедукцией. Еще сложнее, пожалуй, обстоит дело с семантикой экспертных оценок [2], где пересмотру подлежит само понятие истины. В общем, занимаясь искусственным интеллектом, мы постоянно сталкиваемся с ситуацией, напоминающей легенду о Вавилонской башне; это реальность, от которой нельзя абстрагироваться. В философской литературе иногда встречается термин "коллективное сознание", но остается неясным, что он означает. Разработка соответствующих математических моделей совершенно необходима, коль скоро математика выводится за пределы "классической" области ее применения.

Далее, в связи с теорией прогнозирования, создается интуитивное впечатление о необходимости резкого методологического разграничения между естественными и искусственными структурами. Конечно, такому разграничению невозможно придать статус "дедекиндова сечения". В конце концов, велосипед и компьютер тоже являются, некоторым образом, природными объектами; нравственные феномены не всегда удается отличить от животной стадности (хотя в них более ощутим элемент искусственности). И все же с достаточной определенностью можно сказать, что принцип функционирования систем, методологически заслуживающих (даже независимо от их происхождения) наименования "искусственных", существенно задействован на так называемые нормы (в отличие от закономерностей). Когда нормы воплощаются в какой-нибудь реально функционирующей системе (особенно если в ней присутствует "человеческий фактор"), происходит не только их деформация, вызванная "погрешностями", но и переосмысление. На математическом жаргоне это можно назвать диагонализацией [3]. К тому же искусственные механизмы, даже простейшие (швейная машина), равно как искусственные организмы (садовая яблоня), без человеческого ухода очень скоро перестают быть тем, чем они должны быть, так что и здесь нормативный аспект присутствует в большей мере, чем это кажется. Способ существования норм весьма нетривиален, и это надо всерьез учитывать при их логическом осмыслении. Единообразное рассмотрение норм и закономерностей, вообще говоря, недопустимо: иначе мы рискуем создать теорию несуществующих вещей. Нормы не являются причиной нормативной организованности; если теория прогнозирования игнорирует эту предпосылку (особенно в экономике, политике и т.п.), она может утратить всякую значимость.

Между тем, такое единообразие при рассмотрении информационных процессов независимо от их природы является ведущим принципом кибернетики, явно противостоящим только что изложенным соображениям. Став на этот путь, кибернетика имеет шанс превратиться в магию: различие между астрологией и социальным проектированием не столь уж велико. Занимаясь теорией управляющих систем, нельзя забывать о ее логических основаниях: идея управления как таковая весьма чревата кризисными явлениями. Эвристическое комбинирование равномерности и отмеченной выше "диагональности" (неформализуемости) или раздел "сфер влияния" сами по себе не решают проблему, а лишь уводят от нее. Устранить этот методологический конфликт, на мой взгляд, возможно на пути более аккуратного противопоставления актов моделирования и именования. Это удобно делать на примере аксиоматических теорий, что и является отправным пунктом данной статьи. Поэтому в ней будет довольно много математического материала, но здесь стоит заметить, что математика - это наполовину логика и методология, а наполовину физика или теория информации. Впрочем, и сама логика есть часть культурологии.

§1. Аксиоматические системы

Как известно, аксиоматизация метаматических теорий происходит следующим образом. Задается список имен неопределяемых понятий (сигнатура), и выбирается подходящий логический язык в этой сигнатуре, на котором формулируются все интересующие нас утверждения. Подразумевается, что предметные переменные этого языка пробегают некоторую область, элементы которой рассматриваются лишь как допустимые значения переменных; в этом смысле они равноправны и по существу неразличимы (если надо выделить индивидуальные объекты со специальными свойствами, в сигнатуру вводятся константные символы). В языке могут быть несколько сортов переменных, пробегающих разные предметные области; иногда принимается дополнительное (семантическое) соглашение, что объекты одного сорта следует интерпретировать как множества (не обязательно всевозможные) объектов другого сорта. Уже на этом этапе видно, что аксиоматический подход описывает скорее предметную область в целом, чем сами предметы.

Когда язык выбран, в нем формулируются аксиомы, которые обычно воспринимаются как неявные описания смысла неопределяемых понятий. Дальнейшее развертывание теории состоит в получении следствий из аксиом посредством правил логического вывода. По сложившейся традиции принято считать, что таким образом мы получаем некое знание об объектах и неопределяемых отношениях (заданных аксиоматически). Например, доказав теорему Пифагора, мы получаем информацию о некоторой комбинации точек и прямых. Тут возникает философский вопрос, можно ли эту информацию считать новой (ведь она уже содержится в аксиомах); ответ на него зависит от нашей позиции.

При развертывании аксиоматической теории, как правило,вводятся новые понятия посредством подходящих определений. Обычно мы имеем дело с теориями, у которых язык и логика таковы, что всегда можно устранить эти новые понятия, вернувшись к исходной сигнатуре. Поэтому создается впечатление, будто определяемые термины имеют чисто вспомогательный характер, являясь просто удобными сокращениями. Однако возможны естественные модификации аксиоматического подхода, для которых это неверно; к тому же, такая трактовка определений плохо согласуется со здравым смыслом (особенно если принять всерьез сложностные соображения). Рассмотрение примеров увело бы нас далеко в сторону.

Если теория наделена классической (или схожей с ней) логикой и если предъявлена какая-либо интерпретация неопределяемых понятий, в которой аксиомы (а значит, и следствия) оказываются истинными, то в этом заложена определенная гарантия непротиворечивости (содержательности) данной теории. Конечно,это справедливо лишь в меру нашего доверия к логике и того,насколько убедительно осуществляются построение интерпретации и проверка аксиом. Тут есть много "подводных камней". Вот один из них. Допустим, что аксиомы верны и правила логики переводят верные суждения снова в верные; дает ли это достаточную уверенность в истинности любого следствия, независимо от длины его доказательства? Вопрос упирается в доброкачественность наших представлений о "произвольном конечном". Наивные интуиции на сей счет могут оказаться несовместимыми с контекстом рассматриваемой теории [4]. И вообще, противоречивость теории не обязательно означает ее бессодержательность: все зависит от того, как мы ею пользуемся; однако при этом может измениться первоначальная суть аксиоматического подхода. Пожалуй,стоит отметить еще вот что. Обнаруженное противоречие - это эмпирический факт, а любые рассуждения о непротиворечивости могут претендовать лишь на статус прогноза. Не очень понятно,сколь убедительными должны быть эти рассуждения, чтобы застраховать нас от опасности обнаружить противоречие. Попутно выясняется, что "истинность" (достоверность) и "истина" - очень разные вещи даже в контексте логики (истина не обязана быть мерой истинности нашего знания); кстати, это же по-своему демонстрирует знаменитый "парадокс лжеца".

Но допустим, однако, что аксиоматическая теория непротиворечива (мы каким-то образом установили и приняли это - или просто поверили). Содержательна ли она и в каком смысле? В частности, существует ли для нее интерпретация, в которой она выполняется? Совсем не обязательно. Упомянутые выше дополнительные соглашения, фиксирующие семантическую связь между предметными областями, могут сыграть "роковую" роль. Обыкновенно, впрочем, интересуются теориями первого порядка (где предметные области независимы): здесь картина несколько меняется. Предположим для простоты, что мы имеем дело с логикой без равенства (с которым тоже ведь связывается семантическое соглашение: равенство полагается мыслить как тождество). Искомая интерпретация состоит из константных символов (имен воображаемых объектов), принадлежащих некоторому расширению данной теории; таковое строится из довольно естественных соображений: если доказуемо утверждение $\exists x\varphi(x)$, то надо ввести имя для некоторого c такого, что $\varphi(c)$. Продолжая это занятие "до упора", мы накопим достаточно богатую совокупность имен, на которой естественно интерпретируются все неопределяемые термины, причем исходные аксиомы, по построению, окажутся верными. В случае логики с равенством надо еще осуществить очевидную факторизацию имен: c_1 и c_2 означают то же самое, если доказуемо $c_1 = c_2$. Итак, искомая интерпретация построена. Ну и что дальше? Что же все-таки изучает данная теория? Мы преобразовали дедуктивный аппарат в квазисемантическую форму, но несерьезно полагать, что теория предназначена для исследования этой "реальности". Тогда уж лучше прямо признать, что она изучает себя самоё; для некоторых теорий (например, для теории множеств) это, пожалуй, самое правильное. Но аксиоматический подход подразумевает логическое равноправие всех интерпретаций. В контексте дедуктивной логики здесь нет никакого "криминала": мы просто имеет дело со специфической теоретико-множественной конструкцией, наводящей на дальнейшие вопросы, представляющие немалый чисто логический интерес. Но наивно думать, что наша теория обрела таким способом какое-то вне ее существующее содержание. Между тем возникает еще и такой философский вопрос: если мы решили применить аксиоматический метод для изучения некоторой извне заданной реальности, то насколько правомерно представлять таковую как одну из интерпретаций построенной нами теории?

Таковы основные черты аксиоматического метода в его традиционном понимании. Заметим, что весьма многое в вышеприведенном описании зависит от неявно подразумеваемой ориентации на язык логики предикатов первого порядка, которому придается статус привилегированного языка. Подытожим вкратце, что имеется в виду.

1. Рассмотрение объектов сводится к исследованию отношений, заданных на предметной области. Это связано со способом функционирования переменных в указанном языке. В частности, подстановка на место переменной ее конкретного значения состоит в механической замене символа переменной именем этого значения. А разве может быть иначе? Всобразите себе язык, в котором "нарицательные имена" (переменные) столь хитроумно задействованы в структуре формул, что их конкретизация предполагает существенную перестройку этой структуры. Тогда общее суждение $\varphi(x)$ и частное суждение $\varphi(c)$ могут оказаться достаточно несхо-

жими, а сам принцип перехода от общего к частному потеряет присущий ему оттенок тривиальной самоочевидности.

2. Производные понятия считаются чем-то факультативным: их смысл понимается как формальная комбинация смыслов сигнатурных терминов, участвующих в определении. Отчасти это обусловлено тем, что в исчислении предикатов правила построения формальных выражений и правила дедукции слабо связаны между собой. Представьте теорию, в которой определение новых терминов сопровождается введением дополнительных соглашений, исключающих возврат к прежней сигнатуре. Но главное в другом: составное имя имеет определенную структуру, которая может нести основную информацию о его содержании (не зависящую от смысла сигнатурных терминов).

3. Все интерпретации логически равноправны. Это происходит из-за резкого разграничения семантики и синтаксиса. На наш взгляд, здесь проявляется склонность к старинному суеверию: будто располагая именем, мы получаем власть над его носителем. Беда не в том,что содержание теории становится чрезмерно абстрактным, а скорее в том, что эта абстракция выдает себя за изучаемую реальность.

Эти замечания (нуждающиеся в дальнейшем раскрытии) призваны подчеркнуть одно обстоятельство: не очень адекватное пользование актами именования. Единообразное распространение на все случаи жизни известной схемы "имя - денотат - смысл", упрощенные представления о соотношении общего и частного - все это слишком привычно и вносит неоправданную тривиальность в восприятие различных синтаксических ухищрений: переменных, составных имен, дедуктивных конструкций и т.д. Поэтому есть резон немного поупражняться в искусстве сомнения в самых очевидных и общепринятых вещах и рассмотреть чуть подробнее вышеприведенные критические намеки, подсказки и недомолвки.

В связи с п.1 заметим следующее. Можно слегка усложнить язык элементарной арифметики, добавив к обычным правилам пост -

роения суждений некий аналог рекурсии: $\varphi(n+1) \leftrightarrow \Psi(\varphi(n))$, где подстановка в Ψ осуществляется на место предикатной переменной. Выражения такого языка представляют собой конечные и притом алгоритмически распознаваемые цепочки символов, в то же время они содержательно являются бесконечными формулами. Однако это не та "содержательность", которую соотносят с истолкованием сигнатурных терминов, скорее она все еще носит синтаксический характер. Формулы такого вида фактически представляют бесконечные последовательности формул, чьи порядковые номера мыслятся как значения свободной переменной. Подстановка константы в эту переменную сводится к выбору надлежащего члена последовательности. Относящаяся сюда логико-математическая проблематика заслуживает особого обсуждения (за пределами данной статьи); отметим лишь, что возникающая двусмысленность отношений семантики и синтаксиса может по-разному обыгрываться - например, в связи с так называемой арифметизацией метаматематики [5]. Здесь напрашивается аналогия из физики. Изучая микромир, следует отдавать отчет, что его объекты фактически определяются посредством экспериментальных процедур, в которых участвуют приборы, выступающие как принадлежность своего рода синтаксиса. С другой стороны, эти же приборы сами суть физические объекты, взаимодействующие на микроуровне с изучаемой реальностью. Стало быть, они принадлежат также семантике, являются элементами предметной области. Обычно практикуемое некритическое отождествление этих двух "ипостасей", присущих нашим приборам, наводит на нехорошие подозрения (мы уже знаем, к чему это ведет в математической логике). Похоже, что описанный квазибесконечный язык способен уловить это обстоятельство.

Обратимся к п.2 и попробуем осмыслить роль определений в более широком контексте. В геометрии длина определяется посредством процедуры откладывания единичного отрезка. Это же определение переносится в физику, но ситуация здесь совсем другая. Измеряя высоту чего-либо с помощью триангуляции (или расстояние до звезд,исходя из их светимости), мы далеко не всегда можем,даже в принципе,убедиться,что первоначальная процедура измерения дала бы тот же результат.Фактически мы вводим новое понятие длины посредством новой процедуры.Соответствующую величину мы по-прежнему называем длиной, поскольку там, где применимы обе процедуры, они дают одинаковые значения; но это надо проверять на опыте. Мы не просто переопределяем длину, но как бы вводим новую "аксиому". Можно считать, что таким путем проверяется физическая истинность геометрии, но интересно посмотреть, как это выглядит формально. А теперь, заметив это,давайте предположим, что мы измеряем (посредством подходящей процедуры) длину пролетающего мимо нас предмета. Почему мы думаем, что все еще измеряем длину (то, что до сих пор так именовалось)? Так называемое "лоренцево сокращение" скорее подсказывает, что мы имеем дело с "пакетом" однотипных, но разных величин: для каждой скорости - своя "длина". Но что такое скорость в этом случае? Не вдаваясь в проблемы теории относительности, замечу лишь, что упомянутая в п.2 экзотика (возможная "необратимость" определений) вполне может оказаться обычной (но недостаточно осознанной) повседневностью за пределами аксиоматических рассмотрений. Поставленная в свое время Гильбертом задача аксиоматизации физики может потребовать пересмотра многих логических привычек.

Но если даже нас интересуют только "настоящие" определения в первопорядковых теориях, то и с ними дело обстоит не так просто, как кажется. Представление о теории как о множестве всех теорем (высказывающихся,в том числе, обо всех определяемых понятиях) не очень согласуется с идеей равноправия всех интерпретаций (п.3). Теоремы о равносоставленных многоугольниках, интересующие нас из наглядно-геометрических соображений, могут потерять всякий смысл при другой интерпретации геометрии. Можно возразить, что в логическом плане это несущественно (мало ли что и кого интересует?); но весь вопрос в том, чего мы на самом деле хотим от аксиоматизированной теории, и логика тоже имеет к этому отношение. Чтобы не быть голословным, оттолкнусь от реального примера. Можно предложить термодинамическую версию геометрии Лобачевского, определив "расстояние" между двумя по-разному нагретыми телами в терминах тепловых машин (циклов Карно). Полученная метрика соответствует данной геометрии [6]. Но было бы любопытно взглянуть, какие определения и теоремы попадут в учебник геометрии, ориентированный на эту интерпретацию. С этой точки зрения, вполне возможны разные научные дисциплины, исходящие из одних и тех же аксиом. В какой мере осмысленно настаивать, что это всего лишь разные приложения одной теории? Здесь мы незаметно изменили само понятие теории, приблизив его к естественно-научному обиходу. Если подразумеваемая интерпретация "официально" задействована в описании теории, то тезису о равноправии интерпретаций противопоставляется нечто иное. Разумно принять в качестве методологической нормы, что изучаемая реальность аппроксимируется разными аксиоматическими системами, сосуществующими в рамках некоторого единства. По существу так и устроен математический анализ с его непрерывными, гладкими и аналитическими функциями; наверное, поэтому попытки его универсальной аксиоматизации (в виде арифметики второго или третьего порядка) выглядят довольно искусственно и лишь порождают трудности, не относящиеся к сути дела (пример: континуум-гипотеза). Было бы интересно исследовать возможные способы формализации подобных "единств" средствами математической логики.

Характерный для аксиоматического метода "равномерный" (не зависящий от интерпретации) стиль рассмотрения кажется оправданным, когда мы с самого начала поставили перед собой цель единообразного подхода к исследованию целого класса предметных областей, заданных общими свойствами, которые фиксируются в аксиомах. В качестве примера сразу приходит на ум теория групп, но как раз этот случай скорее подкрепляет высказанные здесь критические соображения. В самом деле, хотя теория коммутативных групп является относительно самостоятельной дисциплиной,но в основном новые аксиомы, описывающие группы специального вида, просто добавляются по мере надобности, и перехода к новой теории при этом не происходит. Более того, конкретные группы отнюдь не выступают как разные интерпретации теории групп: собственно, они являются ее объектами. Поэтому учебник современной алгебры вовсе не похож на евклидовы "Начала". Если же мы изучаем элементарную теорию какой-либо разновидности групп (или иных алгебраических систем), то акцент перемещается на алгебраическое моделирование вычислительных (или иногда измерительных) процедур, так что мы скоро перестаем понимать, причем тут группы или кольца в их алгебраической сущности. Конечно, я намеренно утрирую ситуацию (алгебраисты могут со мной не согласиться и найдут контраргументы*); но определенный резон в этих замечаниях все же есть. Интересно наблюдать, как при изучении алгебраической (вернее, алгебраизированной) реальности аксиоматическая атрибутика как бы отступает в небытие, а когда мы сосредотачиваем внимание на аксиоматике, то выходит, что мы занялись совсем другими вещами, для которых алгебраическое содержание является лишь строительным материалом.

В чем-то сходное положение возникает при попытках аксиоматизировать арифметику. Если мы отвлечемся от число алгебраи-

---

*) Если элементарная теория разрешима, то грань между алгеброй и логикой провести труднее.

ческих вопросов и от аналитической теории чисел (расписав их по соответствующим "ведомствам"), то арифметика, в первую очередь, окажется теорией вычислений применительно к "настоящему" натуральному ряду (давайте сделаем вид, будто мы непосредственно понимаем, что это такое). Тогда основным объектом внимания станут вычислительные процедуры, при изучении которых особой нужды в аксиоматизации не чувствуется. Когда надо, привлекается кое-какой материал из теории множеств или теории доказательств (запас этих средств не фиксируется). Выразительным примером являются трансфинитные иерархии формальных систем [7]; кстати, в этой связи, известная теорема Гёделя о неполноте теряет свой устрашающий метафизический оттенок и становится удобной технической леммой. Называть подобные рассмотрения аксиоматическим подходом было бы преувеличением. С другой стороны, можно интересоваться нестандартными моделями арифметики; тогда роль аксиоматизации заметно возрастает. На этом пути можно построить исчисление бесконечно малых, не прибегая к бесконечным множествам; это даже удается устроить так, что мы всегда будем иметь дело с неопределенным, но конечным отрезком натурального ряда [8]. Наверное, возможно (и желательно) распространить теорию алгоритмов на нестандартные модели или рассматривать языки с "нестандартно-конечными" формулами. Но насколько оправдано именовать такие занятия арифметикой?

Об аксиоматической теории бесконечных множеств у нас будет особый разговор в следующем параграфе. Здесь мимоходом замечу, что самыми неинтересными объектами этой теории являются сами множества и что аксиоматически преподнесенная бесконечность словно нарочно предназначена для порождения химер и монстров.

Вот и получается, что аксиоматический метод по-настоящему работает только там, где он впервые введен: в геометрии Евклида (и сходных с ней геометриях). Может быть, это и не совсем так, однако затруднительно указать другие примеры, где подразумеваемая интерпретация (физически осмысленная) столь хорошо поддавалась бы аксиоматическому рассмотрению. Не исключено,что дедуктивная полнота элементарной геометрии имеет к этому определенное отношение; но думается, что здесь задействованы более тонкие обстоятельства. Создается впечатление, что нашей пространственной интуиции присущ какой-то специфический консерватизм: искривления и вибрации пространства, о которых толкует физика,воспринимаются нами как нечто непространственное (гравитация и свет). Я не знаю (а хотелось бы узнать), в каких терминах можно выразить общие условия адекватной применимости аксиоматического метода и чем в этом смысле замечательна евклидова геометрия. Обращает на себя внимание одно занятное (и, кажется, до сих пор неосознанное) ее свойство. Занимаясь геометрией, мы имеем дело с идеальными объектами (прямыми без толщины и т.п.); однако геометрические законы неплохо воспроизводятся на наших приблизительных чертежах, и мы не ожидаем, что микроскопические отклонения от идеальности могут привести к макроскопическим нарушениям. Всегда ли так бывает? На самом деле тут неявно подразумеваются два вопроса. Мы можем исследовать свойства неточных чертежей средствами самой геометрии и посмотреть, что из этого выйдет. Но мы можем также принять во внимание естественную интерпретацию какой-либо интересующей нас геометрии и задаться вопросом,не приведет ли к нежелательным эффектам соотнесение теоретических конструкций с несовершенной реальностью, аппроксимирующей их - пусть даже с любой точностью. Вторая постановка вопроса более интересна, и тут возникают определенные подозрения по поводу геометрии Минковского, используемой в теории относительности для геометризации кинематики. Речь идет о понятии инерциальной системы отсчета, зародившемся в недрах галилеевской парадигмы, где оно вполне уместно; но остается ли оно таким в контексте преобразований

Лоренца? Отсутствие в мире абсолютно инерциальных систем ни на что существенное не влияет, пока действует "нормальный" закон сложения скоростей, но когда он перестает действовать, возникает опасение, "как бы чего не вышло". Вопрос стоит того, чтобы на нем немного задержаться. Проделаем мысленный эксперимент на тему известного "парадокса близнецов". Пусть один близнец остается на месте, а другой улетает от него со скоростью u на расстояние s и возвращается; по рецептам теории, он должен оказаться моложе своего брата. Если это повторяется много раз, то разница возрастов, вроде бы, должна накапливаться. Правда, эти рассмотрения не совсем вписываются в специальную теорию относительности, а привлекать общую теорию было бы не очень кстати: нас ведь интересует геометрия (вернее, геометризованная кинематика), а не эффекты торможения. Давайте примем упрощающее предположение: в точках поворота "ничего не происходит". Конечно, это недопустимое огрубление, но посмотрим, к чему это приведет. Легко понять, что накопление разности возрастов будет зависеть от u, но не от s. "Мировая линия" осциллирующего близнеца представляет собой ломаную на плоскости Минковского, которая при малом s почти сливается с прямой, изображающей неподвижного брата. И тут мы приходим к абсурду. Пусть один близнец действительно слетал в космос, а другой, оставаясь дома, мелко дрожал (резонно считая себя неподвижным). Вернувшись, космонавт обнаружит, что по земному календарю прошло сто пятьдесят лет, а брат, как и он сам, постарел всего на два года. Конечно, под удар, в первую очередь, попадет сделанное выше дополнительное предположение о точках поворота: корректировать хочется именно его. Желающие могут обратиться к общей теории относительности, но лучше мы поиграем в различные логические возможности. Это отнюдь не праздное занятие: не следует поддаваться гипнозу "неоспоримых" (но не всегда хорошо проду -

манных) научных истин.Можно попытаться спасти логическую честь нашего предположения, заявив, что из него вытекает невозмож - ность биологического бессмертия (по принципу: в огороде бузи - на,а в Киеве - дядька); действительно,в противном случае мы могли бы уменьшить u до величины, соразмерной со скоростью биений сердца. Более интересно предположить, что при разгоне и торможении время ускоряется (наперекор Лоренцу). Тогда ускорен-ное движение нельзя аппроксимировать ступенчатым процессом,со-ставленным из кратких равномерных перемещений со скачкообраз - ным изменением скоростей. Здесь мы имеем шанс открыть новый парадокс Зенона - в очень неудобной для нас ситуации. Впрочем, уже упоминалось,что привычные операциональные определения ско-рости (и ускорения) в контексте теории относительности,видимо, надо пересматривать. Обратим внимание, что трудности возникли не в самой геометрии, а при соотнесении с реальностью - в тех ее моментах, которые остались за пределами геометризации, но тесно с нею связаны.

Предпринятые экскурсы в физику, надеемся, в какой-то мере дают почувствовать, что попытка построить методологию эмпири - ческих наук по образу и подобию логики предикатов есть занятие отчасти сомнительное и, скорее всего, малопродуктивное. Стрем-ление к максимальной простоте формализации отодвигает в тень наиболее принципиальные моменты. Что же касается исследования и проектирования управляющих систем, то здесь выплывает на свет еще одно существенное обстоятельство: у нас нет разумных оснований "загонять" в аксиомы функциональные характеристики систем, связанные с целевым назначением. Целесообразность и це-ленаправленность - коварные сущности: они плохо вписываются в привычный строй логических рассуждений. Иметь такое-то назна - чение - это все же не предикат. Для обыденного мышления "под - вох" может остаться незамеченным, но исследовательское внима -

ние отвлекается "не в ту сторону": мы невольно исходим из предположения о некоей гарантированности нормативно-целевых признаков и связей, что может исказить не только познание, но и само бытие (через наше посредство). Реальность не обязана быть нейтральной к нашим прогнозам; образ мыслей подразумевает соответствующий стиль поведения, способный оказать влияние на свойства "вещей для нас". Звездам, конечно, все равно, как мы их называем, но не удивительно, что гадание по звездам поддерживает в коллективной психике какой-нибудь, образно выражаясь, "астральный ритм", нежелательный (по причине слишком человеческого происхождения) для земной природы. Многое в традиционной культуре способствует превращению природы в храм или мастерскую (природу по отношению к людям) - а самих людей в служителей социальной целесообразности. Можно предвидеть, что чем более всерьез (в духе научных традиций) мы будем относиться к этому многому, тем более острый кризис нас ожидает и тем беспомощнее мы перед ним окажемся. При этом неважно, в какой именно сигнатуре (первобытной или ультрасовременной) будет утверждать себя упомянутая социальная целесообразность. Сказанное в равной степени касается любого аспекта познания (и связываемой с ним реальности), коль скоро в него существенно вовлечены психологические или социальные факторы; и как раз в меру этой вовлеченности непригоден аксиоматический подход в классическом (как у Евклида и Гильберта) понимании. В отличие от "нормальной" математики, у нас нет уверенности, что выведение следствий из аксиом не разрушит теорию "изнутри", т.е. не в смысле фальсификации каких-то утверждений о мире, а гораздо более радикально. Вот интересный пример, в котором целевой момент присутствует в ослабленной форме: как противоположность порядка и хаоса (безотносительно к человеку). Можно построить модель "демона Максвелла" [9], которая, как идеальный механизм, будет работать должным образом, вопреки второму началу термодинамики.

Здесь демонстрируется ограниченная применимость самой концепции идеального механизма независимо от его функциональной схемы (аксиом). Наверное, и в этом случае можно защитить престиж аксиоматизации с помощью подходящих уточнений, но это уже будет "искусство для искусства", заслоняющее главную физическую суть.

Итак, прежде чем рассматривать нечто как "вещь саму по себе", с присущими ей свойствами и закономерностями, надо иметь веские основания для уверенности в том, что эта вещь допускает такое рассмотрение. Откуда они возьмутся? Стихийный опыт,в данной связи, не заслуживает особого доверия, а критическое к нему отношение предполагает рациональное осмысление (тоже зачастую стихийное), выявляющее скрытые предпосылки, призванные объяснить, почему наши "аксиомы" верны или кажутся таковыми,на основании принятых критериев, - и насколько доброкачественны сами критерии. Однако может случиться, что в результате этого выявления предпосылки перестанут действовать (или начнут давать непредсказуемые сбои). Преимущественно это относится к человеческому бытию (социальная инженерия, властные структуры), но также и к очеловеченному ("покоренная" природа). Бывают такие предпосылки, которые сохраняют свою силу лишь при условии, что они, хотя бы отчасти, остаются скрытыми. К их числу принадлежат и так называемые "абсолютные" ценности: если их реальная относительность изначально ясна, то подразумеваемая системность вряд ли может оформиться. Но когда она уже оформилась, люди могут разувериться в своих идеалах - и продолжают им следовать: по неосознанной привычке и еще потому, что слишком к ним приспособились (вернее, идеалы их к себе приспособили). Тут и встает вопрос о надежности функциональных связей,которые нам хотелось бы постулировать.Впрочем, "абсолютными" эти ценности становятся не сразу, а лишь в процессе формирования зависимой от них системы, но коль скоро они приобрели такое качество, то в них аккумулируются разрушительные для системы "ферменты".Здесь сказываются общие принципы эволюции (постоянное изменение семантики). В частности, исторический процесс - это прежде всего смена поколений, налегающих друг на друга и по-разному воспринимающих традиционный "синтаксис"; именно поэтому сделанные замечания относятся не только к философии истории, но и к повседневной практике управления и проектирования. Если осознание этих обстоятельств недостаточно внедрилось в культуру, может возникнуть иллюзия, что построенная теория все-таки верна, несмотря на дискредитацию ее предпосылок.Действенность последних с трудом поддается непосредственной проверке,и о ней судят обычно "задним числом": на основании кажущейся истинности принятых аксиом. Люди неплохо умеют выдавать желаемое за действительное, особенно когда эмпирический критерий утрачивает "финитную" несомненность, становится расплывчатым,зависящим от экспертной способности. Оказавшись в такой ситуации, мы не вправе, собственно говоря, полагаться даже на условные суждения: пока верны аксиомы, верны и следствия. Идея следования (в том числе логического) небезразлична к тому, что за ней скрывается: "настоящая" причинность или ее системная имитация, существующая лишь "по модулю" исправного функционирования системы. Это тем более так, потому что грань между логическими принципами и эмпирическими обобщениями весьма подвижна - даже в физике: если мы определим массу как коэффициент пропорциональности во втором законе Ньютона, то транзитивность равенства масс станет эмпирической закономерностью. Кто может поручиться, что предпосылки данной теории, критерий проверки истинности ее утверждений и логическое следование согласованы между собой? Однако аксиоматический метод настраивает сознание на такую согласованность - или выносит ее "за скобки".

Проиллюстрируем сказанное еще кое-какой конкретикой. Эмпирические законы часто проверяются или обосновываются исходя из статистических соображений. Предполагается, значит, что в изучаемой реальности действует закон больших чисел. Но право - мерно ли предполагать, что законы статистики верны всюду, где присутствует случайность в житейском или чисто философском понимании? Представьте себе, что интересующая нас система каким-то образом реагирует на некоторые следствия из своих аксиом когда они спонтанно "выведены" в ходе ее функционирования, и эта реакция направлена на нарушение статистических связей применительно к следствиям, но не к аксиомам. Может случиться,что и само понятие вероятности, как объективной количественной характеристики случайных событий, потеряет смысл. В классической математике неизмеримые множества (события без вероятности) выглядят монстрами и издержками формализации; но что сказать об их прототипах, если таковые возникнут в самой реальности? Теория вероятностей неплохо срабатывает при изучении газовых законов. Но каков теоретико-вероятностный статус случайных процессов в дождевом облаке? Или - в монополизированном рынке? Наверное, здесь лучше полагаться на здравый смысл, чем на урав - нения. А вот совсем банальный случай: какова вероятность того, что первые сто прохожих окажутся мужчинами? По закону Бернул - ли, она исчезающее мала. А если это воинское подразделение? Можно бы сослаться на необходимость пополнения теории: ведь и арифметика неполна; но есть разница: к арифметической практике теорема Гёделя не имеет отношения, а с теорией вероятностей дело обстоит по-иному. Представляет интерес построение и исследование моделей случайности, для которых статистика дает неверные предсказания; поиск подходящих ситуаций, скорее всего, надо вести в социальной сфере.

Вот еще одно коварное обстоятельство, тоже связанное с изучением социума.Вначале уже упоминалось, что экспертная логика существенно отличается от обычной и может совпадать с нею лишь при выполнении определенных условий. Неконтролируемость этих условий поддерживает в социуме достаточно высокий уровень "некоммуникабельности", что значительно обесценивает аксиоматическое рассмотрение нормативных текстов (например, моральных заповедей), исполнение которых неотделимо от экспертных оценок. Можно потешаться над "коротенькими мыслями", в которых выражает себя массовое сознание, но похоже, что это и есть нормальный способ существования классической логики, когда она непосредственно применяется к общественной жизни. Не исключено, что таким способом создается "семиотический барьер", препятствующий (со стороны логики) распространению индивидуалистических тенденций. Исключения из общих правил являются, конечно, повседневной реальностью, но законного логического статуса они не получают. Здесь можно усмотреть признак "информационной" неполноценности того общественного устройства, изображением которого, собственно, и является классическая схема: предметная область плюс система отношений плюс традиционное понимание логических связок (особенно импликации и квантора общности). Осуществленные в [2] мысленные эксперименты с модификациями так называемого метода форсинга как бы открывают путь к логическому "беспределу": они подсказывают способ порождения необозримого количества логик, для каждой из которых задается свое (и притом естественное) понимание всеобщих суждений и по-своему узакониваются исключения из них. Если присмотреться получше, речь идет об изменении отношений между "я" и "мы" и (в перспективе) о разработке нормативной логики на основе "концептуальной" вседозволенности (т.е. приемлемой в аспекте чистого и практического разума).

Немного отвлекаясь от темы, стоит еще отметить, что предпринятые в нашем веке (в основном в художественном творчестве) попытки реконструкции мифологического мышления на индивидуалистической (не коллективистской, как раньше) основе заслуживают пристального методологического внимания. В частности, в поэтике символизма есть много такого, что представляет значительный чисто логический интерес. Автор надеется впоследствии высказаться об этом с бóльшей определенностью.

Рассмотрения этого параграфа, касательно аксиоматического метода, позволяют делать различные "оргвыводы"; вот главнейший из них. В аксиоматизированной теории семантика присутствует в трех видах: в истолковании сигнатурных терминов,в выборе вспомогательных конструкций и в понимании логических связок.Путать эти аспекты недопустимо, но сам метод предрасполагает к такой путанице (преимущественно в первых двух аспектах). Поэтому если мы остаемся с обычной логикой, то предпочтительно пользоваться аксиоматизацией в тех случаях, когда содержание сигнатурных понятий нам неинтересно. К обсуждению одной такой ситуации мы и переходим.

§2. Теория множеств

Что изучает теория множеств? Хочется ответить: множества; во всяком случае, они являются допустимыми значениями предметных переменных. Действительно, некоторые принципы арифметической комбинаторики постулируются как аксиомы теории, распространяясь при этом и на бесконечные множества. Последние, однако, скорее являются воображаемыми сущностями. Бесконечное множество - вещь довольно неосязаемая и даже в качестве мысленного объекта не вполне приемлемая.Естественные определения конечных количеств, восходящие к школьной арифметике и сводящие ее, некоторым образом, к логике [10], позволяют конструировать эти количества непосредственно из наших мыслей, не обращаясь к внешней реальности, но для бесконечных количеств это не получается. Можно определить, что это такое, но не удается подыскать логическую сущность, подходящую под это определение.В момент зарождения математической логики в качестве примера предлагалось множество всех мыслей, но таковое оказалось внутренне противоречивым. Зачем далеко ходить? - спросит читатель. - Возьмите натуральный ряд. Но вся беда в том,что логически определенный натуральный ряд автоматически "усекается",становится конечным, если его определение проинтерпретировать в конечном универсуме (а где взять бесконечный?). Логизированная арифмётика на поверку оказывается теорией неопределенно длинного, но конечного числового ряда. Может быть, так даже лучше? Аналогичный подход напрямую задействован в [8]. Но как быть с самой бесконечностью? Попытки найти ее во внешнем мире оборачиваются самообманом: невразумительной смесью мыслей с наглядными представлениями. Для математических нужд (включая точное естествознание) удается обойтись нестандартными моделями конечного,однако бесконечность кажется неотъемлемым атрибутом нашего мышления. Нельзя сказать, что из этих трудностей вовсе невозможно выпутаться, но для этого нужна известная изощренность ума, а главное - готовность признать, что бесконечность есть фикция сознания, имеющая отношение к его ресурсной ограниченности [4]. Житейское представление о бесконечном, как о чем-то необозримо большом, наталкивается на "парадокс кучи", и кажется, что математическое освоение соответствующих интуиций непременно требует "разрешения" этого парадокса. В общем, по причинам скорее мировоззренческим,нежели интеллектуальным, исторически сложилось так, что существование бесконечных множеств было провозглашено "в приказном порядке". В результате, по выражению Рассела, математика стала наукой, которая сама не знает, чем она занимается. Но с этим можно согласиться лишь при условии, что теория бесконечных множеств является фундаментом математики, а сами множества - ее основными объектами,к которым сводится все остальное. Попробуем понять, стоит ли с этим соглашаться.

Возьмем, например, идею функциональной зависимости. Нельзя сказать, что исходные интуиции, обусловившие наш интерес к ней, существенно связаны с концепцией множества. Когда мы определяем функцию как множество упорядоченных пар, то что это: содержательно осмысленное определение или просто кодирование? Ответ, я думаю, ясен. Скажу больше: известное определение функции как отображения из точек в точки отнюдь не является исконным; первоначальное понимание ближе к тому, что сейчас называют обобщенными функциями (каковые, кстати, пришлось ввести в математику из физических соображений: вспомните "дельта-функцию"). Конечно, обобщенные функции тоже можно закодировать в теории множеств, но стоит ли при этом утверждать, что функции сводятся к множествам? С другой стороны, теоретико-множественное кодирование очень удобно: из множеств легко строятся различные математические объекты; аксиомы теории множеств задают способ такого конструирования, и можно сказать, что нам интересны не сами множества, а то, что из них можно построить. Теория множеств, собственно, описывает ритуал математического поведения, обобщающий накопленный опыт неформального оперирования с абстрактными объектами (геометрическую фигуру иногда удобно мыслить как множество точек). Смутные, квазинаглядные представления о множествах помогают нашей ориентации, однако, когда нам кажется, что мы ориентируемся в "мире множеств", мы на самом деле просто поддерживаем порядок в своих мыслях. В этом ритуале, пожалуй, есть кое-какие излишества, доставляющие (вместо помощи) дополнительные трудности. Наиболее сомнительна аксиома существования множества всех подмножеств: она навязывает неразрешимые проблемы сравнения бесконечных количеств и одновременно препятствует разумному осмыслению создавшейся ситуации, порождая впечатление, будто речь идет о какой-то независимой от нас и непостижимой реальности. Когда мы кодируем непрерывную протяженность как множество всех подмножеств натурального ряда, а затем обнаруживаем, что мощность этого множества мы можем назначить по своему произволу, не опасаясь противоречия, то возникает догадка, что континуум не является (вопреки этой аксиоме) определенным множеством. Значит, надо не добавлять к теории множеств новые аксиомы (тут мы оказываемся в положении "буриданова осла"), а получше осознать конвенциональность, присущую самой идее бесконечности. Между тем классические разделы математики можно погрузить в теорию множеств, не пользуясь упомянутой сомнительной аксиомой (если вернуться к старинному пониманию функции). Фактически это сделано в конструктивном анализе [11]: нам достаточно просто спроецировать имеющиеся там рассмотрения в теоретико-множественный контекст (оставив в стороне теорию алгоритмов и конструктивную логику). Вот еще один образчик теоретико-множественной мифологии - тоже по-своему интересный, но не в самом прямом смысле. Речь идет о недостижимых ординалах. Их существование невозможно вывести из стандартных аксиом теории множеств: иначе мы доказали бы, вопреки теореме Гёделя, непротиворечивость этой теории ее же средствами. Тем не менее, определение этих ординалов выглядит весьма естественно и привлекательно. Похоже, что в погоне за "настоящей" бесконечностью мы лишили себя возможности реализовать соответствующие интуиции, вообразив мысленный универсум, содержащий не очень мыслимые вещи (множества, не имеющие индивидуального описания, и т.п.). Остается принять новую аксиому бесконечности (создать дракона, более сильного, чем прежний; затем - еще более сильного...). Аксиомы имеют вид высказываний о каком-то мире; правильно выбирая новые аксиомы, мы как бы совершенствуем наши познания о нем. Но мир бесконечных множеств - это мираж, порожденный данным математическим ритуалом, а действительность нашего мышления не дает оснований для поиска самого правильного ритуала. Совершенствование теории множеств за счет добавления "естественных" аксиом в познавательном отношении не очень информативно; лучше прямо обратить взор на операциональный аспект аксиоматики. Тогда мы сможем, по крайней мере, освободиться от иллюзии, будто несчетное множество содержит "очень много" элементов, и сообразить, что просто наша система сама себе "ставит подножку". Что касается недостижимых ординалов, то мы можем слегка подправить нашу теоретико-множественную интуицию, вернув ей обычно отвергаемый оттенок конструктивности (достаточно в нужном месте ограничить предельный переход "рекурсивными" последовательностями ординалов). Так мы получим интересное и неотягощенное излишней проблематичностью понятие конструктивно недостижимого ординала. Эти соображения можно представить в виде ослабленной аксиоматики теории множеств [12], выдержанной в привычном абстрактном стиле. Вообще осознание того, что не множества и не бесконечность являются подлинным предметом теории множеств, а само математическое мышление,- открывает простор для осмысленных модификаций и альтернатив.

Здесь уместно вспомнить, что теория множеств исторически возникла ради "обоснования" математического анализа, и встает вопрос, насколько данный способ формализации подходит для естественно-научных применений этой дисциплины. Конечно, не приходится ожидать, что несообразности обнаружатся на первых шагах (иначе теоретико-множественная математика просто не состоялась бы); однако надо признать, что классическая (дедекиндова) модель континуума не вполне отвечает своему назначению. Чтобы увидеть это, надо вновь предпринять обстоятельную экскурсию в физику. Обратимся опять к теории относительности (на этот раз - к общей). В ней провозглашается равноправие любых систем отсчета. Из этого делается популярное умозаключение,что утверждение о вращении Земли не имеет определенного смысла, и с тем же успехом можно полагать, что Солнце вертится вокруг нее. С другой стороны, учитывая сказанное в предыдущем параграфе (насчет определения длины), можно попытаться дать другое, "динамическое" определение вращения (с помощью маятника Фуко). Правда, это определение (применимое к Земле и к стоящей на ней карусели) все же имеет ограниченную область применимости (качание маятника обусловлено гравитацией); но какая в этом печаль? Зато оно не зависит от кинематических представлений о вращении относительно чего-то. Однако его исследование подводит нас к новому вопросу: о статусе инерциальных систем в контексте общей теории относительности. Кажется, что это понятие приобретает здесь чисто конвенциональный характер; но все дело в том, что грань между конвенциональным и эмпирически осмысленным тоже подвижна (как между логикой и физикой при определении массы). Равноправие систем отсчета подразумевает возможность перевода физических уравнений из одной системы в другую. А что если одна система совершает относительно другой весьма произвольные движения? Допустим, что за систему отсчета выбран хвост некоторой собаки. Вообразите себе ученую блоху, живущую на этом хвосте и пытающуюся построить физику; сомнительно, что ей это удастся. В самом деле, попытаемся перейти от системы Земли к системе хвоста. Мы должны будем учесть закон движения хвоста относительно Земли. Но предположение о наличии такого закона - это уже не физика, а философия, притом весьма сомнительная. Если же мы попробуем задействовать в уравнениях эмпирически наблюдаемые движения собачьего хвоста, мы, пожалуй, выйдем за пределы дозволенного теорией относительности. Похоже, что мы наткнулись на скрытую предпосылку: данная теория ориентирована на некую макросистему, элементы которой ведут себя, в достаточной степени, взаиморегулярно, и потому каждый из них может быть принят за систему отсчета. Тогда мы получаем возможность говорить о физической осмысленности "по модулю" такой (неопределенно мыслимой) макросистемы. Думаю, что мы имеем на это методологическое право, поскольку речь идет, некоторым образом, о Вселенной. Приняв это к сведению, заметим, что ускорение проявляет себя (в связи с конкретной системой отсчета) в двух разных видах: как кинематический эффект и как силовое действие, обусловленное искривлением пространства. Игнорировать это различие мы не вправе, потому что за ним скрываются разнокачественные (как физические процессы) измерительные процедуры. Значит, мы можем придать смысл относительной инерциальности двух или более систем, оставляя на субъективное усмотрение вопрос о том, считать ли их "абсолютно" инерциальнными; например, в качестве приблизительного эталона можно взять Землю, а затем улучшать эталон, как это вообще делается в физике. Но можно сделать попытку продвинуться чуть дальше - ценой дальнейшей "подвижки" в определении границ конвенциональности (т.е. дополнительных, но все еще разумных ограничений на требование инвариантности физических законов). Рассмотрим комплекс тесно взаимодействующих систем отсчета (физических тел), достаточно изолированный от остального мира: Земля и движущиеся по ней предметы - или Солнечная система. Сопоставляя кинематические и инерционные феномены в разных системах этого комплекса, мы, быть может, сумеем уловить вразумительное различие между проявлениями "настоящей" кривизны пространства и так называемыми псевдосилами - и таким образом обрести "объективный" (для данного комплекса) эталон инерциальности. Отрицать физическую значимость подобных рассмотрений можно только при наличии установки на полнейшую универсальность, каковая, с некоторого момента, начинает производить комическое впечатление. В предыдущем обсуждении наиболее существенным для нас моментом было то, что системы отсчета трактуются исключительно как физические тела, а не как движущиеся системы координат. Привычка к идеализациям терпима в небольших количествах, но трудно признать нормальным, когда теория превращается в нагромождение "чего-то тензорного", связанного с реальностью лишь посредством разрозненных экспериментов.

Тут мы имеем злоупотребление математикой как таковой,безотносительно к ее теоретико-множественному представлению.Чтобы пойти еще дальше, следовало бы вернуться к деликатному вопросу о вибрациях систем отсчета; но лучше "сменить пластинку": аналогичные обстоятельства выявляются в аналитической (гамильтоновой) версии классической механики при ее сопоставлении с первоначальной (ньютоновской) формой изложения этой науки.С этого можно было бы прямо и начать, но мне хотелось, помимо прочего, указать на типичность затронутых проблем и "приучить" к ним читательское внимание. Аналитической механике рассмотрение произвольных движений так же "не к лицу", как и теории относительности: слишком она "инвариантна" для этого. По той же причине для нее существуют только консервативные силы (когда работа по замкнутому контуру равна нулю). Основным источником неконсервативности в природе являются трение, вязкость - то,что связано с тепловыми потерями, вихрями, пузырями. Теоретическая физика любит пренебрегать этими низменными материями. Но если принять всерьез эти "помехи" и попытаться вставить их в фундаментальные уравнения, то будет ли резон надеяться на их непререкаемую точность? И вообще: каков методологический статус "несовершенства"? Физики понимают, что измеренные величины приблизительны, но мыслят их как приближение к чему-то точному. Считается, что переменные, входящие в формулировку физического закона, пробегают дедекиндов континуум (множество бесконечных дробей). Если в связи с этим возникнут трудности,то ответственность ложится уже не просто на математику, а именно на теорию множеств.

Наиболее выразительный методологический конфликт возникает по поводу необратимых процессов. Когда мы привлекаем статистику для исследования газовых законов применительно к механической модели газа, мы как бы отдаем дань ограниченности наших возможностей: чтобы не гоняться за каждой молекулой (отслеживая ее движение по законам механики), мы что-то усредняем. Но такое вынужденное усреднение - это наша личная проблема, оно не должно привлекаться для объяснения наблюдаемых феноменов. Между тем, законы механики (и не только механики) обратимы: например, солнечные затмения можно с одинаковым успехом "предсказывать" как в будущем, так и в прошлом. Откуда же берется необратимость? Ссылка на усреднение, превращающее замысловатую фазовую траекторию в двумерную протяженность, неубедительна. Столь же беспомощно выглядит попытка "сохранить лицо" теории, указывая на исчезающе малую вероятность обратного хода некоторых процессов. Можно ли принять всерьез уверение, будто возникновение целой спички из обгорелой есть возможное, но маловероятное событие? Не лучше ли пристальнее вглядеться в предпосылки? Можно сохранить обратимость фундаментальных уравнений и уйти от парадокса за счет ревизии бесконечности. В чуть более общем виде вопрос ставится так: надо "помирить" случайность и детерминированность, не апеллируя к нашей ограниченности. Предположим, к примеру, что частица, движущаяся строго горизонтально, в неопределенный момент спонтанно приобретает вертикальную составляющую скорости. Конечно, тут подразумевается принципиальная приблизительность всякой "строгой" горизонтальности; мы просто по-другому идеализируем. При этом предполагается, что если частица движется горизонтально в момент t, то она так же будет двигаться и в момент $t + 1$, но когда-нибудь это прекратится. Мы нарушаем принцип математической индукции, однако стоит ли делать из него культ? Математическая логика позволяет корректно оформить эти соображения [4]. Возникающая в этой связи "альтернативная бесконечность", пожалуй, более плодотворна для приложений математики, нежели для нее самой, хотя соответствующая теория множеств тоже интересна.

Последовательное проведение только что намеченной идеи позволяет устранить неоправданно резкую грань между дискретным и непрерывным (так, между прочим, "решаются" парадоксы Зенона). Особую прелесть, в этом контексте, приобретает обобщенное понимание геометрии как системы инвариантов некоторой (непрерывной) группы преобразований. Так можно уловить в математические сети интуитивную идею, что пространство существует лишь приблизительно. Вообразите, что три мухи пытаются выскочить из плоскости, через них проходящей. Можно ли придать этому разумный смысл? По-видимому, да, и это стоит сделать, особенно в следующей философско-гуманитарной связи. Сейчас любят совать идею пространственности куда попало: говорят, например, о социальном пространстве - не как о метафоре, а как о чем-то геометрическом, инвариантном. Этим способом, вроде бы, можно обосновать мир платоновых идей как внутреннюю геометрию социума, так что мы получим вполне добропорядочную на вид натурфилософскую гипотезу. Однако существует ли эта геометрия? Не окажется ли на поверку мир идей чем-то более несообразным, чем Страна Чудес Льюиса Кэррола - настолько несообразным, что правильнее говорить о его несуществовании? Аналогичные сомнения возбуждает концепция физического поля. Первоначально (пока исходили из мгновенности дальнодействия) это был всего лишь удобный математический трюк. Но впоследствии, когда обнаружились эффекты запаздывающего действия, поле как бы "материализовалось". Позволительно спросить: не проявились ли при этом издержки не-адекватной (в новых условиях) формализации, а мы используем эти издержки для объяснения реальных явлений? Это похоже на правду, поскольку трудности, как и следовало ожидать, возникли вблизи микроуровня, где перестают действовать упрощающие предположения. Может быть, стоит вернуться ("на новом витке") к механическим моделям дальнодействия, которые пытался строить автор "полевой" физики Максвелл. Еше меньше резонов рассуждать о биологических или психических полях - пусть даже в связи с предполагаемым наличием необъяснимых квазирегулярных феноменов: возражение, в первую очередь, вызывает не само их существование, а попытки их регуляризации. Мне нетрудно допустить, что какие-то непонятные закономерности выполняются, пока мы на них полагаемся; но историко-культурные соображения подсказывают, что задача скорее заключается в обеспечении условий их невыполнения. Мы не можем познать общество, не разобравшись со свободой, а она предполагает преодоление социально-психической "необходимости"; между тем, ослабление социальных связей неизбежно разрушит многие эффекты традиционной человечности. Таким образом, методология (включая теорию множеств) становится прикладной наукой.

В заключение этого параграфа поговорим об альтернативной теории множеств [4] и уточним, в каком смысле ее можно считать альтернативной. Эта теория интерпретируема в традиционной теории множеств Цермело-Френкеля (ZF) посредством достаточно замысловатой модели. Вместе с тем, в ней заведомо можно проинтерпретировать ZF без аксиомы степени (существования множества подмножеств), что небезынтересно в философском отношении, поскольку "настоящая" бесконечность в ней отвергается, но это не мешает сохранить классические разделы математики. Вероятно, в естественном расширении альтернативной теории множеств (выдержанном в духе ее идеологии) удалось бы обосновать и аксиому степени: достаточно "подключить" эффективистские идеи дескриптивной теории множеств и метарекурсии. Но тут обнаруживаются обстоятельства, способные скомпрометировать такое желание, и которые мы обсудим в следующем параграфе. Но заметим сразу, что взаимная интерпретируемость двух теорий не снимает вопроса об альтернативности соответствующих подходов (формализованными частями которых эти теории являются). Главное здесь - акт переоценки, переход к новым предпосылкам. Основная предпосылка ZF состоит в том, что все конечные совокупности являются таковыми в некотором одинаковом смысле (единица и триллион равноправны). В таком случае бесконечное может быть лишь формальным отрицанием конечного; но эта формальность плохо вяжется со здравым смыслом, согласно которому бесконечность есть скорее один из возможных аспектов большого конечного. Напротив,исходные предпосылки альтернативной теории множеств связаны с незаконными для традиционной математики идеями "кучи", "горизонта" и т.п. Их конкретную аксиоматизацию можно вложить в ZF, но это ничуть не меняет дела: мы выходим в новую парадигму.Можно на - стаивать,что "на самом деле" мы никуда не вышли,а просто наложили на себя дополнительное обязательство: впредь ограничивать свой интерес специальными конструкциями,осуществленными в рамках прежних возможностей.Формально это так.Но тем не менее,исследователь ставится перед выбором, что более значимо: то, что можно оставаться в старой парадигме, или то, что можно "отпасть" от нее? Иначе говоря - не принимать всерьез традиционные основоположения. Второй вариант, применительно к этой теории,представляется более естественным.

Новое не рождается на пустом месте; обычно оно возникает из старого, преуспевшего в своей компрометации. Известный афоризм:"Где начало того конца, которым оканчивается начало?" - долго мог казаться пустою забавой (на фоне "старого" мышления).

Нужно было сообразить, что на подобные вопросы незачем искать определенные ответы (за счет произвольных "уточнений"): можно принять на вооружение саму их "невразумительность" - и мыслить о ней членораздельно. Подразумеваемая неопределенность ситуации (довольно типичная в практике нематематического мышления) может быть с успехом использована <u>вместо</u> наивного представления бесконечности как чего-то величественного и важного. Но чтобы об этом догадаться, надо было изрядно расшатать сложившиеся мыслительные стереотипы. Можно указать длинный перечень конкретных моментов из истории науки и философии, где происходило такое расшатывание: от замечаний Канта о природной и социальной целесообразности [13], положенных им в основу этики, до современной концепции хаоса [14]. Математическая логика тоже внесла немалый вклад в это дело. "Первой ласточкой" была аксиома сводимости [10] с присущей ей двусмысленностью в понимании свойств (уже подразумевающей определенное недоверие к бесконечности); затем последовали дедуктивная неполнота, теоретико-множественная "абсолютность", метод форсинга. Стало ясно, что "утрата определенности", на которую до сих пор иногда сетуют [15], - это достижение математической мысли, а не ее декаданс.

Проследим в этой связи, как формировалась идеология альтернативной теории "в лоне" классической теории множеств. Начнем с разграничения между классами и множествами. Множество - это целостный объект мысли или опыта, составленный из уже имеющихся в наличии элементов (которые, таким образом, как бы логически предшествуют самому множеству). Напротив того, класс - это скорее признак или "тип данных", под который могут подходить различные объекты, оказавшиеся в поле нашего внимания; мысль о совокупности объектов с этим свойством предшествует им самим (в этой связи говорят об "открытой" совокупности). Уже на этом уровне можно ощутить нечто, предвосхищающее альтернативную теорию множеств. Возьмем заведомо конечное множество X (например, состоящее из пяти элементов);нетрудно представить себе множество P(X) всех его подмножеств. И хотя запас всевозможных свойств элементов X довольно необозрим (мало ли как их можно сформулировать), все же создается уверенное впечатление, что каждому свойству соответствует некоторый (быть может, неизвестный нам) элемент P(X) и, стало быть,это свойство имеет простое и естественное определение (список элементов соответствующего подмножества). Значит, каждый подкласс множества X есть множество. Почему бы не распространить этот принцип на все множества (а уж потом разобраться с бесконечностью)? Это заманчивая идея (все множества оказываются "вроде-конечными"), но есть в ней и что-то сомнительное. Если X - открытая совокупность, то данный принцип перестает быть убедительным; однако натуральный ряд (естественный эталон бесконечности) больше похож на класс, чем на множество. Объявляя его множеством,мы насилуем свою интуицию. Поэтому вышеприведенная аргументация так и осталась неформальным комментарием к расселовской ступенчатой логике с аксиомой сводимости [10], а сама она вскоре была вытеснена аксиоматической теорией множеств первого порядка. Эвристический намек на то, что различие между множествами и классами может быть приспособлено для углубленного понимания "конечного", был предан забвению.

Нелишне заметить, что стремление отождествлять классы и множества чревато парадоксами, если не принять мер предосторожности (каковые были приняты и Расселом, и Цермело). В явной форме различие между этими родами совокупностей было проведено в теории Геделя-Бернайса (консервативном расширении ZF), где присутствуют особые переменные для классов. Тем не менее, упомянутый выше принцип сохраняется: подкласс множества есть множество. Устранив его, получаем ослабленную теорию, в которой мы вынуждены допустить возможность новых сущностей - "полумножеств" (подклассов множеств, которые сами множествами не являются). Дополнительно постулировав их существование, мы обретаем законную возможность различать конечные и бесконечные множества: конечные множества - это те,которые удовлетворяют принципу Рассела (они не содержат полумножеств). При этом натуральный ряд оказывается полумножеством. Чтобы на такой основе возникла хорошая математика, желательно принять для полумножеств подходящий аналог принципа Рассела; в этом и состоит смысл предложенной в [4] аксиомы экстраполяции за горизонт. Другие аксиомы можно добавлять "по вкусу" и по мере надобности. Ввиду интуитивной привлекательности этого подхода (и означенной связи с расселовским логицизмом), исследователь вправе отвергнуть научно-фантастическую версию бесконечности, задействованную в ZF, и переориентировать математическое мышление на наглядные образы "кучи" и "горизонта".

§3. Обобщенно-алгоритмические языки

Сейчас мы перейдем к рассмотрению класса формальных языков, которые по своему синтаксическому характеру являются алгоритмическими языками (в том смысле, что в подразумеваемой интерпретации правильно построенные выражения этих языков представляют собой не высказывания, а программы). Однако эти программы не транслируемы на язык обычных машин Тьюринга,их нельзя выполнить на реальных вычислительных машинах. К рассмотрению таких языков мы приходим в результате попытки наиболее явной реализации высказанной выше идеи, что аксиомы задают всего лишь правила обращения с какими-то безразличными нам объектами. Еще оставаясь в традиционных рамках, мы можем ввести в сигнатуру функциональные символы для операции предельного перехода или взятия множества всех подмножеств. Но в этом случае в качестве значений переменных выступают абстрактные объекты,существующие лишь для нас (как интерпретаторов системы), но не для самой, так сказать,системы в ее чисто формальном действовании. Хотелось бы, чтобы в роли упомянутых значений фигурировали синтаксические объекты (или их коды - натуральные числа). Конечно, это не избавляет нас от нестандартных интерпретаций натуральных чисел и не возвращает "утраченной определенности", связанной с издержками всякой формализации, но тот "порядок идей", к которому мы сейчас стремимся, делает наличие этих интерпретаций менее существенным.

Разберемся в этом чуть подробнее. Общую теорию рекурсии (которую я здесь имею в виду) можно в двух словах охарактеризовать как систематическое распространение методов теории алгоритмов на абстрактные разделы математики. Изучаемые в ней "вычислимые" функции либо заданы на неконструктивных объектах (например, на ординалах), либо используют неэффективные операции в качестве "вычислительных инструкций". Иногда с такими "вычислимыми" объектами вообще не соотносится какая-либо идея "вычисления"; в других случаях можно говорить о "воображаемых" вычислениях. Таким образом, понятие алгоритма как бы отрывается от естественной области своего использования, а алгоритмические конструкции становятся просто одной из форм представления математических знаний. Эта форма, противостоящая традиционному языку логики предикатов, имеет во многих ситуациях важные методологические преимущества.

Стоит заметить, что и сама теория алгоритмов возникла отнюдь не из потребностей вычислительной практики, а из интереса к основаниям математики. Ей предшествовали: дескриптивная теория множеств, интуиционизм, аксиоматические изыскания. Концепции универсальной функции, униформизации, эффективной отделимости - старше, чем теория рекурсивных функций. Эффективная конструкция как объект повышенного внимания исследователей первоначально выявилась именно в теоретико-множественной математике. В этом смысле переход от обычной теории алгоритмов к обобщенной был своего рода "возвращением к истокам". Подобный обмен опытом между арифметикой и теорией бесконечных множеств следует признать весьма плодотворным. Прецеденты, создаваемые дескриптивной теорией множеств (а также конструктивным анализом), представляют существенный интерес для нашей темы. Теория искусственного интеллекта и методология естествознания так или иначе должны выяснить свои отношения с бесконечностью - притом "внутри себя", а не принимать ее как нечто извне данное. И если для оснований физики больше подходит альтернативная теория множеств, то обобщенная вычислимость непосредственно соприкасается с вопросами организации сложных информационных процессов. В этом смысле аналитические конструкции (взятые в аспекте их квазиалгоритмического моделирования) могут быть источником полезных идей. Основания анализа (в отличие от самого анализа с его, в целом, физической направленностью) способны доставлять нам хороших "подопытных кроликов".

Что же такое теоретико-множественная эффективность? Какими методологическими ориентирами следует руководствоваться при ее постижении и почему это важно? По-видимому, в начале века философствующие математики были травмированы парадоксами (а затем дедуктивной неполнотой), что стимулировало поиск "надежного" математического обеспечения хотя бы для традиционных приложений математики. При таких обстоятельствах эффективность стала выступать как синоним достоверности, а своеобразным эталоном неэффективности оказалась аксиома выбора. Некоторые основания к этому имелись. Использование этой аксиомы вносит неопределенность не только в процедуру математического конструирования, но и сам конструируемый объект становится неопределенным "в себе". Кажется, Рассел однажды проиллюстрировал эту ситуацию следующим образом. Допустим, имеется бесконечное множество пар ботинок, и надо выбрать по одному из каждой пары. Это легко сделать: можно всегда выбирать левый ботинок. Но как быть, если требуется осуществить (хотя бы мысленно) аналогичную серию актов произвольного выбора в случае бесконечного множества пар носков? Неудовлетворительность ситуации заключается даже не в том, что я и мой коллега выберем разные множества, а скорее в том, что мне самому неясно, имею ли я в виду определенный (хотя бы неизвестный) объект. Это не согласуется с духом самой теории множеств, в которой неукоснительно соблюдается принцип математической индукции, и, следовательно, все объекты мыслятся как "четкие" (для нечетких свойств этот принцип неверен: отец человека есть человек, но было бы нелепо, на основании математической индукции, отвергать гипотезу Дарвина). Установка на эффективно "построяемые" сущности, видимо, должна гарантировать от такой неприятности; но есть ли у нас действительно эти гарантии? Откажемся от аксиомы выбора и, более того, ограничим свои рассмотрения рекурсивными функциями. Избавит ли это нас от примеров, подобных вышеупомянутому (с носками)? Каждая машина Тьюринга задает некоторое рекурсивно-перечислимое множество. В аспекте теоретико-множественного понимания эффективности, можно согласиться, что это - эффективный объект. Но всегда ли можно считать это множество однозначно определенным? Слегка модифицируя доказательство теоремы Гёделя, можно установить следующую лемму. Пусть $T_1,\dots,T_n$ - непротиворечивые теории, содержащие арифметику. Можно эффективно построить арифметическую формулу $\nu(T_1,\dots,T_n)$ (содержательно выражающую утверждение об остановке некоторой машины Тьюринга), которая недоказуема и неопровержима ни в одной из теорий T_i. Построим рекурсивное множество теорий T_u, где u пробегает всевозможные кортежи из нулей и единиц. В качестве $T_{<>}$ возьмем ZF; пусть уже построен список $\mathfrak{M}_n$ теорий T_u для всех u длины $\leq n$. Положим $\varphi_n = \nu(\mathfrak{M}_n)$, и для любого v длины $n+1$ пусть $T_v = T_u + \varphi_n$, если $v = u,0$, и $T_v = T_u + \neg\varphi_n$, если $v = u,1$ (для подходящего u длины n). Тогда любой конечный набор формул вида $(\varphi'_{n_1},\ldots,\varphi'_{n_p})$, где φ'_n есть φ_n или $\neg\varphi_n$, совместен с ZF. Пусть β - произвольная бесконечная последовательность нулей и единиц; множество $\{\varphi_n^\beta: n = 0,1,\ldots\}$, где $\varphi_n^\beta = \varphi_n$, если $\beta(n) = 0$, и $\varphi_n^\beta = \neg\varphi_n$, если $\beta(n) = 1$, также совместно с ZF. Принимая во внимание рекурсивность последовательности φ_n, легко указать машину z, для которой мы можем без противоречия назначать по своему произволу, на каких аргументах она останавливается. Стало быть, соответствующее рекурсивно-перечислимое множество эффективно (оно задается машиной z) и в то же время - произвольно. Спроецировать эту конструкцию в дескриптивную теорию множеств не составляет труда.

По-видимому, достоинство эффективистского подхода реально заключается в том, что изучение подразумеваемого содержания происходит не в самой теории, а фактически на "метауровне"; теория используется лишь как источник синтаксических конструкций. Некоторые элементы этих конструкций суть чьи-то имена, но мы можем об этом забыть; когда мы кодируем что-либо числами, их количественный смысл нам неважен (даже если мы эти числа перемножаем). Надо только позаботиться, чтобы этот стиль последовательно выдерживался. Тут есть свои тонкости, анализ которых позволяет избежать методологических ошибок и оценить преимущество конструктивного моделирования перед аксиоматизацией. Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере. Возьмем язык логики первого порядка с функциональной сигнатурой. В нем можно строить так называемые термы из функциональных символов, переменных и констант (при помощи суперпозиции). Термы - это синтаксические конструкции как раз такого вида, который нас сейчас интересует (правда, довольно примитивные). Одновременно мы можем вводить новые функциональные символы и константы (посредством дедуктивно обоснованных определений) и, в свою очередь, использовать их для построения термов. В частности, одно из правил логики позволяет проводить рассуждения следующего вида: пусть существует x, для которого $\varphi(x)$, зафиксируем одно из таких x и обозначим его через c. Здесь мы уже нарушаем принцип эффективности: акт именования допустим (в рассматриваемой связи) только тогда, когда он эффективен. В данном случае этого не может быть, поскольку имя c принадлежит синтаксису, а его денотат - семантике (вернее, тому ее аспекту, который связан с пониманием сигнатуры). Другое дело - когда одни формальные объекты кодируются другими (как это бывает, когда мы, например, работаем с универсальной вычислимой функцией). Для того чтобы упомянутая идея "метатеоретического программирования" могла полноценно реализоваться средствами некоторой теории, последняя должна располагать достаточно развитой "надстройкой", обеспечивающей ей (теории) возможность высказываться о самой себе. Любая теория, содержащая арифметику, способна "вырастить изнутри" такую имитацию своего "метауровня"; особенно привлекательна в этом отношении теория множеств, довольно непринужденно адаптирующая к своему языку даже "идеологически чуждые" ей концепции (форсинг, полумножества, нестандартные модели). Надо только "раскрепостить" ее из-под власти исходных интуиций, положенных в основу ее аксиоматики. И вот тут-то как раз выявляется распространенная ошибка: когда конструктивные объекты (например, натуральные числа, кодирующие синтаксис) некритически отождествляются с аналогичными (даже, вроде бы, теми же самыми) абстрактными объектами (например, с элементами множества ω), воспринятыми в аксиоматическом плане в рамках рассматриваемой теории. На этом смешении, в частности, основаны вульгарно-философские комментарии к теореме Гёделя; к слову сказать, подобные приемы могут дать интересные эффекты, например, в поэзии. Но хотя и можно согласиться, что математика (наряду с искусством) есть двусмысленность, возведенная в систему, все же желательно отдавать отчет, как работает такая двусмысленность и где она неуместна.

Итак, в работах по дескриптивной теории множеств, задолго до возникновения теории алгоритмов, фигурировала идея эффективности, соотнесенная с абстрактными объектами (множествами вещественных чисел) и заведомо несводимая к интуитивному понятию вычислимости. Позднейшие исследования по теории вычислимых функционалов конечных типов [16], по существу развивающие и уточняющие замысел дескриптивной теории множеств,дают неявную, но интересную подсказку, что искомое уточнение идеи эффективности следует искать на пути характеризации логически корректных разновидностей бесконечного перебора. Как показывают парадоксы Зенона, невозможно представить себе (не прибегая к альтернативной теории множеств) процесс перебора всех точек континуума в их естественном порядке, в то время как перебор натуральных чисел более или менее доступен нашему воображению.Допущенные к рассмотрению виды бесконечных переборов можно включить в вычислительный процесс через посредство подходящих "оракулов" - неалгоритмических датчиков ответов на вопросы соединенной с ними вычислительной машины. Разумеется, такой процесс может быть лишь воображаемым, и машины с оракулами не могут непосредственно претендовать (как часто думают) на роль математической модели общения человека с машиной. (Тем не менее, с математической точки зрения правомерно интересоваться абстрактными, квазипрограммистскими моделями искусственного интеллекта – как источниками вдохновляющих аналогий, и для таких исследований язык машин с оракулами может оказаться наиболее удобным.)

Алгоритмообразные процедуры с абстрактными объектами имеют более гибкий синтаксис, нежели язык логики предикатов, и их конструкции являются носителями более богатого "синтаксического" содержания. И вообще такой язык практически весьма удобен: поэтому, например, в учебниках по анализу мы постоянно сталкиваемся с подобными "алгоритмами" (деление отрезка пополам в поисках предельной точки и т.п.); правда, сюда же подключаются и весьма неэффективные действия (распознавание непустоты множества, попавшего в данную половинку). Встает вопрос: насколько эффективными являются процедуры, применяемые в таком качестве в дескриптивной теории множеств? Внимательное рассмотрение показывает, что, помимо тривиального "счетного перебора", там присутствуют акты распознавания непустоты и даже несчетности борелевских множеств, которые сами нуждаются в обосновании. В теории вычислений с оракулами это можно сделать [17]. И все же тот факт, что эффективизация в дескриптивной теории множеств ограничивается подмножествами континуума (а сам дедекиндов континуум остается в неприкосновенности), явился источником неразрешимых теоретико-множественных гипотез, на что указывал Н.Н.Лузин [18] еще до того, как их неразрешимость была установлена. Прямое применение алгоритмических методов к абстрактным сущностям приводит к тому самому смешению, о котором упоминалось выше: эффективно "построяемые" вещественные числа (появляющиеся в теории хотя бы под видом одноэлементных борелевских множеств) помещаются в классический универсум, в котором, как нам кажется (из плохо понятых мощностных соображений), должны существовать также и неэффективные числа, не имеющие индивидуального описания. Из-за этого проблема непустоты эффективных множеств приобретает смысл, неуловимый для конструктивизации,и последняя в некоторых местах как бы "захлебывается" по причине отсутствия нужных процедур.

Все же при данном подходе семантические акценты перемещаются от абстрактных объектов на структуру программ. Дальнейшего усиления этого эффекта можно добиться, позаимствовав некоторые приемы конструктивного анализа. В нем применяется логико-арифметический язык, в котором вместо сигнатурных функциональных символов применяются "функторы" (коды алгоритмов).Роль абстрактных объектов тоже исполняют подходящие алгоритмы, так что мы имеем дело исключительно с конструктивными объектами.Существенно здесь то, что упомянутые коды функционируют не просто как имена, но еще и как носители алгоритмических процессов: тем самым преодолевается неэффективность актов именования и, вместе с тем, остается широкий простор для применения этих актов и их комбинирования с другими процедурами. Заметим, что при рассмотрениях такого сорта не обязательно ориентироваться на механически реализуемую вычислимость. Дело не в ней, а в общей тенденции к более вразумительному освоению "стандартной" семантики натуральных чисел, тесно связанной с конструктивными объектами. Подчеркнем, что интуитивные идеи насчет стандартной модели арифметики, в контексте ее аксиоматизации,становятся не очень понятными (любая порядочная теория имеет нестандартные модели). Сюда еще примешивается впечатление единственности "настоящего" натурального ряда (эта иллюзия разрушается в подходящей модификации альтернативной теории множеств). Подлинный смысл стандартной семантики выявляется лишь в операциональном аспекте,и когда последний достаточно развит в нашей теории, то это как раз и означает, что мы имеем дело с настоящими числами - даже если (как в случае с альтернативной теорией множеств) теория как аксиоматическая система не имеет стандартных моделей в привычном теоретико-множественном смысле.

Займемся теперь, не особенно вдаваясь в подробности, принципиальным описанием искомых обобщенно-алгоритмических языков. С ними, как нетрудно догадаться, будут связаны два рода семантической трактовки, к разъяснению каковых это описание по существу и сводится. Введем в язык (помимо тривиальных чисто вычислительных терминов) функциональные символы для обозначения неэффективных операций: к примеру, счетного перебора (джамп-операция) или даже акта произвольного выбора (селекторная функция). Если понимать под синтаксисом всего лишь определение правильно построенных выражений, то наши языки по виду могут не отличаться от так называемых "внутренних" языков вычислительных машин (адреса, команды и прочее). Семантика первого рода вполне определяется посредством интерпретации участвующих в командах функциональных символов как (частичных) числовых функций, удовлетворяющих некоторым условиям. Обычно такие интерпретации удается описать в терминах вычислений с подходящим оракулом [19]; они интересны, в первую очередь, как свидетельство корректности данного языка. Другой семантический уровень связан с упомянутыми условиями на функциональные символы. Эти условия таковы, что в подразумеваемой интерпретации область пробегания переменных состоит не из посторонних объектов, находящихся вне языка, а из программ самого этого языка. За счет такой особенности мы можем, рассуждая о программах (и об абстрактных сущностях, ими кодируемых), доказывать теоремы существования путем прямого конструирования искомой программы - но не сможем ее исполнить. Поэтому данный уровень, строго говоря, не может быть отнесен ни к синтаксису, ни к семантике, а занимает промежуточное положение между ними. Здесь тоже по-своему сказывается отмеченная мною выше двусмысленность натуральных чисел (в зависимости от того, что мы делаем: теоретизируем или вычисляем). Трудности сразу выявляются при попытке изложить нашу теорию в рамках альтернативной теории множеств (как относиться к ситуации, когда машина останавливается "за горизонтом"?). Возможно, что в обсуждаемой связи "вырисовывается" еще одна версия натурального ряда: элементы теоретизирования проникают внутрь самого вычисления, но это делается так, как будто мы все еще вычисляем. Это проникновение происходит за счет условий на функциональные символы, о которых я упоминал выше: аргумент, подставляемый в функциональный символ, есть код программы (быть может, содержащей тот же символ), а результат исполнения соответствующей команды должен быть связан с интересующим нас свойством функции, "вычисляемой" этой программой. Подобные вычисления подразумевают бесконечный перебор, произвольный выбор или еще что-нибудь (в зависимости от ассортимента функциональных символов и условий, на них наложенных). При таких обстоятельствах трудно понять, имеем ли мы дело с конструктивными или с теоретическими (по крайней мере, с не совсем конструктивными) объектами; но поскольку функциональные символы перенимают роль кванторов, операциональная семантика оказывается достаточно богатой и хорошо устроенной, так что нам незачем выходить из нее для обоснования возможности очередного шага. С точки зрения наработанных логико-методологических канонов, неясно, в каком мире мы находимся; можно лишь сказать, что это мысленный мир (допускающий теоретико-множественную интерпретацию, но не этим интересный). Ранее уже говорилось, что методология становится прикладной наукой; машинно-оракульная математика обладает, в этом смысле, привлекательными возможностями - даже в тех областях, к которым ее квазикибернетическая видимость (машины, оракулы) не имеет отношения. Главная суть в том, что здесь просматривается возможность "обезвредить" мифологическую фикцию актуальной бесконечности, не отказываясь полностью от ее услуг. Обсуждение того, как это делается и какие может иметь последствия, выходит за рамки данной статьи. Для этого надо более тщательно проанализировать некоторые логико-математические феномены, возникающие в связи с обобщенной вычислимостью, - и таким способом вычленить некое содержание, значимое не только для нашей теории, но и независимо от нее. Высказанные в этой статье критические соображения по поводу физики дают определенное указание, куда надо двигаться. Можно с аналогичных позиций взглянуть на биологию, обсудить проблему редукционизма (сводима ли биология к химии?), выявить издержки формализации. Все это подразумевает свободное владение логикой, умение ее модифицировать; понятно, что эффективность тут не самоцель, а методологический принцип. Прерывая этот ход мысли, замечу пока, что подобные изыскания способны, пожалуй, оказать ощутимое влияние на теорию организации и эволюции. Обобщая, добавлю, что в современной логике накопилось много "рассеяной" информации, доступной лишь узким специалистам, но имеющей общекультурное значение (особенно в связи с кризисом традиционных жизненных и мыслительных установок). Ее собирание, систематизация и приведение к общепонятному виду представляется весьма своевременным делом.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Об £A-пространствах //Алгебра и логика. - 1986. - Т. 25, № 5. - С. 533-543.

2. БЕЛЯКИН Н.В., САМОХВАЛОВ К.Ф. Логика мнений и ритуалов //Методологический анализ математических теорий. - М., 1988. - С.173-184. (Центр. совет филос. (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР.)

3. БЕЛЯКИН Н.В. Логика неформализуемости //Мышление, когнитивные науки, искусственный интеллект. - М., 1988. -С.16-35. (Центр. совет филос. (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР.)

4. ВОПЕНКА П. Математика в альтернативной теории множеств. - М.: Мир, 1983.

5. КЛИНИ С.К. Введение в метаматематику. - М.:Изд.иностр. лит., 1957.

6. КУЛАКОВ Ю.И. К теории физических структур.(Четыре лекции для студентов НГУ.) - Новосибирск, 1968. (НГУ).

7. FEFERMAN S. Transfinite progressions of formal systems //J.Symb.Logic. - 1962. -Vol. 27. - P. 259-316.

8. MYCIELSKI J. Analysis without actual infinity //J.Symb. Logic. - 1981. - Vol. 46. - P. 625-633.

9. ФЕЙНМАН Р., ЛЕЙТОН Р., СЭНДС М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 4. - М.: Мир, 1967.

10. ГИЛЬБЕРТ Д., АККЕРМАН В. Основы теоретической логики.- М.: Изд. иностр. лит., 1947.

11. ШАНИН Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства //Тр. Математического института им. В.А.Стеклова. - 1962. - Т. 67. -С. 15-294.

12. BARWISE J.K. Admissible sets and structures. - Berlin: Springer, 1975.

13. КАНТ И. Предполагаемое начало человеческой истории // Трактаты и письма. - М.: Мысль, 1980. - С. 43-59.

14. ПРИГОЖИН И., СТЕНГЕРС И. Порядок из хаоса. -М.: Прогресс, 1986.

15. КЛАЙН М. Математика. Утрата определенности. - М.: Мир, 1984.

16. KLEENE S.C. Recursive functionals and quantifiers of finite type //Trans. Amer. Math. Soc. - 1959. -Vol.91. -P. 1-52.

17. ГАНОВ В.А. Обобщенная вычислимость и дескриптивная теория множеств // Сиб. мат. журн. - 1974. - Т. 15, № 6. -С.242-261.

18. ЛУЗИН Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. - Собр.соч. Т. 2. - М.: АН СССР, 1958. - С.1-188.

19. БЕЛЯКИН Н.В. Вычисления с оракулами //Труды ИМ СО АН СССР. - 1989. - Т. 12. - С. 4-24.

Поступила в ред.-изд.отд.

29 августа 1991 года