ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИМОСТИ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1991 год Выпуск 139

УДК 510.6

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В ЯЗЫКЕ СПИСОЧНЫХ НАДСТРОЕК

Н.А. Кирпотина

Изучение алгебраических объектов теоретико-модельными методами выявило ряд недостатков обычной логики первого порядка, обусловленных ее слабой выразительной силой. В связи с этим для изучения алгебраических систем часто привлекаются более сильные логики. На изучение системы $\mathfrak{A}$ в расширенной логике можно смотреть двояко. Можно изучать саму систему $\mathfrak{A}$, но при этом, кроме обычных высказываний узкого исчисления предикатов, допускать в качестве формул более сложные образования. С другой стороны, возможен и иной подход: вместо системы $\mathfrak{A}$ рассматривать некоторое ее расширение, "надстройку" над $\mathfrak{A}$, но зато уже средствами языка первого порядка. С этой целью в работе [1] было введено понятие списочной надстройки $\mathbf{HW}(\mathfrak{A})$, позволяющее формализовать многие алгебраические рассуждения, связанные с финитностью.

Данная работа посвящена вопросу элементарной эквивалентности списочных надстроек над некоторыми моделями, в частности, над булевыми алгебрами.

Определим вкратце понятие наследственно-конечной списочной надстройки. (Более подробно см. [1].)

Пусть дана модель $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ_0. Возьмем $\mathbf{M}_1$ - множество всех списков (конечных слов), составленных из элементов $|\mathfrak{A}|$; если $\mathbf{M}_n$ уже построено, то возьмем $\mathbf{M}_{n+1}$ -

множество всех списков из элементов $M_n \cup |\mathfrak{A}|$. Положим $M^{fin} = \bigcup_{n\geq 1} M_n$.

Наследственно-конечной списочной надстройкой назовем двусортную модель $HW(\mathfrak{A}) = \langle |\mathfrak{A}|, M^{fin}, \sigma_0 \cup \sigma_1 \rangle$, где $\sigma_1 = \langle \mathrm{nil}, \mathrm{cons}, \mathrm{head}, \mathrm{tail}, \in, \subseteq, M \rangle$ - следующие операции и отношения над списками:

nil - константа, пустой список;

$\mathrm{cons}(x,y)$ - добавить элемент y к списку x ;

$\mathrm{head}(x)$ - взять последний элемент списка x ;

$\mathrm{tail}(x)$ - выбросить последний элемент из списка x ;

$x \in y$ - отношение "x есть элемент списка y";

$x \subseteq y$ - отношение "x есть начальный отрезок списка y";

$M(x)$ - отношение "x есть список".

В качестве формул допускаются все формулы языка первого порядка сигнатуры $\sigma_0 \cup \sigma_1$.

Для элементарной эквивалентности моделей в языке первого порядка известен следующий критерий [2].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* Σ *- конечная сигнатура, не содержащая функциональных символов. Модели* $\mathfrak{A}_0$ *и* $\mathfrak{A}_1$ *сигнатуры* Σ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая последовательность* $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1} \supseteq \ldots$ *непустых множеств (конечных) частичных изоморфизмов из* $\mathfrak{A}_0$ *в* $\mathfrak{A}_1$ *, что для любого* $\varphi \in S_{n+1}$ *и любых* $a \in |\mathfrak{A}_0|$, $b \in |\mathfrak{A}_1|$ *существуют* $\varphi_0, \varphi_1 \in S_n$ *такие, что* $\varphi \subseteq \varphi_0, \varphi_1$ *и* $a \in \delta\varphi_0$, $b \in \rho\varphi_1$.

В терминах самих моделей $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ можно сформулировать аналогичное условие, которое является достаточным для эквивалентности списочных надстроек $HW(\mathfrak{A}_0)$ и $HW(\mathfrak{A}_1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *- модели некоторой конечной сигнатуры* σ_0 *, не содежащей функциональных символов. Пусть существует последовательность непустых семейств* S_n *конечных частичных изоморфизмов из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$ *таких, что* $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq \supseteq S_{n+1} \supseteq \ldots$ *, и для любых конечных наборов* $a_1, \ldots \ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$, $b_1, \ldots, b_l \in |\mathfrak{B}|$*, для любого* $\lambda \in S_{n+1}$ *существуют* $\mu_0, \mu_1 \in S_n$ *такие, что* $\lambda \subseteq \mu_0, \mu_1$ *и* $a_1, \ldots, a_k \in \delta\mu_0$, $b_1, \ldots, b_l \in \rho\mu_1$. *Тогда* $HW(\mathfrak{A}) \equiv HW(\mathfrak{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем сначала некоторые обозначения. Рассмотрим список $t \in M^{fin}(\mathfrak{A})$. Из определения $M^{fin}(\mathfrak{A})$ видно, что t можно представить в виде терма, в записи которого используются только операция $cons$, константа nil и переменные для элементов из $|\mathfrak{A}|$. Назовем эту запись стандартной. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - все переменные, встречающиеся в стандартной записи t. Будем писать в этом случае, что $t = t(a_1, \ldots, a_n)$. Для переменных $b_1, \ldots, b_n$ обозначим через $[t]^{a_1 \ldots a_n}_{b_1 \ldots b_n}$ результат подстановки в стандартную запись t переменных $b_1, \ldots, b_n$ вместо $a_1, \ldots, a_n$ соответственно.

Возьмем произвольную формулу Φ сигнатуры σ и приведем ее к некоторому стандартному виду. Пусть Φ уже находится в пренексной нормальной форме:

$$\Phi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \bigvee_i \bigwedge_j X_{ij}^{\varepsilon_{ij}},$$

где Q_i - кванторы, $\varepsilon_{ij} \in \{0,1\}, X^1_{ij} = X_{ij}, X^0_{ij} = \neg X_{ij}$ и X_{ij} имеет вид $P(t_1, \ldots, t_k)$ или $t = s$, где t, s, t_i - термы. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ - все переменные, встречающиесяся в записи Φ . Возьмем $\{y_1, \ldots, y_m, \ldots\}$ - множество новых переменных.

Пусть $X_{ij} = P(t_1, \ldots, t_k)$ и пусть i_0 - наименьший номер такой, что t_{i_0} не является пропозициональной переменной, $t_{i_0} = f(s_1, \ldots, s_{k_0})$, а l - наименьший такой номер, что переменная y_l еще не использована. Тогда в записи Φ заменим X_{ij} на

$$\exists y_l P(t_1, \ldots, t_{i_0-1}, y_l, t_{i_0+1}, \ldots, t_k) \; \& \\ \& \; y_l = f(s_1, \ldots, s_{k_0}).$$

Вынесем $\exists y_l$ в кванторную приставку.

Если X_{ij} есть $t \approx s$, где $t = F(t_1, \ldots, t_k)$, $s = G(s_1, \ldots, s_m)$ и $t_{i_0} = H(u_1, \ldots, u_{k_0})$, то заменяем X_{ij} на

$$\exists y_l \, \exists y_{l+1} \, G(s_1, \ldots, s_m) = y_l \, \& \, F(t_1, \ldots, y_{l+1}, \ldots \\ \ldots, t_k) = y_l \, \& \, H(u_1, \ldots, u_{k_0}) = y_{l+1}.$$

Приведем полученную формулу к предваренной дизъюнктивной нормальной форме. Теперь с ней можно проделать то же, что и с исходной формулой Φ . Преобразуя формулу таким образом, получим в конце концов формулу, простейшие подформулы X_{ij} которой содержат символы либо только из σ_0 , либо только из σ_1 .

Далее будем рассматривать только формулы, приведенные к такому виду.

Покажем, что для любых $s \in \omega$, $t_1, \ldots, t_s \in HW(\mathfrak{A})$, где $t_i = t_i(a_1, \ldots, a_m)$, для любой формулы $\Phi(t_1, \ldots, t_s)$ с n кванторами и любого $\lambda \in S_n$ такого, что $a_1, \ldots$ $\ldots, a_m \in \delta\lambda$, выполнено:

$$HW(\mathfrak{A}) \models \Phi(t_1,\dots,t_s) \Leftrightarrow HW(\mathfrak{B}) \models$$

$$\models \Phi\left([t_1]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m},\dots,[t_s]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m}\right). \qquad (*)$$

Для $n = 0$ это следует из того, что λ - частичный изоморфизм. Пусть для какого-то n все доказано. Рассмотрим формулу $\Phi(t_1,\dots,t_s) = (\exists x)\Psi(x,t_1,\dots,t_s)$, где Ψ имеет n кванторов, и $\lambda \in S_{n+1}$. Пусть $HW(\mathfrak{A}) \models \Phi(t_1,\dots,t_s)$, тогда существует $t_0 \in HW(\mathfrak{A})$ такой, что $HW(\mathfrak{A}) \models \Psi(t_0,t_1,\dots,t_s)$. Пусть $t_0 = t_0(a_1^0,\dots,a_k^0)$. Из условия теоремы найдется $\mu_0 \in S_n$ такой, что $\lambda \in \mu_0$ и $a_1^0,\dots,a_k^0 \in \delta\mu_0$. По индукционному предположению тогда

$$HW(\mathfrak{B}) \models \Psi\left([t_0]^{a_1^0\dots a_k^0}_{\mu_0 a_1^0\dots\mu_0 a_k^0},[t_1]^{a_1\dots a_m}_{\mu_0 a_1\dots\mu_0 a_m},\dots\right.$$

$$\left.\dots,[t_s]^{a_1\dots a_m}_{\mu_0 a_1\dots\mu_0 a_m}\right),$$

следовательно,

$$HW(\mathfrak{B}) \models$$

$$\models (\exists x)\,\Psi\left(x,[t_1]^{a_1\dots a_m}_{\mu_0 a_1\dots\mu_0 a_m},\dots,[t_s]^{a_1\dots a_m}_{\mu_0 a_1\dots\mu_0 a_m}\right) =$$

$$= \Phi\left([t_1]^{a_1\dots a_m}_{\mu_0 a_1\dots\mu_0 a_m},\dots,[t_s]^{a_1\dots a_m}_{\mu_0 a_1\dots\mu_0 a_m}\right).$$

Так как $\lambda \subseteq \mu_0$, то на $a_1,\dots,a_m$ λ и μ_0 совпадают, т.е.

$$HW(\mathfrak{B}) \models \Phi\left([t_1]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m},\dots,[t_s]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m}\right).$$

Аналогично, если

$$HW(\mathfrak{B}) \models \Phi\left[[t_1]^{a_1 \dots a_m}_{\lambda a_1 \dots \lambda a_m}, \dots, [t_s]^{a_1 \dots a_m}_{\lambda a_1 \dots \lambda a_m}\right],$$

то

$$HW(\mathfrak{B}) \models \Psi\left[s_0, [t_1]^{a_1 \dots a_m}_{\lambda a_1 \dots \lambda a_m}, \dots, [t_s]^{a_1 \dots a_m}_{\lambda a_1 \dots \lambda a_m}\right]$$

для некоторого $s_0 \in HW(\mathfrak{B})$, $s_0 = s_0(b_1^0, \dots, b_k^0)$. По условию найдутся $\mu_1 \in S_n$, $\mu_1 \supseteq \lambda$ и $b_1^0, \dots, b_k^0 \in \rho\mu_1$. Пусть $a_1^0, \dots, a_k^0 \in |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mu_1(a_i^0) = b_i^0$, $i = 1, \dots, k$. Тогда

$$HW(\mathfrak{A}) \models \Psi\left[[s_0]^{b_1^0 \dots b_k^0}_{a_1^0 \dots a_k^0}, t_1, \dots, t_s\right],$$

и, следовательно,

$$HW(\mathfrak{A}) \models \exists x \;\; \Psi(x, t_1, \dots, t_s) = \Phi(t_1, \dots, t_s).$$

Таким образом, если Φ имеет вид $\exists x \;\; \Psi(x, t_1, \dots, t_s)$, то условие (*) для Φ выполняется.

Пусть $\Phi(t_1, \dots, t_s) = \forall x \;\; \Psi(x, t_1, \dots, t_s)$. Предположим, что

$$HW(\mathfrak{A}) \models \forall x \;\; \Psi(x, t_1, \dots, t_s),$$

но

$$HW(\mathfrak{B}) = \exists x \;\; \neg\Psi\left[x, [t_1]^{a_1 \dots a_m}_{\lambda a_1 \dots \lambda a_m}, \dots, [t_s]^{a_1 \dots a_m}_{\lambda a_1 \dots \lambda a_m}\right].$$

Тогда по доказанному выше

$$HW(\mathfrak{A}) \models \exists x\ \neg\Psi(x, t_1(a_1,\dots,a_m),\dots,t_s(a_1,\dots,a_m)).$$

Получаем противоречие. Таким образом, выполнено

$$HW(\mathfrak{B}) \models \forall x\ \Psi\left[x, [t_1]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m},\dots,[t_s]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m}\right].$$

Аналогично

$$HW(\mathfrak{B}) \models$$

$$\models \forall x\ \Psi\left[x\ [t_1]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m},\dots,[t_s]^{a_1\dots a_m}_{\lambda a_1\dots\lambda a_m}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow HW(\mathfrak{A}) \models \forall x\ \Psi(x, t_1,\dots,t_s).$$

Если теперь Φ - произвольное предложение сигнатуры σ, то $HW(\mathfrak{A}) \models \Phi$ тогда и только тогда, когда $HW(\mathfrak{B}) \models \Phi$, т.е. $HW(\mathfrak{A}) \equiv HW(\mathfrak{B})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что тем более достаточно существования одного множества S частичных изоморфизмов такого, что для любых $a\in|\mathfrak{A}|$, $b\in|\mathfrak{B}|$ и любого $\lambda\in S$ существуют $\lambda_1,\lambda_2\in S$ такие, что $\lambda\subseteq\lambda_1,\lambda_2$ и $a\in\delta\lambda_1$, $b\in\rho\lambda_2$.

Перейдем теперь к рассмотрению булевых алгебр.

В общем случае из элементарной эквивалентности булевых алгебр не следует эквивалентность их списочных надстроек. Действительно, пусть $\mathfrak{B}$ - булева алгебра. Тогда идеал Фреше алгебры $\mathfrak{B}$ выделяется в $HW(\mathfrak{B})$ формулой

$$a\in F \Leftrightarrow HW(\mathfrak{B}) \models \mathcal{F}(a) \leftrightharpoons (\exists t)(\forall x)\ (x\le a \to x\in t).$$

Отсюда легко получить пример булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ таких, что $\mathfrak{B}_1\equiv\mathfrak{B}_2$, но $HW(\mathfrak{B}_1)\not\equiv HW(\mathfrak{B}_2)$.

Обозначим через $At(a)$ формулу

$$\mathrm{At}(a) \leftrightharpoons (a \neq 0) \,\&\, (\forall x)(x \cap a = 0 \vee x \cap a = a),$$

а через $\mathrm{As}(x)$ – формулу [1])

$$\mathrm{As}(x) = (\forall y)(0 < y < x \to (\exists a)(\mathrm{At}(a) \,\&\, a \leq y)).$$

Пусть

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_{(\omega+1+\eta)\times\omega}, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_{(2+\eta)\times\omega}.$$

Поскольку $\mathrm{ch}(\mathfrak{B}_1) = \mathrm{ch}(\mathfrak{B}_2) = \langle 1,1,0 \rangle$, то $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$. Однако $\mathrm{HW}(\mathfrak{B}_2) \models (\forall x)(\mathrm{As}(x) \to \mathcal{F}(x))$ и $\mathrm{HW}(\mathfrak{B}_1) \models (\exists x)(\mathrm{As}(x) \,\&\, \neg \mathcal{F}(x))$.

Для суператомных булевых алгебр [3] с помощью теоремы 2 может быть получен следующий критерий элементарной эквивалентности их списочных надстроек.

Пусть $\rho(\mathfrak{A})$ – номер последнего ненулевого фактора алгебры $\mathfrak{A}$ по идеалу Фреше, $n(\mathfrak{A})$ – число атомов в этом факторе, $\tau(\mathfrak{A}) = \langle \rho(\mathfrak{A}), n(\mathfrak{A}) \rangle$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *– суператомные булевы алгебры. В этом случае* $\mathrm{HW}(\mathfrak{A}) \equiv \mathrm{HW}(\mathfrak{B})$ *тогда и только тогда, когда либо* $\rho(\mathfrak{A})$ *и* $\rho(\mathfrak{B}) \geq \omega$, *либо* $\tau(\mathfrak{A}) = \tau(\mathfrak{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Введем обозначения:

$$\mathcal{F}_1(a) \leftrightharpoons \mathcal{F}(a),$$

$$a \approx_0 b \leftrightharpoons a = b,$$

для $n \geq 1$:

$$a \approx_n b \leftrightharpoons (\exists x,y)(\mathcal{F}_n(x) \,\&\, \mathcal{F}_n(y) \,\&\, a \cup x \approx_{n-1} b \cup y),$$

---

[1]) $\mathrm{AT}(a)$ означает, что a есть атом, а $\mathrm{As}(x)$ – что x является атомным элементом.

$$\mathcal{F}_{n+1}(a) \leftrightharpoons (\exists t)(M(t) \,\&\, (\forall x)(x \cap a \approx_n x \to$$
$$\to (\exists y \in t)(x \approx_n y))).$$

Тогда

$$\rho(\mathfrak{A}) = n \leftrightarrow HW(\mathfrak{A}) \models (\forall a)(\mathcal{F}_{n+1}(a)) \& (\exists a) \neg \mathcal{F}_n (a),$$

$$n(\mathfrak{A}) = k \leftrightarrow HW(\mathfrak{A}) \models (\exists x_1 \ldots x_k) \left[\left[\mathop{\&}_{i=1}^{k} \neg \mathcal{F}_n(x_i) \right] \& \right.$$

$$\left. \& \left[\mathop{\&}_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} x_i \not\approx_n x_j \right] \& (\forall y) \left[\bigvee_{i=1}^{k} y \approx_n x_i \right]\right].$$

Таким образом, существует предложение $\Phi_{n,k}$ такое, что $\tau(\mathfrak{A}) = \langle n,k \rangle$ тогда и только тогда, когда $HW(\mathfrak{A}) \models$ $\models \Phi_{n,k}$. Отсюда, если $HW(\mathfrak{A}) \equiv HW(\mathfrak{B})$ и $\tau(\mathfrak{A}) =$ $= \langle n,k \rangle$, $k,n \in \omega$, то $\tau(\mathfrak{B}) = \tau(\mathfrak{A})$.

Достаточность. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: $\tau(\mathfrak{A}) = \tau(\mathfrak{B})$.

Покажем, что выполняется условие замечания к теореме 2. Положим $S = \{\lambda | \lambda$ - конечный частичный изоморфизм подалгебр из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ такой, что для любого $a \in \delta\lambda$ $\tau(a) =$ $= \tau(\lambda a)\}$. Возьмем произвольные $a \in |\mathfrak{A}|$ и $\lambda \in S$. Пусть $A_1, \ldots, A_s$ - все атомы в $\delta\lambda$, $B_i = \lambda(A_i)$, $i =$ $= 1, \ldots, s$. Для каждого j рассмотрим $a \cap A_j$. Можно выбрать $b_j \le B_j \in |\mathfrak{B}|$ так, что $\tau(b_j) = \tau(a \cap A_j)$, $\tau(B_j \setminus b_j) = \tau(A_j \setminus a)$. Положим

$$\mu_0(a \cap A_j) = b_j, \quad \mu_0(A_j \setminus a) = B_j \setminus b_j.$$

Если теперь

$$x = \bigcup_{j \in I_1} (A_j \cap a) \cup \bigcup_{j \in I_2} (A_j \setminus a),$$

где $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, s\}$, то положим

$$\mu_0(x) = \bigcup_{j\in I_1} \mu_0(A_j \cap a) \cup \bigcup_{j\in I_2} \mu_0(A_j \setminus a) =$$

$$= \bigcup_{j\in I_1} (B_j \cap b_j) \cup \bigcup_{j\in I_2} (B_j \setminus b_j).$$

Определенное так отображение μ_0 разнозначно и сохраняет операции, т.е. является изоморфизмом.

Если $x \in \delta\lambda$, то $x = \bigcup_{i\in I} A_i$, $I \subseteq \{1, \ldots, s\}$.

Тогда

$$\mu_0(x) = \bigcup_{i\in I} \mu_0(A_i \cap a) \cup \bigcup_{i\in I} \mu_0(A_i \setminus a) =$$

$$= \bigcup_{i\in I} (B_i \cap b_i) \cup \bigcup_{i\in I} (B_i \setminus b_i) =$$

$$= \bigcup_{i\in I} ((B_i \cap b_i) \cup (B_i \setminus b_i)) = \bigcup_{i\in I} B_i = \lambda(x).$$

Таким образом, показали, что $\mu_0 \supseteq \lambda$. При этом $a \in \delta\mu_0$, т.е. μ_0 - искомый.

Изоморфизм μ_1 для $b \in |\mathfrak{B}|$ находится аналогично.

<u>Случай 2:</u> $\rho(\mathfrak{A}), \rho(\mathfrak{B}) \geq \omega$.

Положим $S_n = \{\lambda \mid \lambda$ - конечный частичный изоморфизм подалгебр из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ такой, что для любого $a \in \delta\lambda$ $\tau(a) = \tau(\lambda a)$ либо $\rho(a), \rho(\lambda a) \geq n\}$.

Возьмем произвольные $\lambda \in S_n$, $n \geq 1$, и набор $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ из $|\mathfrak{A}|$. Можно считать, что $a_i \cap a_j = 0$ при $i \neq j$, так как иначе возьмем все элементы вида

$$a_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap a_k^{\varepsilon_k},$$

где $a_i^1 = a_i$, $a_i^0 = \bar{a}_i$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Элементов такого вида конечное число, и они уже не пересекаются.

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ - все атомы в $\delta\lambda$, $B_i = \lambda(A_i)$, $i = 1, \ldots, s$. Для каждого j рассмотрим $a_1 \cap A_j$ и $A_j \setminus a_1$. Возьмем два случая:

а) $\tau(A_j) = \tau(B_j)$, тогда найдется $b_j \leq B_j$ такой, что $\tau(A_j \cap a_1) = \tau(b_j)$, $\tau(A_j \setminus a_1) = \tau(B_j \setminus b_j)$;

б) $\rho(A_j), \rho(B_j) \geq n$.

Если $\rho(a_1 \cap A_j) < n$, то $\rho(A_j \setminus a_1) \geq n$ и мы, как и в случае "а", можем выбрать $b_j \leq B_j$ так, что $\tau(b_j) = \tau(a_1 \cap A_j)$, а $\rho(B_j \setminus b_j) \geq n$. (Если $\rho(A_j \setminus a_1) < n$, то поступаем аналогично.)

Пусть $\rho(A_j \cap a_1), \rho(A_j \setminus a_1) \geq n$. Так как $\rho(B_j) \geq$ $\geq n$, то в фактор-алгебре $\mathcal{B}/F_{n-1}(\mathcal{B})$ $B_j/F_{n-1}(\mathcal{B})$ есть объединение бесконечного числа атомов. Пусть b_j такой, что $b_j/F_{n-1}(\mathcal{B}) \leq B_j/F_{n-1}(\mathcal{B})$ и $b_j/F_{n-1}(\mathcal{B})$ - атом. (Можно считать, что $b_j \leq B_j$, иначе берем $b_j \cap B_j$, $(b_j \cap B_j)/F_{n-1}(\mathcal{B}) = b_j/F_{n-1}(\mathcal{B})$ и $b_j \cap B_j \leq$ $\leq B_j$.) Тогда $\rho(b_j) = n-1$, $\rho(B_j \setminus b_j) \geq n$.

Положим

$$\lambda_1(a_1 \cap A_j) = b_j, \ \lambda_1(A_j \setminus a_1) = B_j \setminus b_j.$$

Полученное отображение λ_1 - изоморфизм, $\lambda \subseteq \lambda_1$ и $a_1 \in \delta\lambda_1$. Атомами в $\delta\lambda_1$ будут ненулевые элементы вида $a_1 \cap A_j$, $A_j \setminus a_1$, причем $(a_1 \cap A_j) \cap a_i = 0$ $\forall j = 1, \ldots, s$, $\forall i = 2, \ldots, k$, а для $A_j \setminus a_1$ верно, что $\tau(A_j \setminus a_1) = \tau(\lambda_1(A_j \setminus a_1))$ либо $\rho(A_j \setminus a_1)$, $\rho(\lambda_1(A_j \setminus a_1)) \geq n$. Поэтому, взяв вместо λ отображение λ_1, вместо a_1 - a_2, можем проделать с ними то же самое и получить изоморфизм $\lambda_2 \supseteq \lambda_1 \supseteq \lambda$ такой, что $a_2 \in \delta\lambda_2$, и так далее до изоморфизма $\mu_0 = \lambda_k$, $\lambda_k \supseteq \ldots \supseteq \lambda_1 \supseteq \lambda$ и $a_1, \ldots, a_k \in \delta\lambda_k = \delta\mu_0$. По построению, для любого $x \in \delta\mu_0$ $\tau(x) = \tau(\mu_0 x)$ или $\rho(x), \rho(\mu_0 x) \geq n-1$, т.е. $\mu_0 \in S_{n-1}$ - искомый. Для набора $b_1, \ldots, b_l \in$ $\in |\mathfrak{B}|$ изоморфизм μ_1 находится аналогично.

Таким образом, выполняется условие теоремы 2 и, следовательно, $HW(\mathfrak{A}) \equiv HW(\mathfrak{B})$. Теорема доказана.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико-математические проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985.-Вып.107: Вычислительные системы. - С. 3-29.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры. - Новосибирск: Наука, 1983.

4. BARWISE J. Admissible Sets and Sructures.- Berlin: Springer-Verlag, 1975.

Поступила в ред.-изд.отд.

6 июня 1991 года