ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИМОСТИ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1991 год Выпуск 139

УДК 510.5+519.68

ЯЗЫК ЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИФИКАЦИЙ ВЫСОКОГО УРОВНЯ И ЕГО ДЕНОТАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

Г.К.Абдрахманова

Введение

В настоящей статье описывается формальный логический язык высокого уровня, предназначенный для спецификации отношений на допустимых множествах [1]. Главной его особенностью является то, что в качестве подъязыка термов (семантических программ) здесь выступает расширение языка Σ-выражений Ю.Л.Ершова [2, 4] с помощью произведения предикатных термов. Эта особенность реализует центральный принцип семантического программирования - единство концептуально-логической основы языка специфи - каций и соответствующего языка программирования, - что позво - ляет в рамках единого языка не только специфицировать исходные задачи, строить соответствующие программы, но и исследовать свойства этих программ и процессы их построения [3].

Помимо описания языка спецификаций, в данной статье строится его денотационная семантика, основанная на построении "башни" непрерывных "предикатных" функционалов конечных типов (относительно некоторого допустимого множества). В качестве этой "башни" берется расширение "башни" $\mathcal{A}$ (построенной в [2] для язы - ка Σ-выражений) с помощью конечных прямых произведений.

Денотационная семантика позволяет построить исчисление языка термов, формулы которого выражают отношение аппроксимации между термами. Это исчисление содержит в себе аксиомы и правила вывода, указанные в [2,4], и дополнительные аксиомы и правила вывода, связанные с конструкциями произведений термов и вытекающие из денотационной семантики.

Конструкция произведения типов дает возможность приступить к решению задачи описания конструктивной семантики рассматриваемого языка типа реализуемости, где бы в качестве реализаций формул выступали термы этого языка [3]. Решение этой задачи - тема следующей публикации.

§1. Язык логических спецификаций

Пусть $\sigma = (=, \in, \ldots)$ - некоторая фиксированная сигнатура теории множеств KPU [1].

<u>Множество типов $\mathbf{T}$ и множество предикатных типов $\mathbf{PT}$</u> языка $\mathbf{L}$ определим следующими правилами:

0) $\mathbf{PT} \subset \mathbf{T}$;

1) $o \in \mathbf{T}$, $o \notin \mathbf{PT}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{PT}$;

2) если $\tau \in \mathbf{T}$, $\sigma \in \mathbf{PT}$, то $(\tau \to \sigma) \in \mathbf{PT}$;

3) если $\tau, \sigma \in \mathbf{PT}$, то $(\tau \times \sigma) \in \mathbf{PT}$;

4) других типов нет.

Очевидно, что $\mathbf{T} = \mathbf{PT} \cup \{o\}$. Через $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{PT}_0 \subset \mathbf{T}_0$ обозначим множество типов, полученное с помощью правил 1 и 2. Множество $\mathbf{T}_0$ есть в точности множество типов подъязыка Σ-выражений $\mathbf{L}^{\Sigma}$, рассмотренного в работе [2].

Индуктивно определим <u>множество термов</u> языка $\mathbf{L}$, для этого однозначно поставим в соответствие каждому терму его тип:

0) для каждого типа $\tau \in \mathbf{T}$ существует бесконечное множество переменных $\mathbf{X}^{\tau}$, являющихся термами типа τ;

1) обычные термы сигнатуры σ являются термами типа 0;

2) если P – n-местный предикатный символ сигнатуры σ, а $t_1,\dots,t_n$ - термы типа 0, то $P(t_1,\dots,t_n)$ и $\neg P(t_1,\dots,t_n)$ являются термами типа B;

3) константы $\perp_B$ (ложь) и $\top_B$ (истина) являются термами типа B ;

4) если Φ и Ψ - термы типа B, $x\in X^0$, t - терм типа 0, не содержащий x, то $(\Phi\wedge\Psi)$, $(\Phi\vee\Psi)$, $\forall x\in t\ \ \Phi$, $\exists x\in t\ \ \Phi$, $\exists x\ \ \Phi$ являются термами типа B ;

5) если Φ - терм типа $\sigma\in PT$, $R\in X^{\tau}$, то $[R;\Phi]$ - терм типа $(\tau\to\sigma)$;

6) если Φ - терм типа $(\tau\to\sigma)$, Ψ - терм типа τ, то $\Phi(\Psi)$- терм типа σ;

7) если Φ - терм типа $\tau\in PT$, Ψ - терм типа $\sigma\in\in PT$, то $\langle\Phi,\Psi\rangle$ - терм типа $(\tau\times\sigma)$;

8) если Φ - терм типа $(\tau\times\sigma)$, то $\pi_1\Phi$ - терм типа τ, $\pi_2\Phi$ - терм типа σ;

9) если $R\in X^{\tau}$, $\tau\in PT$, Φ - терм типа τ, то $\langle R\rangle\Phi$ - терм типа τ;

10) других термов нет.

Интуитивно определения пп. 5,6,9 можно понимать соответственно как операторы абстракции, применения функции к аргументу и нахождения наименьшей неподвижной точки.

Обратим внимание читателя на то, что определение терма языка L фактически следует определению подъязыка Σ-выражений L^{Σ} в [2], за исключением пп. 7,8 - образования пар термов и их проекций. Это позволяет нам в дальнейшем при построении денотационной семантики языка L существенно опираться на построенную денотационную семантику языка L^{Σ} [2].

Вхождение переменных x типа 0 и R типа $\tau\in PT$ в терм называется <u>связанным</u>, если оно является частью вхождения выражений вида $\exists x\ \Phi$, $\forall x\in t\ \Phi$, $\exists x\in t\ \Phi$ или $[R;\Phi]$, $\langle R\rangle\Phi$ соответственно.

Определим теперь класс <u>формул</u> языка $\mathbf{L}$:

0) каждый терм типа $\mathbf{B}$ является формулой, называемой в дальнейшем термальной;

1) если α_0 и α_1 - формулы, то таковыми же являются $\neg\alpha_0$, $(\alpha_0\vee\alpha_1)$, $(\alpha_0\wedge\alpha_1)$ и $(\alpha_0\to\alpha_1)$;

2) если $x\in X^{\tau}$, $\tau\in T$, α - формула, то $\forall^{\tau}x\ \alpha$, $\exists^{\tau}x\ \alpha$ - формулы;

3) других формул нет.

Свободное вхождение переменных в формулу определяется обычным образом.

Описанный язык $\mathbf{L}$ выступает одновременно как язык спецификаций (формулы) и язык семантических программ (термы).

Ниже будет построена денотационная семантика языка $\mathbf{L}$. Основой всех наших построений будет служить модель языка $\mathbf{L}^{\Sigma}$ - "башня" непрерывных "предикатных" функционалов [2] - $\mathcal{A}=(A_{\tau})_{\tau\in T_0}$ над фиксированным "миром" $\mathbb{A}$, являющимся фиксированным допустимым множеством сигнатуры σ [1] с неким выделенным классом предикатов $\mathbb{P}$, удовлетворяющим принципу Σ^{+}-объединения (см.[2]). Заметим, что области

$$A_{\tau}=(A_{\tau},A_{\tau}^{fin},\sqsubseteq_{\tau},fin_{\tau}:A\overset{\text{на}}{\to}A_{\tau}^{fin}),\quad \tau\in T_0,$$

имеют структуру полных f_A-пространств [6], если класс $\mathbb{P}$ является подклассом всех Σ-предикатов на $\mathbb{A}$. В дальнейшем предполагается, что класс $\mathbb{P}$ удовлетворяет вышеуказанным двум условиям. Все необходимые определения областей A_{τ}, $\tau\in T_0$, читатель может найти в работе [2].

Заметим, что непосредственно из результатов Ю.Л.Ершова [6] вытекает, что категорию полных f_A-пространств $\mathbb{P}$ +

$\leftrightharpoons (X, X_0, \leq, \nu\colon\ B \overset{\text{на}}{\to} X_0)$ с условием $B^* = Con_{X,\nu}\}$ можно декартово замкнуть. Декартова замкнутость означает замкнутость относительно прямого произведения и замкнутость относительно образования пространства непрерывных вычислимых отображений (обозначается $C(X, Y)$). Нетрудно проверить, что для каждого $\tau \in T_0$ A_τ удовлетворяет условию $A^* = Con_{A_\tau, fin_\tau}$ (определения см. в [2,6]). Следовательно, башню $\mathcal{A}$ можно расширить для более высоких типов $\tau \in T \setminus T_0$ естественным способом, полагая $A_{\tau\times\sigma} \leftrightharpoons A_\tau \times A_\sigma$; $A_{\tau\to\sigma} \leftrightharpoons C(A_\tau, A_\sigma)$. Но, опираясь на известные изоморфизмы полных f_A-пространств, связывающие прямое произведение пространств и образование пространств вычислимых непрерывных отображений [6], можно ввести естественное представление типов $\tau \in PT$ в виде произведения типов из PT_0. А это позволит ограничиться расширением башни $\mathcal{A}$ только прямыми произведениями.

§2. Расширение башни $\mathcal{A} = (A_\tau)_{\tau\in T_0}$ для всех типов $\tau \in T$

Рассмотрим наименьшее <u>отношение эквивалентности "$\sim$"</u> на множестве типов T, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $((\sigma\times\tau)\times\varepsilon) \sim (\sigma\times(\tau\times\varepsilon))$;

2) $((\sigma\to\tau)\to\varepsilon) \sim (\sigma\to(\tau\to\varepsilon))$;

3) $(\sigma\to(\tau\times\varepsilon)) \sim ((\sigma\to\tau)\times(\sigma\to\varepsilon))$;

4) если $\sigma\sim\sigma'$, $\tau\sim\tau'$, то $(\sigma\times\tau)\sim(\sigma'\times\tau')$ и $(\sigma\to\tau)\sim(\sigma'\to\tau')$.

Обозначим через $X(PT_0)$ следующее множество типов:

$$\{((\ldots(\tau_1\times\tau_2)\times\ldots)\times\tau_n) \mid \tau_i \in PT_0,\ i = \overline{1,n},\ n\in N\}.$$

В дальнейшем для удобства вместо $((\ldots(\tau_1 \times \tau_2) \times \ldots \ldots) \times \tau_n)$ и $(\tau_1 \to (\tau_2 \to \ldots (\tau_n \to \varepsilon)\ldots))$ будем соответственно писать $(\tau_1 \times \ldots \times \tau_n)$ и $(\tau_1, \ldots \ldots, \tau_n \to \varepsilon)$.

Индукцией по построению типов определим функцию $* : T \to X(PT_0) \cup \{o\}$, называемую в дальнейшем <u>представлением типов</u>:

0) $o^* \leftrightharpoons o$, $B^* \leftrightharpoons B$;

1) если $\tau = (\varepsilon \times \sigma)$ и определены $\varepsilon^* = (\varepsilon_1 \times \ldots \ldots \times \varepsilon_n)$ и $\sigma^* = (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k)$ - представления типов ε и σ соответственно, то полагаем $\tau^* = (\varepsilon_1 \times \ldots \ldots \times \varepsilon_n \times \sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k)$;

2) если $\tau = (\sigma \to \varepsilon)$ и определены ε^* и σ^*, то полагаем $\tau^* = ((\sigma_1, \ldots, \sigma_k \to \varepsilon_1) \times \ldots \times (\sigma_1, \ldots \ldots, \sigma_k \to \varepsilon_n)$.

Нетрудно понять, что данное определение корректно, т.е. действительно задает функцию в $X(PT_0) \cup \{o\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.

а) Для каждого типа $\tau \in T$ $\tau^* \sim \tau$;

б) для любого типа вида $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n \to B)$ *имеем* $\tau^* \in PT_0$ *(в частности, для всех* $\tau \in T_0$ $\tau = \tau^* \in T_0$*)*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО "а" проводим индукцией по построению типа τ. Очевидно, $o^* \sim o$, $B^* \sim B$. Пусть $\tau = (\varepsilon \times \sigma)$ или $\tau = (\sigma \to \varepsilon)$. По индукционному предположению $\varepsilon^* \sim \varepsilon$, $\sigma^* \sim \sigma$, $\varepsilon^* = (\varepsilon_1 \times \ldots \times \varepsilon_n)$, $\sigma^* = (\sigma_1 \times \ldots \ldots \times \sigma_k) \in X(PT_0)$. Тогда следующие цепочки эквивалентностей доказывают утверждение:

$$\begin{aligned}\tau = (\varepsilon \times \sigma) &\sim (\varepsilon^* \times \sigma^*) = \\ &= ((\varepsilon_1 \times \ldots \times \varepsilon_n) \times (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k)) \sim \\ &\sim (\varepsilon_1 \times \ldots \times \varepsilon_n \times \sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k) = \tau^*,\end{aligned}$$

$$\tau = (\sigma \to \varepsilon) \sim (\sigma^* \to \varepsilon^*) =$$
$$= ((\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k) \to (\varepsilon_1 \times \ldots \times \varepsilon_n)) \sim$$
$$\sim (((\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k) \to \varepsilon_1) \times \ldots \times ((\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k) \to \varepsilon_n)) \sim$$
$$\sim ((\sigma_1, \ldots, \sigma_k \to \varepsilon_1) \times \ldots \times (\sigma_1, \ldots, \sigma_k \to \varepsilon_n)) = \tau^*.$$

Доказательство "б" оставляем читателю в качестве упражнения.

Теперь, используя определенное выше представление типов, расширим башню $\mathcal{A} = (A_\tau)_{\tau \in T_0}$ для всех типов $\tau \in T$.

Пусть $\tau \in T$, $\tau^* = \tau_1 \times \ldots \times \tau_n$ - его представление в $X(PT_0) \cup \{o\}$, $n \geq 1$. Полагаем $A_\tau \leftrightharpoons A_{\tau_1} \times \ldots \times A_{\tau_n}$.

Нетрудно понять, что A_τ совпадает с соответствующей областью $A_\tau \in \mathcal{A}$ для $\tau \in T_0$. Очевидно, что A_τ имеет структуру полного f_A-пространства, как прямое произведение пространств:

$$\mathbf{A}_\tau = (A_\tau, A_\tau^{fin}, \sqsubseteq_\tau, fin_\tau\colon \mathbb{A}^n \xrightarrow{\text{на}} A_\tau^{fin}),$$

здесь

$$A_\tau^{fin} \leftrightharpoons A_{\tau_1}^{fin} \times \ldots \times A_{\tau_n}^{fin}; \quad \sqsubseteq_\tau = \sqsubseteq_{\tau_1} \ldots \sqsubseteq_{\tau_n};$$
$$fin_\tau((i_1, \ldots, i_n)) \leftrightharpoons (fin_{\tau_1}(i_1), \ldots, fin_{\tau_n}(i_n))$$

для всех $(i_1, \ldots, i_n) \in A^n$.

Естественность определений представления типов и областей A_τ, $\tau \in T$, показывает

ТЕОРЕМА 1.

а) $A_{(\sigma\to\varepsilon)} \simeq C(A_\sigma, A_\varepsilon)$, *т.е. существует изоморфное соответствие элементов* $A_{\sigma\to\varepsilon}$ *и непрерывных* *вычислимых отображений из* A_σ *в* A_ε *;*

б) $A_{(\sigma\times\varepsilon)} \simeq A_\sigma \times A_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\tau = (\sigma \to \varepsilon)$, $\sigma^* = (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k)$, $\varepsilon^* = (\varepsilon_1 \times \ldots \times \varepsilon_n)$, $k \geq 1$, $n \geq 1$. Тогда по определению

$$\tau^* = ((\sigma_1, \ldots, \sigma_k \to \varepsilon_1) \times \ldots \times (\sigma_1, \ldots, \sigma_k \to \varepsilon_n)),$$

а

$$A_\tau = A_{(\sigma\to\varepsilon)} = A_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k\to\varepsilon_1)} \times \ldots \times A_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k\to\varepsilon_n)} .$$

Значит, любой $f \in A_{(\sigma\to\varepsilon)}$ есть $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где для каждого $l \in \{1,\ldots,n\}$ $f_l \in A_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k\to\varepsilon_l)}$, или, если $\varepsilon_l = (\tau_1^l, \ldots, \tau_{t_l}^l \to B)$, f_l есть отображение из .

$$A_{\sigma_1} \times \ldots \times A_{\sigma_k} \times A_{\tau_1^l} \times \ldots \times A_{\tau_{t_l}^l}$$

в A_B , удовлетворяющее условиям (Σ), (m), (c) [2]. Для любого $(g_1, \ldots, g_k) \in A_\sigma = A_{\sigma_1} \times \ldots \times A_{\sigma_k}$ и каждого $l \in \{1,\ldots,n\}$ $f_l(g_1, \ldots, g_k) \in A_{\varepsilon_l}$, поэтому f можно рассматривать как отображение из A_σ в A_ε. Покажем, что f является непрерывным вычислимым отображением из A_σ в A_ε. Непрерывность означает [5], что, во-первых, f монотонно и, во-вторых, для любого $(g_1, \ldots, g_k) \in A_\sigma$ и любого $\bar{j} \in \mathbb{A}^n$ из того, что $fin_\varepsilon(\bar{j}) \sqsubseteq_\varepsilon f(g_1, \ldots, g_k)$, следует существование $\bar{i} \in \mathbb{A}^k$ такого, что $fin_\sigma(\bar{i}) \sqsubseteq_\sigma (g_1, \ldots, g_k)$ и $fin_\varepsilon(\bar{j}) \sqsubseteq_\varepsilon f(fin_\sigma(\bar{i}))$.

Монотонность f очевидным образом вытекает из монотонности f_l, $l \in \{1, \ldots, n\}$.

Покажем выполнение второго условия. Пусть $\bar{j} \in \mathbb{A}^n$, $(g_1, \ldots, g_k) \in A_\sigma$ и $fin_\varepsilon(\bar{j}) \sqsubseteq_\varepsilon f(g_1, \ldots, g_k)$, или покомпонентно $\forall l \in \{1, \ldots, n\}$

$$fin_{\varepsilon_l}(j_l) \sqsubseteq_{\varepsilon_l} f_l(g_1, \ldots, g_k).$$

В силу того, что $\forall \tau \in T_0$ и $\forall g \in A_\tau$

$$g = \bigsqcup_{i \in |g|_\tau} fin_\tau(i),$$

где $|g|_\tau \leftrightharpoons \{i \mid fin_\tau(i) \sqsubseteq_\tau g\}$ [2], для каждого $l \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$f_l(g_1, \ldots, g_k) = f_l(\bigsqcup_{i_1 \in |g_1|_{\sigma_1}} fin_{\sigma_1}(i_1), \ldots$$

$$\ldots, \bigsqcup_{i_k \in |g_k|_{\sigma_k}} fin_{\sigma_k}(i_k)),$$

а в силу непрерывности f_l как $\mathcal{A}$-предиката (свойство (c) из [2]) имеем $\exists q_1^l, \ldots, q_k^l \in \mathbb{A}$ такие, что $q_i^l \subseteq \subseteq |g_i|_{\sigma_i}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, и

$$f_l(g_1, \ldots, g_k) \sqsubseteq_{\varepsilon_l} f_l(\bigsqcup_{i_1 \in q_1^l} fin_{\sigma_1}(i_1), \ldots$$

$$\ldots, \bigsqcup_{i_k \in q_k^l} fin_{\sigma_k}(i_k)).$$

Полагаем

$$i_1^0 \leftrightharpoons U(\bigcup_{l=1}^{n} q_1^l), \ldots, i_k^0 \leftrightharpoons U(\bigcup_{l=1}^{n} q_k^l).$$

Очевидно, что $i_1^0, \ldots, i_k^0 \in \mathbb{A}$. Покажем, что $\bar{i}^0 \leftrightharpoons \leftrightharpoons (i_1^0, \ldots, i_k^0) \in \mathbb{A}^k$ есть искомый. Действительно, $fin_\sigma(\bar{i}^0) \sqsubseteq_\sigma (g_1, \ldots, g_k)$, так как

$$fin_{\sigma_t}(i_t^0) = fin_{\sigma_t}(\cup(\bigcup_{l=1}^{n} q_t^l)) =$$

$$= \bigsqcup_{i_t \in \bigcup_{l=1}^{n} q_t^l} fin_{\sigma_t}(i_t) \sqsubseteq_{\sigma_t}$$

$$\sqsubseteq_{\sigma_t} \bigsqcup_{i_t \in |g_t|_{\sigma_t}} fin_{\sigma_t}(i_t) = g_t$$

для каждого $t \in \{1,\dots,k\}$, в силу свойств fin_τ для $\tau \in T_0$. Нетрудно убедиться, что $fin_\varepsilon(\bar{j}) \sqsubseteq_\varepsilon$ $\sqsubseteq_\varepsilon f(fin_\sigma(\bar{i}^0))$ в силу выбора $\bar{i}^0$ и монотонности f.

Вычислимость отображения f из A_σ в A_ε по определению означает следующее [6]: множество $L_f = \{(\bar{i},\bar{j}) \mid \bar{i} \in A^k, \bar{j} \in A^n, fin_\varepsilon(\bar{j}) \sqsubseteq_\varepsilon f(fin_\sigma(\bar{i}))\}$ является Σ-множеством [1]. Так как

$$fin_\varepsilon(\bar{j}) \sqsubseteq_\varepsilon f(fin_\sigma(\bar{i})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathop{\&}_{l=1}^{n} (fin_{\varepsilon_l}(j_l) \sqsubseteq_{\varepsilon_l} f_l(fin_\sigma(\bar{i}))) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathop{\&}_{l=1}^{n} (j_l \in |f_l(fin_{\sigma_1}(i_1),\dots,fin_{\sigma_k}(i_k))|_{\varepsilon_l}),$$

а для любого $l \in \{1,\dots,n\}$ и любого $g \in A_{\varepsilon_l}$ множество $|g|_{\varepsilon_l}$ есть Σ-множество, то получаем, что L_f - тоже Σ-множество.

Теперь пусть φ - непрерывное вычислимое отображение из A_σ в A_ε. Нетрудно понять, что $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, где каждое φ_l есть непрерывное вычислимое отображение из A_σ в A_{ε_l}, $l \in \{1,\dots,n\}$. Пусть $\varepsilon_l = (\tau_1^l, \dots$ $\dots, \tau_{t_l}^l \to B)$. Для каждого $l \in \{1,\dots,n\}$ рас - смотрим отображение

$$\tilde{\varphi}_l : A_{\sigma_1} \times \dots \times A_{\sigma_k} \times A_{\tau_1^l} \times \dots \times A_{\tau_{t_l}^l} \to A_B ,$$

задаваемое следующим образом:

$$\tilde{\varphi}_l(f_1,\dots,f_k,g_1,\dots,g_{t_l}) \leftrightharpoons$$

$$\leftrightharpoons \varphi_l(f_1,\dots,f_k)(g_1,\dots,g_{t_l}) .$$

Убедимся, что каждое $\tilde{\varphi}_l$ является $\mathcal{A}$-предикатом, т.е. удовлетворяет условиям (Σ), (m), (c) [2]:

(Σ) Для любых $\alpha_{\sigma_1},\dots,\alpha_{\sigma_k}$-, $\beta_{\tau_1^l},\dots,\beta_{\tau_{t_l}^l}$- семейств соответствующих типов имеем

$$P_{\tilde{\varphi}_l}(\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_k,\bar{j}_1,\dots,\bar{j}_{t_l}) \leftrightharpoons \tilde{\varphi}_l(\alpha_{\sigma_1}(\bar{i}_1),\dots$$

$$\dots,\alpha_{\sigma_k}(\bar{i}_k),\ \beta_1(\bar{j}_1),\dots,\beta_{t_l}(\bar{j}_{t_l})) =$$

$$= \varphi_l(\alpha_{\sigma_1}(\bar{i}_1),\dots,\alpha_{\sigma_k}(\bar{i}_k))(\beta_1(\bar{j}_1),\dots,\beta_{t_l}(\bar{j}_{t_l})) =$$

$$= P_{\varphi_l(\alpha_{\sigma_1}(\bar{i}_1),\dots,\alpha_{\sigma_k}(\bar{i}_k))}(\bar{j}_1,\dots,\bar{j}_{t_l}) \in \Sigma^+(\mathbb{P},\mathbb{A}),$$

так как $\varphi_l(\alpha_{\sigma_1}(\bar{i}_1),\dots,\alpha_{\sigma_k}(\bar{i}_k)) \in A_{\varepsilon_l}$ [2].

(m) Монотонность очевидна.

(c) Достаточно показать непрерывность по первым k элементам. Пусть (α, K) - одномерное семейство типа σ_s, $s \in \{1, \ldots, k\}$. Надо показать, что

$$\tilde{\varphi}_1(\ldots, \bigsqcup_K \alpha, \ldots, g_1, \ldots, g_{t_1}) \Rightarrow \exists q \in \mathbb{A} \quad q \subseteq K \ \&$$

$$\& \ \tilde{\varphi}_1(\ldots, \bigsqcup_q \alpha, \ldots, g_1, \ldots, g_{t_1}).$$

Из непрерывности φ_1 следует [6], что $\forall j \in \mathbb{A}$ и $\forall (f_1, \ldots, f_k) \in A_\sigma$ из того, что

$$fin_{\varepsilon_1}(j) \sqsubseteq_{\varepsilon_1} \varphi_1(f_1, \ldots, f_k),$$

следует $\exists \bar{i} \in \mathbb{A}^k$ такое, что $fin_\sigma(\bar{i}) \sqsubseteq_\sigma (f_1, \ldots$ $\ldots, f_k)$ и $fin_{\varepsilon_1}(j) \sqsubseteq_{\varepsilon_1} \varphi_1(fin_\sigma(\bar{i}))$.

Пусть $\tilde{\varphi}_1(\ldots, \bigsqcup_K \alpha, \ldots, g_1, \ldots, g_{t_1})$. Рассмотрим $j \in \mathbb{A}$ такой, что $fin_{\varepsilon_1}(j) \sqsubseteq_{\varepsilon_1} \varphi_1(\ldots$ $\ldots, \bigsqcup_K \alpha, \ldots)$ и $fin_{\varepsilon_1}(j)(g_1, \ldots, g_{t_1})$. Тогда существует $\bar{i} \in \mathbb{A}^k$ такой, что $fin_\sigma(\bar{i}) \sqsubseteq_\sigma (\ldots$ $\ldots, \bigsqcup_K \alpha, \ldots)$ и $fin_{\varepsilon_1}(j) \sqsubseteq_{\varepsilon_1} \varphi_1(fin_\sigma(\bar{i}))$. Отсюда имеем, что i_s такое, что $fin_{\sigma_s}(i_s) \sqsubseteq_{\sigma_s} \bigsqcup_K \alpha$. А по определению $\mathbb{A}$-конечных элементов [2] имеем,что $\exists q \in \mathbb{A}$ такое, что $q \subseteq K$ и $fin_{\sigma_s}(i_s) \sqsubseteq_{\sigma_s} \bigsqcup_q \alpha$. Нетрудно понять, что для этого q $\tilde{\varphi}_1(\ldots, \bigsqcup_q \alpha, \ldots, g_1, \ldots$ $\ldots, g_{t_1})$. Таким образом, мы каждому $\varphi \in C(A_\sigma, A_\varepsilon)$ поставили в соответствие $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n) \in A_{\sigma \to \varepsilon}$.

Нетрудно убедиться, что это соответствие является взаимно обратным к соответствию каждому элементу $A_{\sigma\to\varepsilon}$ элемента из $C(A_\sigma, A_\varepsilon)$, определенного ранее. Причем эти соответствия определяют изоморфизм $A_{\sigma\to\varepsilon}$ и $C(A_\sigma, A_\varepsilon)$ как полных f_A-пространств.

б) Изоморфизм $A_{\sigma\times\varepsilon} \simeq A_\sigma \times A_\varepsilon$ вытекает из определения областей A_τ и свойств прямого произведения.

Аналогично, как это было сделано в работе [2] для $\tau \in T_0$, определим:

1) для $\tau \in T$ и $f \in A_\tau = A_{\tau_1} \; \ldots \; A_{\tau_n}$

$$|f|_\tau = \{\, \bar{i} \in \mathbb{A}^n \,|\, fin_\tau(\bar{i}) \subseteq_\tau f \},$$

если $\tau^* = (\tau_1, \; \ldots \; \tau_n)$;

2) для $\tau \in T$ и $P \in A_{\underbrace{0,\ldots,0}_{n} \to B}$

$$[P]^\tau \leftrightharpoons \bigsqcup_{\bar{i} \in P} fin_\tau(\bar{i}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Функционалы* $|\cdot|$ *и* $[\cdot]$ *обладают следующими свойствами:*

а) $|f|_\tau = |f_1|_{\tau_1} \; \ldots \; |f_n|_{\tau_n}$;

б) для $q_1 \times \ldots \times q_n \subseteq \mathbb{A}^n$, $q_i \in A$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$q_1 \times \ldots \times q_n \subseteq |f|_\tau \Leftrightarrow (\cup q_1, \ldots, \cup q_n) \in |f|_\tau ;$$

в) если $k \in \{1, \ldots, n\}$, $i_k \subseteq j_k$, *то* $fin_\tau(\bar{i}) \subseteq_\tau fin_\tau(\bar{j})$;

г) для $q = q_1 \times \ldots \times q_n \in \mathbb{A}^n$

$$\bigsqcup_{\bar{i} \in q} fin_\tau(\bar{i}) = fin_\tau(\cup q_1, \ldots, \cup q_n) ;$$

д) $f = \bigsqcup_{\bar{i} \in |f|_\tau} fin_\tau(\bar{i})$;

е) $[\,|f|_\tau]^\tau = f$;

ё) $|\cdot|_\tau \in A_{\tau \to (\underbrace{o,\ldots,o}_{n} \to B)}$;

ж) $[\cdot]_\tau \in A_{(\underbrace{o,\ldots,o}_{n} \to B) \to \tau}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения вытекает из аналогичных свойств для $\tau \in T_0$, доказанных в работе [2].

Итак, для всех типов $\tau \in T$ определены области A_τ как соответствующие прямые произведения элементов башни $\mathcal{A} = (A_\tau)_{\tau \in T_0}$, однозначно определяемые представлением типа. Расширенную башню в дальнейшем будем обозначать $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{A}_\tau)_{\tau \in T}$.

§3. Свойства башни $\tilde{\mathcal{A}}$

В этом параграфе мы исследуем те свойства башни $\tilde{\mathcal{A}}$, которые позволяют говорить о ней как о модели нашего языка L.

Заметим, что $\tilde{\mathcal{A}}$ есть в точности $\bigcup_{n \in N} \underbrace{\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}}_{n}$ и, следовательно, в силу свойств башни $\mathcal{A}$, замкнута относительно: а) добавления фиктивных аргументов, а также фиксации или перестановки аргументов; б) операций конъюнкции, дизъюнкции, навешивания квантора существования, ограниченного квантора всеобщности (для f-типа $(\tau_1, \ldots, \tau_n \to B)$); в) композиции $\mathcal{A}$-предикатов; г) подстановки Σ^+-функции [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любого* $\tau \in PT$ *существует* $I_\tau \in A_{\tau \to \tau}$ *такой, что для любого* $f \in A_\tau$ *имеем* $I_\tau(f) = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau^* = (\tau_1 \times \ldots \times \tau_n)$, $\tau_i \in PT_0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$. Тогда

$$(\tau\to\tau)^* = ((\tau_1,\dots,\tau_n\to\tau_1)\times\dots\times(\tau_1,\dots,\tau_n\to\tau_n))$$

и

$$A_{\tau\to\tau} = A_{(\tau_1,\dots,\tau_n\to\tau_1)}\times\dots\times A_{(\tau_1,\dots,\tau_n\to\tau_n)}\ .$$

Для каждого $i\in\{1,\dots,n\}$ определим отображение

$$I_i:\ A_{\tau_1}\times\dots\times A_{\tau_n}\times A_{\varepsilon_1^i}\times\dots\times A_{\varepsilon_{k_i}^i}\to A_B$$

(здесь $\tau_i = (\varepsilon_1^i,\dots,\varepsilon_{k_i}^i\to B))$ следующим образом: для

$$f_l\in A_{\tau_l},\ l\in\{1,\dots,n\},\ \ g_s\in A_{\varepsilon_s^i},\ \ s\in\{1,\dots,k_i\},$$

полагаем $I_i(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_{k_i}) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons f_i(g_1,\dots,g_{k_i})$.

Убедимся, что каждое I_i является $\mathcal{A}$-предикатом, $i\in\{1,\dots,n\}$. Достаточно проверить выполнение свойств (Σ), (m) и (c) [2]:

(Σ) Действительно, для любых $\alpha_{\tau_1},\dots,\alpha_{\tau_n}$ –, $\beta_{\varepsilon_1^i},\dots,\beta_{\varepsilon_{k_i}^i}$ - семейств соответствующих типов

$$P_{I_i}(\bar t_1,\dots,\bar t_n,\bar j_1,\dots,\bar j_{k_i}) \leftrightharpoons$$

$$\leftrightharpoons I_i(\alpha_{\tau_1}(\bar t_1),\dots,\alpha_{\tau_n}(\bar t_n),\beta_{\varepsilon_1^i}(\bar j_1),\dots,\beta_{\varepsilon_{k_i}^i}(\bar j_{k_i})) =$$

$$= \alpha_{\tau_i}(\bar t_i)(\beta_{\varepsilon_1^i}(\bar j_1),\dots,\beta_{\varepsilon_{k_i}^i}(\bar j_{k_i}))=$$

$$= \alpha_{\tau_i}(\bar t_i, \beta_{\varepsilon^i_1}(\bar j_1), \dots, \beta_{\varepsilon^i_{k_i}}(\bar j_{k_i})) \in \Sigma^+(\mathbb{P}, \mathbb{A}).$$

(m) Монотонность очевидна в силу монотонности каждого $f_i \in A_{\tau_i}$ и определения порядка $\subseteq_{\tau_i}$.

(c) Достаточно показать непрерывность по i-му аргументу. Пусть (α, K) – одномерное семейство типа τ_i. Заметим, что

$$I_i(\dots, \bigsqcup_K \alpha, \dots, g_1, \dots, g_{k_i}) = \bigsqcup_K \alpha(g_1, \dots, g_{k_i}) =$$
$$= \exists j \in K \ \alpha(j, g_1, \dots, g_{k_i}).$$

Тогда если

$$I_i(\dots, \bigsqcup_K \alpha, \dots, g_1, \dots, g_{k_i}),$$

то существует $q = \{j\}, q \subseteq K$ и $q \in \mathbb{A}$ $I_i(\dots, \bigsqcup_q \alpha, \dots$ $\dots, g_1, \dots, g_{k_i})$.

Итак, каждое $I_i \in A_{\tau_1, \dots, \tau_n \to \tau_i}$, $i \in \{1, \dots$ $\dots, n\}$. Положим $I_\tau = (I_1, \dots, I_n)$. Очевидно, что $I_\tau \in \mathbb{A}_{\tau \to \tau}$ и $I_\tau(f) = f$ для любого $f \in A_\tau$, причем I_τ для $\tau \in T_0$ совпадает с оператором I_τ, определенным в работе [2].

Предоставим читателю убедиться в том, что I_τ есть образ тождественного отображения A_τ, соответствующий изоморфизму $A_{\tau \to \tau}$ и $C(A_\tau, A_\tau)$, определенного в предыдущем параграфе.

Теперь определим <u>оператор аппликации</u> (применения функции к аргументу) $Apply_{\tau,\sigma} \in A_{(\tau \to \sigma) \to (\tau \to \sigma)}$ такой, что $\forall f \in A_{\tau \to \sigma}$ и $\forall x \in A$, $Apply_{\tau,\sigma}(f, x) = f(x)$.

Полагаем $Apply_{\tau\to\sigma} = I_{(\tau\to\sigma)}$. Нетрудно убедиться, что $Apply_{\tau,\sigma}(f,x) = I_{(\tau\to\sigma)}(f)(x) = f(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если* $f\in A_{\tau\to\sigma}$, $g\in A_{\varepsilon\to\tau}$, *то* $f(g)\in A_{\varepsilon\to\sigma}$ *(замкнутость относительно композиции).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из замкнутости относительно композиции $\mathcal{A}$-предикатов [2]. Действительно, $f(g) = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ (если $\sigma^* = (\sigma_1\times\ldots\times\sigma_m)$, $\tau^* = (\tau_1\times\ldots\times\tau_n)$, $\varepsilon^* = (\varepsilon_1\times\ldots\times\varepsilon_k)$), где каждое $\varphi_i\in A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\to\sigma_i}$, так как $\varphi_i(x_1,\ldots,x_k,\ldots) = f_i(g_1(\bar{x}),\ldots,g_n(\bar{x}),\ldots)$.

Предложения 3 и 4 доказывают теорему о комбинаторной полноте башни $\tilde{\mathcal{A}}$.

ТЕОРЕМА 2. *Любое аппликативное выражение* (т.е. выражение, состоящее только из применения операции $Apply$), *рассматриваемое как функция от своих аргументов, является элементом башни* $\tilde{\mathcal{A}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Для любых* $\tau,\sigma\in PT$ *существуют*

а) оператор $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tau,\sigma}\in A_{\tau,\sigma\to(\tau\times\sigma)}$ *такой, что для любых* $g_1\in A_\tau$, $g_2\in A_\sigma$ $\langle g_1,g_2\rangle_{\tau,\sigma}\in A_{\tau\times\sigma}$;

б) операторы $\pi_1^*\in A_{\tau\times\sigma\to\tau}$ *и* $\pi_2^*\in A_{\tau\times\sigma\to\sigma}$ *такие, что для любого* $f\in A_{\tau\times\sigma}$ $\pi_1^*(f)\in A_\tau$, $\pi_2^*(f)\in A_\sigma$ *и* $\langle\pi_1^*(f),\pi_2^*(f)\rangle_{\tau,\sigma} = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть , $\tau^* = (\tau_1\times\ldots\times\tau_n)$, $\sigma^* = (\sigma_1\times\ldots\times\sigma_k)$. Для каждого $l\in\{1,\ldots,n\}$ определим $I_l(g_1^1,\ldots,g_n^1,g_1^2,\ldots,g_k^2) = g_l^1$, а для каждого $m\in\{1,\ldots,k\}$ определим $J_m(g_1^1,\ldots,g_n^1,g_1^2,\ldots,g_k^2) = g_m^2$ для всех $g_l^1\in A_{\tau_l}$, $g_m^2\in A_{\sigma_m}$. Нетрудно понять, что

$$I_l \in A_{\tau,\sigma\to\tau_l} = A_{\tau\times\sigma\to\tau_l}, \ (\tau,\sigma\to\tau_l)^* = (\tau\times\sigma\to\tau_l)^*,$$

для $l \in \{1,\dots,n\}$ и

$$J_m \in A_{\tau,\sigma\to\sigma_m} = A_{\tau\times\sigma\to\sigma_m}$$

для $m \in \{1,\dots,k\}$. Предоставляем читателю самому убедиться, что $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tau,\sigma} \leftrightharpoons (I_1,\dots,I_n, J_1,\dots,J_k)$, $\pi_1^* = (I_1,\dots,I_n)$, $\pi_2^* = (J_1,\dots,J_k)$ являются искомыми операторами.

Отметим простейшие свойства оператора $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tau,\sigma}$:

а) $\langle f, \langle g,h\rangle_{\tau,\sigma}\rangle_{\varepsilon,\tau\times\sigma} = \langle\langle f,g\rangle_{\varepsilon,\tau}, h\rangle_{\varepsilon\times\tau,\sigma}$;

б) $\langle f,g\rangle_{\tau\to\sigma,\tau\to\varepsilon}(x) = \langle f(x),g(x)\rangle_{\sigma,\varepsilon}$.

На этом этапе исследования свойств башни $\tilde{\mathscr{A}}$ можно утверждать, что $\tilde{\mathscr{A}}$ моделирует язык L, но без конструкции $\langle R\rangle\,\Phi$ для всех типов $\tau \in PT$.

ТЕОРЕМА 3 (о неподвижной точке). *Для любых* $\tau \in PT$ *и* $f \in A_{\tau\to\tau}$ *неравенство* $f(x) \sqsubseteq_\tau x$ *имеет в* A_τ *наименьшее решение* x^∞ *(обращающее его в равенство), и оператор* Y_τ*, ставящий в соответствие* $f \in A_\tau$ *его наименьшее решение* x^∞*, является элементом области* $A_{(\tau\to\tau)\to\tau}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие теоремы 1, $f \in A_{\tau\to\tau}$ является непрерывным вычислимым отображением, т.е. $f \in C(A_\tau, A_\tau)$. Тогда по теореме о неподвижной точке вычислимого отображения [6] f имеет наименьшую неподвижную точку $x^\infty \in A_\tau$, причем оператор Y_{A_τ} такой, что $Y_{A_\tau}(f) = x^\infty$ является непрерывным вычислимым отображением, или элементом $C(C(A_\tau, A_\tau), A_\tau)$. А так как $C(C(A_\tau, A_\tau), A_\tau) \simeq C(A_{\tau\to\tau}, A_\tau) \simeq A_{(\tau\to\tau)\to\tau}$, то Y_τ, являющийся изоморфным образом Y_{A_τ}, и будет искомым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для любых* $\tau, \sigma \in PT$ *и любых* $f \in A_{\tau,\sigma\to\tau}$ *и* $g \in A_{\tau,\sigma\to\sigma}$ *система неравенств*

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \sqsubseteq_\tau x, \\ g(x,y) \sqsubseteq_\sigma y \end{array}\right\}$$

имеет наименьшее решение $\langle x^\infty, y^\infty \rangle$ *в* $A_{\tau\times\sigma}$ (*обращающее его в равенство*), *причем*

$$y^\infty = Y_\sigma(\lambda y.g(Y_\tau(\lambda x.f(x,y)),y)),$$

$$x^\infty = Y_\tau(\lambda x.f(x,y^\infty)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\langle f,g \rangle_{(\tau,\sigma\to\tau),(\tau,\sigma\to\sigma)} \in A_{(\tau\times\sigma)\to(\tau\times\sigma)},$$

а система равносильна неравенству

$$\langle f,g \rangle_{(\tau\ \sigma\to\tau),(\tau\ \sigma\to\sigma)}(\langle x,y \rangle_{\tau,\sigma}) \sqsubseteq_{\tau\times\sigma} \langle x,y \rangle_{\tau,\sigma},$$

следовательно, по предыдущей теореме, система имеет наименьшую неподвижную точку в $A_{\tau\times\sigma}$. Покажем, что она имеет указанный в формулировке вид.

Введем обозначения:

$$y^0 = Y_\sigma(\lambda y.g(Y_\tau(\lambda x.f(x,y)),y)),$$

$$x^0 = Y_\tau(\lambda x.f(x,y^0)).$$

Нетрудно понять, что $\langle x^0, y^0 \rangle$ является неподвижной точкой системы:

$$\left.\begin{aligned} y^0 &= g(Y_\tau(\lambda x.f(x,y^0)),y^0) = g(x^0,y^0), \\ x^0 &= f(x^0,y^0). \end{aligned}\right\}$$

Покажем, что она наименьшая, т.е. для любой другой неподвижной точки $\langle x',y'\rangle$ имеем $x^0 \subseteq_\tau x'$, $y^0 \subseteq_\sigma y'$. Пусть $\langle x',y'\rangle$ – неподвижная точка системы

$$\left.\begin{aligned} f(x',y') &= x', \\ g(x',y') &= y'. \end{aligned}\right\}$$

Тогда $Y_\tau(\lambda x.f(x,y')) \subseteq_\tau x'$ в силу определения оператора Y_τ. Отсюда из монотонности g имеем

$$g(Y_\tau(\lambda x.f(x,y')),y') \subseteq_\sigma g(x',y') = y'.$$

В силу определения оператора Y_σ получаем, что

$$y^0 = Y_\sigma(\lambda y.\, g(Y_\tau(\lambda x.f(x,y)),y)) \subseteq_\sigma y'.$$

Воспользовавшись монотонностью $Y_\tau(\lambda x.f(x,y))$, как отображением с аргументом y, получаем, что

$$x^0 = Y_\tau(\lambda x.f(x,y^0)) \subseteq_\tau Y_\tau(\lambda x.f(x,y')) \subseteq_\tau x'.$$

Таким образом, $\langle x^0,y^0\rangle$ – наименьшее решение системы (обращающее его в равенство).

Теперь перейдем к точному описанию семантики языка L.

§ 4. Семантика языка L и исчисление термов

В силу рассмотренных выше свойств башни $\tilde{\mathcal{A}}$, означивание терма Φ типа $\tau \in T$ или формулы $\mathcal{O}\!\mathcal{C}$ языка L при некоторой интерпретации значений переменных $\rho: \bigcup_{\tau\in T} X_\tau \to \tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{\tau\in T} A_\tau$ не будет отличаться от индуктивного определения (по сложности выражения), данного в [2], за исключением случаев конструкций терма, связанных с произведением типов и формул вида $\forall_x^\tau \alpha$, $\exists_x^\tau \alpha$. Поэтому мы приводим определения лишь для указанных случаев:

$$[\![\langle \Phi, \Psi \rangle]\!]_\rho^{\mathfrak{A}} = \langle [\![\Phi]\!]_\rho^{\mathfrak{A}}, [\![\Psi]\!]_\rho^{\mathfrak{A}} \rangle_{\tau,\sigma},$$

если Φ типа τ, Ψ типа σ;

$$[\![\pi_1 \Phi]\!]_\rho^{\mathfrak{A}} = \pi_1^*([\![\Phi]\!]_\rho^{\mathfrak{A}})$$

и

$$[\![\pi_2 \Phi]\!]_\rho^{\mathfrak{A}} = \pi_2^*([\![\Phi]\!]_\rho^{\mathfrak{A}}),$$

если Φ типа $\tau \times \sigma$;

$$[\![\forall_x^\tau \alpha]\!]_\rho^{\mathfrak{A}} = T_B \Leftrightarrow \text{ для всех } a \in A_\tau$$

$$[\![\alpha]\!]_{\rho[x \leftarrow a]}^{\mathfrak{A}} = T_B;$$

$$[\![\exists_x^\tau \alpha]\!]_\rho^{\mathfrak{A}} = T_B \Leftrightarrow \text{ для некоторого } a \in A_\tau$$

$$[\![\alpha]\!]_{\rho[x \leftarrow a]}^{\mathfrak{A}} = T_B.$$

Ясно, что для терма Φ типа τ $[\![\Phi]\!]_\rho^{\mathfrak{A}} \in A_\tau$. Имеет место теорема о выразительной силе языка термов $\mathbf{L}$.

ТЕОРЕМА 4. *Если терм Φ типа τ не содержит свободных переменных, то $|[\![\Phi]\!]|_\tau \in \Sigma(\mathbb{A})$; обратно, если $Q \in \Sigma(\mathbb{A})$, то $[Q]^\tau \in A_\tau$ имеет вид $[\![\Phi]\!]$ для некоторого терма Φ.*

Соответствующее этой семантике исчисление термов будет содержать в себе аксиомы и правила вывода, указанные в [2,4], и еще дополнительные аксиомы и правила вывода, связанные с конструкцией произведения типа. Формулы этого исчисления имеют вид $\Phi_0 \subseteq \Phi_1$, где Φ_0, Φ_1 - термы языка L соответственно типов τ, σ таких, что $\tau \sim \sigma$.

Приведем дополнительные аксиомы и правила вывода.

Аксиомы:

$$\langle \pi_1\Phi, \pi_2\Phi \rangle \approx \Phi ;$$

$$\langle \Phi_1, \langle \Phi_2, \Phi_3 \rangle\rangle \approx \langle\langle \Phi_1, \Phi_2\rangle, \Phi_3\rangle ;$$

$$[R; \langle \Phi, \Psi \rangle] \approx \langle [R;\Phi], [R;\Psi]\rangle ;$$

$$[\langle R_1, R_2\rangle; \Phi] \approx [R_1; [R_2; \Phi]];$$

$$\langle\langle R, Q\rangle\rangle \langle \Phi, \Psi\rangle \approx \langle (\langle R\rangle \Phi^{Q}_{\langle Q\rangle(\Psi)^{R}_{\langle R\rangle \Phi}}, \langle Q\rangle (\Psi)^{R}_{\langle R\rangle \Phi} \rangle .$$

Правила вывода

$$\frac{\Phi_1 \subseteq \Psi_1 \qquad \Phi_2 \subseteq \Psi_2}{\langle \Phi_1, \Phi_2\rangle \subseteq \langle \Psi_1, \Psi_2\rangle} ;$$

$$\frac{\Psi \subseteq \Phi \qquad \Psi \subseteq \langle \Psi_1, \Psi_2\rangle \qquad \Phi \subseteq \langle \Phi_1, \Phi_2\rangle}{\pi_i\Psi \subseteq \pi_i\Phi},$$

$$i \in \{1,2\}.$$

Конечно же, этим списком не исчерпываются все аксиомы и правила вывода этого исчисления термов, соответствующего описанной семантике. Возможно, читатель добавит новые аксиомы и правила вывода.

В заключение автор выражает благодарность Д.И.Свириденко за постановку проблемы, а также за внимание и помощь в процессе работы над статьей.

Литература

1. BARWISE J. Admissible Sets and Structures.- Berlin: Springer-Verlag, 1975.- P.6-42.

2. САЗОНОВ В.Ю., СВИРИДЕНКО Д.И. Денотационная семантика языка Σ-выражений// Логические вопросы теории типов данных.- Новосибирск, 1986.- Вып.114: Вычислительные системы.-С.16-34.

3. СВИРИДЕНКО Д.И. Проектирование Σ-программ. Σ-оцениваемость // Там же.- С.59-83.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Язык Σ-выражений // Там же.- С.3-10.

5. Его же. Теория нумераций.- М.: Наука, 1976.-С.577-585.

6. Его же. Об Σ-пространствах // Алгебра и логика. - 1986.- Т.25, № 5.- С.533-544.

Поступила в ред.-изд.отд.
13 июня 1991 года