ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИМОСТИ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)

1991 год Выпуск 139

УДК 510.532

О ПОЛНЫХ СИСТЕМАХ ФИНИТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ МНОЖЕСТВ ИЗ КЛАССА Σ_2^0

О.В.Кудинов

Цель настоящей статьи - указать подход, позволяющий, с точки зрения автора, как можно более полно "приближать" множество $M \in \Sigma_2^0$ с помощью конечных множеств, причем эффективным образом. Стандартные определения и сведения о классе Σ_2^0 читатель может найти в книгах [1-3]. Через $\{0, \ldots, x\}$ в дальнейшем будет обозначаться соответствующий начальный отрезок множества $\mathbb{N}$, а через $|Y|$ - число элементов конечного множества Y.

Дадим основные определения "приближений". Сильно вычислимую последовательность конечных подмножеств натурального ряда $\{M_s\}_{s\in N}$ назовем системой финитных аппроксимаций множества M из класса Σ_2^0, если выполнено условие:

1) для любого $x \in N$ $(x \in M \longleftrightarrow \exists s_0 \quad \forall s \geq s_0$ $(x \in M_s))$.

Такую последовательность назовем полной системой финитных аппроксимаций множества M, если кроме первого условия выполнено дополнительно условие полноты:

2) для любого конечного $Y \subset N$ $(Y \cap M = \emptyset \rightarrow \forall s_0 \in N$ $\exists s > s_0 \quad (Y \cap M_s = \emptyset))$.

Первое утверждение работы интуитивно очевидно, но не было должным образом отражено в имеющейся на эту тему литературе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Любое множество* M *из класса* Σ_2^0 *обладает системой финитных аппроксимаций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем представление множества $\overline{M} \leftrightharpoons N \setminus M$ из класса Π_2^0 в виде $\bigcap_{n\in N} A_n$, где $\{A_n\}_{n\in N}$ - вычислимое семейство рекурсивно-перечислимых множеств, причем можно считать, что для любого $n \in N$ $A_{n+1} \subseteq A_n$. Пусть $\{A_n^s\}_{n,s\in N}$ - сильно вычислимая последовательность конечных множеств такая, что при любом $n \in N$ $\{A_n^s\}_{s\in N}$ (нестрого) возрастает и $\bigcup_{s\in N} A_n^s = A_n$. Тогда полагаем $M_s = \{x \le s \mid x \notin A_{l(s)}$ или $\exists s_1 < s$ $(l(s_1) = l(s)$ & $x \in A_{l(s)}^{s_1})\}$, где l - левая канторовская нумерующая функция [2].

Если $x \notin M$, то для всех $n \in N$ $x \in A_n$ и можно определить функцию $\lambda n f(n) \leftrightharpoons \mu s[l(s) = n \;\&\; x \in A_n^s]$, которая всюду определена и разнозначна. Тогда существует бесконечно много чисел s, для которых $x \notin M_s$, поскольку $\forall n \in N$ $x \notin M_{f(n)}$. Теперь пусть $x \in M$ и $t = \min\{n \mid x \notin A_n\}$, определим функцию f, как и ранее, но для $n < t$. Возьмем $s_0 \leftrightharpoons \max_{n<t} f(n) + x$, и пусть $s \ge s_0$, $m = l(s)$. Если $m \ge t$, то $x \notin A_{l(s)}^s$ и $x \in M_s$, а если $m < t$, то в качестве $s_1 < s$ можно взять $f(m)$, т.е. $x \in M_s$. Таким образом, условие 1 выполнено, предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложение допускает очевидное "равномерное" обобщение в следующем смысле. Назовем последовательность $\{M_i\}_{i\in N}$ Σ_2^0-подмножеств N вычислимой, если множество $M \leftrightharpoons \{\langle i,x\rangle \mid x \in M_i\}$ тоже попадает в класс Σ_2^0. Тогда любая такая последовательность обладает равномерной системой финитных аппроксимаций, т.е. такой сильно вычислимой последовательностью конечных множеств $\{M_{is}\}_{i,s\in N}$, что для любого $i \in N$ $\{M_{is}\}_{s\in N}$ является системой финитных аппроксимаций множества M_i. Для доказательства достаточно применить предложение к множеству M.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. *Любое множество* $M \in \Sigma_2^0$ *обладает полной системой финитных аппроксимаций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{M_s\}_{s\in N}$ - некоторая система финитных аппроксимаций множества M. Построим по шагам сильно вычислимое семейство конечных множеств $\{B_{ks}\}_{k,s\in N}$ такое, что при любом $k\in N$ семейство $\{B_{ks}\}_{s\in N}$ является системой финитных аппроксимаций множества M, удовлетворяющей условию

2_k) если конечное множество $Y \subset N$ содержит k элементов и $Y \cap M = \emptyset$, то

$$\forall s_0 \in N \ \exists s > s_0 \quad (Y \cap B_{ks} = \emptyset).$$

Кроме того, выполняются следующие три условия (для любого $s \in N$):

а) $B_{1s} = M_s$;

б) $B_{k+1,s} \subseteq B_{ks}$ $\forall k \in N$ и $B_{ks} = B_{ss}$ для $k > s$;

в) для $x \in N$ и $k > x$ $x \notin B_{ks} \setminus B_{k+1,s}$.

Дополнительно в конструкции будет вычисляться функция $r(y,Y,i,s)$, где $i>1$, $Y \subseteq \{0,\dots,y-1\}$, $|Y| = i-1$, содержательно означающая число попыток смещения числа y с помощью множества Y при построении $\{B_{it}\}_{t\le s}$ из $\{B_{i-1,t}\}_{t\le s}$. В самом начале определим для всех $s \in N$ $B_{1s} \leftrightharpoons M_s$.

<u>Шаг 0</u>. Для всех $k>1$ полагаем $B_{k0} \leftrightharpoons M_0$, для всех $y\in N$ и $Y \subseteq \{0,\dots,y-1\}$, $|Y| = k-1$, определим $r(y,Y,k,0) \leftrightharpoons 0$, для остальных y,Y $r(y,Y,k,0)$ не определено.

<u>Шаг $s > 0$</u>. Сначала для $1 < k \le s$ проделаем этапы $Э_k$, посвященные построению B_{ks}, следующим образом.

$Э_k$. Скажем, что число y допускает смещение с помощью множества Y в l-й попытке на этапе k, если выполнено:

1) $r(y,Y,k,s-1) = l-1$;

2) множество $Z_{ysk} \rightleftharpoons \{j<s \mid y \notin B_{k-1,s}\}$ содержит более l элементов.

Определим конечное множество "смещений" $I_k = \{y \in B_{k-1,s} \mid$ существуют $l \in N$ и множество $Y \subseteq \{0,\dots,y-1\}$ такое, что $|Y| = k-1$, $Y \cap B_{k-1,s} = \emptyset$ и y допускает смещение с помощью множества Y в l-й попытке на этапе $k\}$, оно строится эффективно.

Про числа $y \in I_k$ будем в дальнейшем говорить, что y смещается на этапе k шага s. Окончательно $B_{ks} \rightleftharpoons B_{k-1,s} \setminus I_k$, для всех $y \in I_k$ и множеств Y, "смещающих" число y на этапе k, полагаем $r(y,Y,k,s) = r(y,Y,k,s-1)+1$, для остальных y,Y $r(y,Y,k,s) = r(y,Y,k,s-1)$. В конце шага s для $k>s$ полагаем $B_{ks} \rightleftharpoons B_{k,s-1}$ и значения функции r при таких k,s не меняем. Конец построения.

ЛЕММА 1. *Для любого* $k \geq 1$ *выполнены условия:*

$А_k$) $\{B_{ks}\}_{s\in N}$ *является системой финитных аппроксимаций множества* M *;*

$Б_k$) *каждое число* y *из* M *смещается только конечное число раз на этапах с номером* k *шагов* $s \geq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по k. Для $k=1$ утверждения леммы верны, пусть они выполнены для $k-1$. Пусть $y \in M$ и s_0 - такой шаг, что при $s \geq s_0$ $y \in B_{k-1,s}$. Тогда множество Z_{ysk} содержит не более s_0 элементов на любом шаге s, поэтому каждое множество $Y \subseteq \{0,\dots,y-1\}$ может смещать число y не более s_0 раз (где $|Y| = k-1$) на этапах k, т.е. существует такой шаг

$s_1 \geq s_0$, что при $s \geq s_1$ y не смещается на этапе k шага s , так как таких Y конечное число. Тем самым доказаны условия $А_k$ и $Б_k$, так как при $s \geq s_1$ $y \in B_{ks}$, и лемма тоже доказана.

Заметим, что свойства "а" и "б" (см. с.113) системы финитных аппроксимаций $\{B_{ks}\}_{s\in N}$ очевидны, а "в" следует из того, что при $k > x$ не существует множества $Y \subseteq \{0,\ldots$ $\ldots, x-1\}$, содержащего k элементов, потенциально способного сместить x на этапе $k+1$.

ЛЕММА 2. *Для любого* $k \geq 1$ *система финитных аппроксимаций* $\{B_{ks}\}_{s\in N}$ *удовлетворяет условию* 2_k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по k . Для $k=1$ это часть определения $\{M_s\}_{s\in N}$, пусть утверждение справедливо для $k-1$.

Пусть $X \subset N$ таково, что $X \cap M = \emptyset$, $|X| = k$ и $y = \max(X)$, полагаем $Y \leftrightharpoons X \setminus \{y\}$, тогда $|Y| = k-1$. По индукционному предположению множество $S \leftrightharpoons \{s\in N \mid Y \cap$ $\cap B_{k-1,s} = \emptyset\}$ бесконечно, тогда для $s \in S$ $Y \cap B_{ks} = \emptyset$. Если множество $S_y = \{s \in S \mid y \notin B_{ks}\}$ бесконечно, то все доказано. Пусть S_y конечно. Тогда найдется такой шаг s_0 , что при $s \geq s_0$, если $s \in S$, то $y \in B_{ks}$, т.е. y не смещается на этапе k шага s с помощью множества Y ,а тогда для всех $s \geq s_0$ $r(y,Y,k,s) = r(y,Y,k,s_0)$, так как y может смещаться с помощью Y только на этапе k шагов $s \in S$. Но так как $y \notin M$, то существует шаг $s_1 > s_0$ такой, что $s_1 \in S$ и множество Z_{ys_1k} содержит более $l \leftrightharpoons r(y,Y,k,s_0)+1$ элементов. Тогда y допускает смещение с помощью множества Y в l-й попытке на этапе k шага s, так как $l = r(y,Y,k,s_1-1)+1$, т.е. $y \notin B_{ks_1}$. Полученное противоречие показывает, что множество $S_y \subseteq \{s\in N \mid X \cap$ $\cap B_{ks} = \emptyset\}$ бесконечно, т.е. для данного $X \subseteq \overline{M}$ условие 2_k выполнено, лемма доказана.

Для доказательства теоремы полагаем $A_s \rightleftharpoons B_{ss}$. Если $x \in M$, то существует такой шаг $s_0 > x$, что при $s \geq s_0$ $x \in B_{x+1,s}$, а тогда по свойству "в" (см. с. 113) $x \in B_{ss} = A_s$, т.е. $\{A_s\}_{s \in N}$ - система финитных аппроксимаций множества M, поскольку $A_s \subseteq M_s$. Осталось проверить для нее условие полноты. Пусть $Y \cap M = \emptyset$ и $|Y| = k$, где $Y \subset N$. Полагаем $S_1 = \{s \in N \mid Y \cap B_{ks} = \emptyset\}$, это множество бесконечно по условию 2_k. Но тогда для чисел s из бесконечного множества $\{s \in S_1 \mid s \geq k\}$ $Y \cap A_s = \emptyset$, т.е. $\{A_s\}_{s \in N}$ - полная система финитных аппроксимаций множества M, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема также допускает "равномерное" обобщение в том же смысле, что и в замечании 1.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. -М.: Наука, 1977. - 416 с.

2. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. -М.: Наука, 1986. - 367 с.

3. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М.: Мир, 1972. - 621 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

18 июня 1991 года