ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИМОСТИ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1991 год Выпуск 139

УДК 519.9

ПРОБЛЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НАД РАЗМЕЧЕННЫМИ РЕШЕТКАМИ

Л.П.Лисовик, В.А.Гальперин

Две любые рекурсивные схемы программ A и B функционально эквивалентны тогда и только тогда, когда при любой свободной интерпретации I они дают одинаковые результаты, т.е. $Val_I(A) = Val_I(B)$ [1]. В случае, когда указаны некоторые соотношения, связывающие функциональные символы схем A и B, вопрос об эквивалентности сводится к их эквивалентности при любых интерпретациях, свободных относительно данных соотношений. В настоящее время вопрос о разрешимости проблемы эквивалентности в классе унарных рекурсивных схем открыт (даже для схем с одним функциональным символом),а проблемы включения и слабой эквивалентности в этом классе неразрешимы. Понятно, что из разрешимости проблемы включения в каком-либо классе схем следует разрешимость в этом классе проблемы (функциональной) эквивалентности. Обратное неверно, поскольку уже в классе одноаргументных функциональных схем проблема эквивалентности разрешима [2], а проблема включения неразрешима (см. [3]).

В настоящей работе изучаются унарные рекурсивные схемы с коммутирующими функциональными символами, называемые коммутативными унарными рекурсивными схемами. Разрешимость проблем эквивалентности, включения и слабой эквивалентности для линейных унарных рекурсивных схем была установлена в [1]. Разрешимость вышеуказанных проблем ("главных проблем" (см.[4])) была получена позже для более общих классов схем программ. Так, разрешимость всех вышеназванных главных проблем доказана для металинейных унарных рекурсивных схем (МЛУР-схем) [5], для коммутативных МЛУР-схем [5], для МЛУР-схем с конечно-поворотными счетчиками [6], для МЛУР-схем с засылками констант [7] и для схем, которые могут быть получены из линейных унарных рекурсивных схем конечным применением операций суперпозиции, ветвления и циклирования [8]. Последний класс схем образует регулярную алгебру над линейными унарными рекурсивными схемами. Базисом этой алгебры служат линейные унарные рекурсивные схемы (ЛУР-схемы), а операциями - операции суперпозиции, ветвления и циклирования. Разрешимость проблемы эквивалентности в регулярной алгебре над ЛУР-схемами следует из работы [2]. Операции суперпозиции, ветвления и циклирования соответствуют операциям умножения, α-дизъюнкции и α-итерации системы алгоритмических алгебр В.М.Глушкова [9]. В данной работе доказывается разрешимость проблем эквивалентности, включения и слабой эквивалентности в регулярной алгебре над коммутативными линейными унарными рекурсивными схемами. Эти проблемы оказываются разрешимыми и для схем Янова с процедурами, в качестве которых выступают коммутативные ЛУР-схемы.

В работе [8] проблемы сравнения схем Янова с линейными унарными рекурсивными схемами-процедурами сводились к проблемам сравнения для соответствующих преобразователей над размеченными деревьями. Аналогично, разрешимость проблем сравнения для схем Янова с коммутативными линейными унарными рекурсивными процедурами следует из разрешимости этих проблем в соответствующем классе преобразователей над размеченными решетками. Такие преобразователи, называемые $\mathbb{RK}$-преобразователями, есть фактически схемы Янова с коммутативными линейными унарными рекурсивными процедурами над свободными интепретациями.

Введем необходимые обозначения. Пусть $N = \{0,1,\ldots\}$, $N^+ = N \setminus \{0\}$, $|A|$ - число элементов множества A. Для целочисленной решетки N^k введем следующие понятия: множество $E_k = \{e_i \mid e_i = (e_{i1},\ldots,e_{ik}),\ i = \overline{1,k}\}$, где $e_{ii} = 1$ и $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$; норму $|x| = \max|x_i|$ для $x = (x_1,\ldots,x_k) \in N^k$; конус с вершиной x: $\mathrm{Con}(x) = \{x+t \mid t \in N^k\}$; коническую поверхность с вершиной x: $\mathrm{ConS}(x) = \mathrm{Con}(x) \setminus \mathrm{Con}(x + \sum_1^k e_i)$; параллелепипед с вершиной x и диаметром d - $\Pi(x,d) = \{x + t \mid t \in N^k, |t| \leq d\}$. Символ θ будет использоваться для обозначения нулевого вектора решетки N^k. Введем также частичный порядок на векторах следующим образом: $x \geq y$, если $x \in \mathrm{Con}(y)$. Выделим следующую очевидную лемму.

ЛЕММА 1. *Для любых векторов* x,a,t *из* N^k *и числа* $\varepsilon \geq 0$, *если* $x \in \mathrm{Con}(a) \setminus \Pi(a,\varepsilon+1)$ *и* $|t| \leq 1$, *то* $\mathrm{Con}(x) \cap \Pi(a+t,\varepsilon) = \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. К-преобразователем называется упорядоченная шестерка $A = (R,\Sigma,n,H,q_0,F)$, где R - конечное множество (состояний); Σ - конечное множество (меток); n - натуральное число (размерность решетки N^n); H - конечное множество помеченных продукций вида $(\sigma)\xi \to a\eta b$, где $\sigma \in \Sigma$, $\xi \in R \setminus F$, $\eta \in R$, $a,b \in E_n \cup \{\theta\}$; $q_0 \in R$ (начальное состояние); $F \subseteq R$ (множество заключительных состояний). При этом для любых $\sigma \in \Sigma$, $\xi \in R \setminus F$ существует точно одна продукция вида $(\sigma)\xi \to \gamma$ из множества H. Элементы множества $\mathrm{Conf}(A) = N^n \times R \times N^n$ называют конфигурациями.

Разметкой называется всюду определенное однозначное отображение $\mu : N^n \to \Sigma$. Разметка μ на множестве $\mathrm{Conf}(A)$ определяет бинарное отношение (непосредственной выводимости)

" $\vdash$ " следующим образом: $(u,\xi,v) \vdash (u_1,\xi_1,v_1)$, если $\mu(u) = \sigma$, продукция $(\sigma)\xi \to a\eta b$ принадлежит H и $u_1 = u + a$, $v_1 = v + b$. Отношение " $\models$ " есть рефлексивно-транзитивное замыкание отношения " $\vdash$ ". Последовательность конфигураций $\pi_1 \vdash \ldots \vdash \pi_l$ называется выводом K-преобразователя A . Определим результат применения K-преобразователя A к вектору $x \in N^n$ при разметке μ (обозначение: $Val(A,x,\mu)$). Значение $Val(A,x,\mu)$ определено (обозначение: $Val(A,x,\mu)\downarrow$), если для некоторых $\alpha,\beta \in N^n$, $p \in F$, выполняется условие $(x,q_0,\theta) = (\alpha,p,\beta)$. В этом случае $Val(A,x,\mu) = \alpha + \beta$. В противном случае значение $Val(A,x,\mu)$ не определено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. RK-преобразователем называется упорядоченная семерка $A = (\mathbb{K},\Sigma,n,B,H_A,Q_0,\mathbb{F})$, где $\mathbb{K}$ - конечное множество (макросостояний); Σ, n определены выше; $B = (R,\Sigma,n,H_B,q_0,P)$ - K-преобразователь; H_A - конечное множество помеченных продукций вида $(\sigma)Q \to \xi G$, где $\sigma \in \Sigma$, $Q \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{F}$, $G \in \mathbb{K}$, $\xi \in R \setminus P$ - состояние K-преобразователя B; $Q_0 \in \mathbb{K}$ (начальное макросостояние); $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ (множество заключительных макросостояний). При этом для любых $\sigma \in \Sigma$, $Q \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{F}$ существует точно одна продукция вида $(\sigma)Q \to \gamma$ из множества H . Элементы множества $QConf(A) = (\mathbb{N}^n \times \mathbb{K}) \cup (\mathbb{N}^n \times R \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{K})$ называются квазиконфигурациями. Введем селектирующие функции на множестве квазиконфигураций: для $\pi \in QConf(A)$

$$statx(\pi) = \begin{cases} Q & \text{при } \pi = (u,Q), \\ (\xi,Q) & \text{при } \pi = (u,\xi,v,Q); \end{cases}$$

$$active(\pi) = u \quad \text{при } \pi = (u,Q) \text{ или } \pi = (u,\xi,v,Q);$$

$$passive(\pi) = \begin{cases} Q & \text{при } \pi = (u,Q), \\ v & \text{при } \pi = (u,\xi,v,Q). \end{cases}$$

Разметка μ на множестве квазиконфигураций $QConf(A)$ определяет бинарное отношение " $\vdash$ ":

а) $(u,Q) \vdash (u,\xi,e,G)$, , если $\mu(u) = \sigma$ и $((\sigma)Q \to \xi G) \in H$;

б) $(u,\xi,v,Q) \vdash \pi$, если $(u,\xi,v) \vdash (u_1,\xi_1,v_1)$ есть вывод K-преобразователя B. При этом $\pi = (u_1,\xi_1, v_1,Q)$, если $\xi_1 \notin P$, и $\pi = (w,Q)$, если $\xi_1 \in \in P$, $w = u_1 + v_1$.

Разметка μ определяет конечную или бесконечную последовательность квазиконфигураций (поведение) $\rho(A,x,\mu)$: $(x,Q_0) = \pi_0 \vdash \pi_1 \vdash \ldots$ Будем писать $\pi \in \rho(A,x,\mu)$ для обозначения факта вхождения квазиконфигурации π в поведение $\rho(A,x,\mu)$. Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения " $\vdash$ " обозначим " $\vDash$ " и назовем отношением выводимости RK-преобразователя A. Если при фиксированной разметке μ для вектора $x \in N^n$ выполняется условие $(x,Q_0) \vDash (y,G)$ для некоторого $y \in N^n$ и $G \in F$, то результат применения RK-преобразователя A к вектору x при разметке μ определен и равен y (обозначение: $Val(A,x,\mu)\downarrow$). В противном случае значение $Val(A,x,\mu)$ не определено. Обозначим $L(A) = \{\mu \mid \mu : N^n \to \Sigma, Val(A,\Theta,\mu)\downarrow\}$ и $O(A) = \{(\mu,Val(A,\Theta,\mu)) \mid \mu : N^n \to \Sigma, Val(A,\Theta,\mu)\downarrow\}$.

Для любых двух RK-преобразователей A_1 и A_2 назовем рассогласующей разметку μ такую, что значения $Val(A_1,\Theta,\mu)$ и $Val(A_2,\Theta,\mu)$ определены, но не равны между собой.

Сформулируем "главные" проблемы для класса RK-преобразователей.

Проблема пустоты: существует ли для данного RK-преобразователя A разметка μ такая, что $Val(A_1,\Theta,\mu)$ определено?

Проблема слабой эквивалентности: существует ли для данных RK-преобразователей A_1 и A_2 рассогласующая разметка?

Проблема эквивалентности: выполняется ли для данных RK-преобразователей A_1 и A_2 соотношение $O(A_1) = O(A_2)$?

Проблема включения: выполняется ли для данных RK-преобразователей A_1 и A_2 соотношение $O(A_1) \subseteq O(A_2)$?

Введем некоторые дополнительные обозначения: A^Q – RK-преобразователь A, у которого начальное состояние заменено на Q: B^ξ – K-преобразователь B с состоянием ξ в качестве начального. На множестве разметок $L(A)$ определим числовые функционалы: $|\rho(A,\theta,\mu)|$ – число квазиконфигураций в поведении $\rho(A,\theta,\mu)$, $\|\rho(A,\theta,\mu)\|$ – число таких конфигураций π в поведении ρ, для которых $state(\pi) \in K$. (Содержательно, $\|\rho(A,\theta,\mu)\| - 1$ есть число применений K-преобразователей вида B^ξ.)

ЛЕММА 2. *Пусть* $A = (K,\Sigma,n,B,H,Q_0,F)$ – *произвольный* RK-*преобразователь, где* $B = (R,\Sigma,n,H_1,q_0,P)$ *и разметка* ν *такова, что* $Val(A,x,\nu)\downarrow$. *Тогда*

$$c_1 \, |Val(A,x,\nu)-x| \le |\rho(A,x,\nu)| \le c_2 |Val(A,x,\nu)-x|,$$

где $c_1 = 1/2$, $c_2 = n|K|(|R|+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство легко вытекает из того, что каждая команда может продвинуть преобразователь (сумму его активной и пассивной составляющих конфигурации) не более чем на вектор длины 2. Докажем второе неравенство. Преобразователь A не может находиться на одной и той же точке решетки $\mathbb{N}^n$ более чем в $|K|(|R|+1)$ последовательных конфигурациях (иначе он зацикливается). Для двух последовательных конфигураций $\pi \vdash \pi'$ справедливо $active(\pi) \le active(\pi')$ и $|active(\pi') - active(\pi)| \le 1$. Нетрудно убедиться в том, что для последовательности $u_1 \le \ldots \le u_l$, $u_i \in \mathbb{N}^n$, $|u_{i+1} - u_i| = 1$, справедливо $l \le n|u_l - u_1|$. Пусть

$\rho(A,x,\nu) = \pi_1,\dots,\pi_k$. Построим последовательность $i_1 < \dots < i_l$ следующим образом: $i_1 = 1$, i_{t+1} - минимальное такое число, большее i_t, что $active(\pi_{i_{t+1}}) \neq active(\pi_{i_t})$. В силу вышесказанного $i_{t+1} - i_t \leq |K|(|R|+1)$, $t = \overline{1,l-1}$, и $k - i_l \leq |K|(|R|+1)$, и, кроме того, $l \leq n\,|active(\pi_k) - active(\pi_1)| = n\,|Val(A,x,\nu) - x|$, откуда следует требуемое неравенство. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть* $A = (K,\Sigma,n,B,H,Q_0,F)$ *- произвольный* RK*-преобразователь, где* $B = (R,\Sigma,n,H_1,q_0,P)$ *и разметка* ν *такова, что* $Val(A,x,\nu)\downarrow$ *и число* $|\rho(A,x,\nu)|$ *минимально. Тогда*

$$|\rho(A,x,\nu)| \leq |K|(|R|+1)|\Sigma|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho(A,x,\nu) = \pi_1,\dots,\pi_k$. Рассмотрим последовательность $T(A,x,\nu) = \gamma_1,\dots,\gamma_k$, где $\gamma_i = (state(\pi_i),\nu(active(\pi_i)))$. Предположим, что существуют $1 \leq i < j < k$ такие, что $\gamma_i = \gamma_j$. Пусть J, $j \leq J \leq k$, - минимальное такое число, что $state(\pi_J) \in K$. Обозначим $\alpha = active(\pi_j) - active(\pi_i)$, $\beta = passive(\pi_j) - passive(\pi_i)$. Рассмотрим разметку ν', определяемую как

$$\nu'(x) = \begin{cases} \nu(x), & x \notin Con(active(\pi_i)), \\ \nu(x+\alpha+\beta), & x \in Con(active(\pi_j) - \alpha - \beta), \\ \nu(x+\alpha) & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Заданная таким образом разметка ν' определяет вывод

$$\pi_1 \models \dots \models \pi_i \models \pi'_{j+1} \models \dots \models \pi'_{J-1} \models \pi''_J \models \dots \models \pi''_k,$$

где $state(\pi'_t) = state(\pi_t)$, $state(\pi''_l) = state(\pi_l)$, $active(\pi'_t) = active(\pi_t) - \alpha$, $active(\pi''_l) = active(\pi_l) -$

$-\alpha-\beta$, $\mathrm{passive}(\pi'_t) = \mathrm{passive}(\pi_t) - \beta$, $\mathrm{passive}(\pi''_l) = \mathrm{passive}(\pi_l)$, $t = \overline{j+1, J-1}$, $l = \overline{J, k}$. Ввиду минимальности ν существование таких i и j невозможно. Таким образом, последовательность $T(A,x,\nu)$ не содержит повторений, откуда $k \le |K|\,(|R| + 1)\,|\Sigma|$. Лемма 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Проблема пустоты для* RK *-преобразователей разрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Если* $L(A^Q) \ne \emptyset$, *то существует разметка* μ *такая, что* $|\,Val(A^Q,x,\mu)-x| \le D$, *где* $D = 2|K|\cdot(|R| + 1)\cdot|\Sigma|$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Если* $L(B^\xi) \ne \emptyset$, *то существует разметка* μ *такая, что* $|Val(B^\xi,x,\mu)-x| \le d$, *где* $d = 2(|R| + 1)\cdot|\Sigma|$.

ЛЕММА 4. *Пусть экземпляр* B_1 *K-преобразователя* B *находится в конфигурации* (u_1,ξ_1,v_1), *а экземпляр* B_2 *того же преобразователя – в конфигурации* (u_2,ξ_2,v_2), *причем* $u_1 \in \Pi(u_2,d) \cap \mathrm{Cons}(u_2)$. *Пусть существует разметка* μ *такая, что оба экземпляра завершают свою работу. Тогда существует разметка* $\tilde\mu$ *такая, что*

(i) $\tilde\mu(u_1) = \mu(u_1)$, $\tilde\mu(u_2) = \mu(u_2)$, $\tilde\mu(u) = \mu(u)$ *для* $u \notin \mathrm{Con}(u_1) \cup \mathrm{Con}(u_2)$ *и* B_1, B_2 *завершают работу на* $\tilde\mu$;

(ii) $\delta \in \rho(B_i,u_i,\tilde\mu)$, $i = 1,2$; $\mathrm{active}(\delta) \in \Pi(u_2,L_c)$, *где* $L_c = c^2m^2(d+1)^n + 2(d+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde\mu$ – минимальная из всех разметок, удовлетворяющих условию (i) в смысле минимальности вектора $(|\rho(B_1,u_1,\tilde\mu)|, |\rho(B_2,u_2,\tilde\mu)|)$. Докажем, что $\tilde\mu$ удовлетворяет условию (ii). Пусть $\rho(B_1,u_1,\tilde\mu) = \delta_1,\dots,\delta_M$,

$\rho(B_2, u_2, \tilde{\mu}) = \nu_1, \ldots, \nu_N$. Пусть $t \in \overline{1,N}$ - максимальное такое число, что $\exists i \in \overline{1,M}$ $active(\delta_i) \in \Pi(active(\nu_t), d) \cap ConS(active(\nu_t))$. Возможны два случая:

1) Пусть $t = N$. В этом случае B_1 может быть завершен в параллелепипеде $\Pi(active(\nu_t), 2d)$.

2) Пусть $t \leq N$. Имеем $i \in \overline{1,M}$ $active(\delta_i) \notin \Pi(active(\nu_{t+1}), d) \cap ConS(active(\nu_{t+1}))$. Отсюда, в частности, вытекает, что $active(\delta_i) \notin \Pi(active(\nu_{t+1}), d)$. Переопределяя разметку в параллелепипеде $\Pi(active(\nu_{t+1}), d)$ в соответствии со следствием 3.3, мы можем завершить B_2 в пределах этого параллелепипеда. Пусть p - максимальное такое число, что $active(\delta_p) \in \Pi(active(\nu_t), d+1)$. Возможны два подслучая:

а) пусть $p = M$, и тогда B_1 может быть завершен в параллелепипеде $\Pi(active(\nu_t), d+1)$;

б) пусть $p < M$. По лемме 1, $Con(active(\delta_{p+1})) \cap \Pi(active(\nu_{t+1}), d) = \emptyset$ и, следовательно, B_1 может быть завершен в параллелепипеде $\Pi(active(\delta_{p+1}), d) \subseteq \Pi(active(\delta_p), d+1) \subseteq \Pi(active(\nu_t), 2(d+1))$.

Оценим величину t . Для этого рассмотрим последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, где $\alpha_i = (state(\nu_i), \tilde{\mu}(active(\nu_i)), state(near(\nu_i)), \tilde{\mu}(active(near(\nu_i))), active(near(\nu_i)) - active(\nu_i))$, где $near(\nu_i) \in \{\delta_1, \ldots, \delta_M\}$ таково, что $active(near(\nu_i)) \in \Pi(active(\nu_i), d) \cap ConS(active(\nu_i))$, $i = \overline{1,t}$. Поскольку α_i принимает не более чем $c^2 m^2 (d+1)^n = L$ значений, то при $t > L$ в последовательности α_i имеются повторения. Пусть $\alpha_i = \alpha_j$, $i < j$. Определим разметку μ' следующим образом:

$$\mu'(x) = \begin{cases} \tilde{\mu}(x), & x \notin \mathrm{Con}(\mathrm{active}(\nu_i)), \\ \tilde{\mu}(x+w) & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

где $w = \mathrm{active}(\nu_j) - \mathrm{active}(\nu_i)$, $z = \mathrm{passive}(\nu_j) - \mathrm{passive}(\nu_i)$. Нетрудно убедиться в том, что поведение $\rho(B_2, u_2, \mu')$ равно $\nu_1, \dots, \nu_i, \nu'_{j+1}, \dots, \nu'_M$, где $\nu'_l = (\mathrm{active}(\nu_l) - w, \mathrm{state}(\nu_l), \mathrm{passive}(\nu_l) - z)$, $l = \overline{j+1, M}$.

Из поведения $\rho(B_1, u_1, \mu')$ аналогичным образом "выпадает" кусок от $\mathrm{near}(\nu_i)$ до $\mathrm{near}(\nu_j)$. При этом μ' удовлетворяет условию (i). Получаем противоречие с условием минимальности $\tilde{\mu}$. Отсюда $t \le L$, и мы получаем требуемые оценки для $L_c = L + 2(d+1) = c^2 m^2 (d+1)^n + 2(d+1)$. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть* RK-*преобразователь* A *находится в конфигурации* (u, Q)*, а* K-*преобразователь* B *– в конфигурации* (v, ξ, θ)*, причем* $v \in \Pi(u\ D) \cap \mathrm{ConS}(u)$. *Пусть существует разметка* μ *такая, что оба преобразователя завершают свою работу. Тогда существует разметка* $\tilde{\mu}$ *такая, что*

(i) $\tilde{\mu}(u) = \mu(u)$, $\tilde{\mu}(v) = \mu(v)$, $\tilde{\mu}(x) = \mu(x)$ *для* $x \notin \mathrm{Con}(u)$, *и оба преобразователя завершают работу на* $\tilde{\mu}$*;*

(ii) $\delta \in \rho(A^Q, u, \tilde{\mu})$: $\mathrm{active}(\delta) \in \Pi(u, L_d)$,

$\nu \in \rho(B^\xi, v, \tilde{\mu})$: $\mathrm{active}(\nu) \in \Pi(u, L_d)$, *где* $L_d = c^2 m^2 s (L_c+1)^n (d+1)^n + 3L_c + n(d+1)cs$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\mu}$ – минимальная из всех разметок, удовлетворяющих условию (i) в смысле минимальности вектора $(|\rho(A^Q, u, \tilde{\mu})|, |\rho(B^\xi, v, \tilde{\mu})|)$. Докажем, что $\tilde{\mu}$ удовлетворяет условию (ii). Пусть $\rho(A^Q, u, \tilde{\mu}) = \delta_1, \dots, \delta_M$, $\rho(B^\xi, v, \tilde{\mu}) = \nu_1, \dots, \nu_N$. Пусть $t \in \overline{1, N}$ – максимальное такое число, что определено $\mathrm{near}(\nu_t)$ и $|\mathrm{passive}(\mathrm{near}(\nu_t))| \le$

$\leq L_C$, где $near(\nu_t)=\delta_i \in \rho(A^Q,u,\tilde{\mu})$ и $i\in\overline{1,M}$ - максимальное такое число, что $active(\delta_i)\in \Pi(active(\nu_t),d)$. Возможны два случая.

1) Пусть $t = N$. Тогда остаток поведения A^Q в силу минимальности $\tilde{\mu}$ содержится в параллелепипеде $\Pi(active(\nu_t), D+2\cdot d)$ (для завершения текущего линейного участка необходимо d шагов, а для завершения всего RK-преобразователя - еще D).

2) Пусть $t < N$. Здесь возможно дальнейшее разбиение на подслучаи:

а) пусть $near(\nu_{t+1})$ не определено. В этом случае B^ξ может быть завершен в параллелепипеде $\Pi(active(\nu_{t+1}), d)$, а A^Q - в $\Pi(active\ (\nu_t),3d+L_C+D)$, так как, стартовав с $active(near(\nu_t))$, расположенной в $\Pi(active(\nu_t),d)$, он может завершить текущий линейный участок не более чем за d шагов (набрав в пассивной части вектор длиной не более d), совершить скачок не более чем на $L_C + d$ шагов и далее завершиться не более чем за D шагов;

б) пусть $near(\nu_{t+1}) = \delta_p$ и $|passive(\delta_p)|> L_C$. Нетрудно убедиться, что $activ\ (\delta_p)\in \Pi(active(\nu_t)\ d+1)$, откуда $|passive\ (\delta_p)\leq L_C + n(d+1)cs(n(d+1)cs$ - верхняя оценка числа конфигураций, которое может содержать финитное поведение, целиком содержащееся в параллелепипеде диаметром $d+1$ (см. лемму 2). Кроме того, справедливо $active\ (\delta_p)\in \Pi(active(\nu_{t+1}), d)\ \cap$ $\cap\ Cons(active(\nu_{t+1}))$, так как иначе δ_p должна была бы быть началом линейного участка, что влекло бы $passive(\delta_p) = \theta$. Применяя лемму 4, получаем следующие оценки: B^ξ завершаем в $\Pi(active(\nu_{t+1}),L_C)$, A^Q завершаем в $\Pi(active(\nu_{t+1}),\quad (L_C+ L_C) + (L_C+ n(d+1)cs) + D)$ (текущий линейный участок, содержащий δ_p) завершаем в

$\Pi(\mathrm{active}(\nu_{t+1})\ L_C)$ с возможным увеличением пассивной части на L_C, далее совершается суммарный скачок на $L_C + L_C + n(d+1)cs)$, что обеспечивает выход за пределы параллелепипеда $\Pi(\mathrm{active}(\nu_{t+1})\ L_C)$ и дает возможность завершить A^Q не более чем за D шагов).

Оценим величину t. Для этого рассмотрим последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, где $\alpha_i = (\mathrm{state}(\nu_i),\ \tilde{\mu}(\mathrm{active}(\nu_i)),\ \mathrm{state}(\mathrm{near}(\nu_i)),\ \tilde{\mu}(\mathrm{active}(\mathrm{near}(\nu_i))),\ \mathrm{passive}(\mathrm{near}(\nu_i)),\ \mathrm{active}(\mathrm{near}(\nu_i)) - \mathrm{active}(\nu_i))$, $i = \overline{1,t}$. Поскольку α_i принимает не более чем $c \cdot m \cdot (c \cdot s) \cdot m \cdot (L_C + 1)^n \cdot (d+1)^n = L_1$ значений, то при $t > L_1$ в последовательности α_i имеются повторения. В этом случае методом, аналогичным доказательству леммы 4, можно переопределить разметку, сократив длину поведения и сохранив свойство (i). Ввиду противоречия с условием минимальности $\tilde{\mu}$ получаем $t \leq L_1$, и требуемые оценки имеют место при $L_d = L_1 + 3L_C + n(d+1)cs$. Лемма 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Переопределение разметки в конусе $\mathrm{Con}(\nu_i)$ будет корректным, так как $\mathrm{near}(\nu_i)$ – первая конфигурация в поведении A^Q, попадающим в конус $\mathrm{Con}(\nu_i)$.

ТЕОРЕМА 1. *Проблема слабой эквивалентности в классе RK-преобразователей разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что RK-преобразователи A_1 и A_2, $A_i = (K_i, \Sigma, n, B, H_i, Q_0^i, F_i)$, $i = 1,2$, используют один и тот же K-преобразователь $B = (R, \Sigma, n, H_B, q_0, \{f\})$ с единственным заключительным состоянием. Можно также считать, что множества R, K_1, K_2 попарно не пересекаются, и обозначить $K = K_1 \cup K_2$. Пусть $|R| = c$, $|K| = s$, $\max\{|\Sigma|, 2\} = m$. Будем считать, что $n \geq 2$. Допустим, что рассогласующая разметка μ существует и выбрана так, что четверка

$$(\|\rho(A_1,\theta,\mu)\|,\|\rho(A_2,\theta,\mu)\|,|Val(A_1,\theta,\mu)|,|Val(A_2,\theta,\mu)|)$$

минимальна в смысле частичного порядка на векторах в $\mathbb{N}^4$. Обозначим $N_i = \|\rho(A_i,\theta,\mu)\|$, $i = 1,2$. Предположим для определенности, что $N_1 \geq N_2$. Пусть $i_1 < \ldots < i_{N_1}$ - последовательность номеров всех конфигураций δ_{i_k} поведения $\rho(A_1,\theta,\mu)$ таких, что $state(\delta_{i_k}) \in K$, $k = \overline{1,N_1}$ (начал линейных участков).

Пусть t $\overline{1,N_1}$ - максимальное число такое, что определено $near(\delta_{i_t})$ и $|passive(near(\delta_{i_t}))| \leq L_d$, где $near(\delta_{i_t}) = \nu_l \in \rho(A_2,\theta,\mu)$ и l - минимальное число такое, что $active(\nu_l) \in \Pi(active(\delta_{i_t}),D)$.

Возможны два случая:

1) $t = N_1$;

2) $t < N_1$. Здесь возможно дальнейшее разбиение на подслучаи:

а) пусть $near(\delta_{i_{t+1}})$ не определено. В этом случае A_1 может быть завершен в параллелепипеде $\Pi(active(\delta_{i_{t+1}}), D)$, откуда в силу минимальности N_1 вытекает $N_2 \leq N_1 \leq$ $\leq t + D/2$;

б) пусть $near(\delta_{i_{t+1}}) = \nu_p$ и $|passive(\nu_p)| > L_d$. В этом случае по лемме 5 в параллелепипеде $\Pi(active(\delta_{i_{t+1}}), L_d)$ разметка μ может быть переопределена так, чтобы завершить преобразователь A_1 и линейный участок, к которому принадлежит ν_p внутри параллелепипеда $\Pi(active(\delta_{i_{t+1}}), D)$. При этом в силу условия $|passive(\nu_p)| > L_d$ начало следующего линейного участка поведения A_2 окажется вне пределов параллелепипеда $\Pi(\mathrm{active}\,(\delta_{i_{t+1}}), D)$, где разметка, в свою очередь, может быть независимо переопределена так, чтобы завершить A_2 не более чем за $D/2$ шагов. Из этих рассуждений в силу минимальности μ вытекают следующие оценки: $N_1 \le t + D/2$, $N_2 \le N_1 + D/2 \le t + D$. Суммируя случаи 1, 2а и 2б, получаем $N_1 \le t + D/2$, $N_2 \le t + D$.

Оценим величину t. Для этого рассмотрим последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, где $\alpha_j = (\mathrm{state}(\delta_{i_j}),$ $\mu(\mathrm{active}(\delta_{i_j})), \mathrm{state}(\mathrm{near}(\delta_{i_j})), (\mathrm{active}(\mathrm{near}(\delta_{i_j}))),$ $\mathrm{passive}(\mathrm{near}(\delta_{i_j})), \mathrm{active}(\mathrm{near}(\delta_{i_j})-\mathrm{active}(\delta_{i_j}))$, $j = \overline{1,t}$. Поскольку α_j принимает не более чем

$c\cdot m\cdot(c\cdot s)\cdot m\cdot(L_d+1)^n\cdot(D+1)^n = L_2$ значений, то при $t > L_2$ в последовательности α_j имеются повторения. В этом случае методом, аналогичным доказательству леммы 4, можно переопределить разметку, сократив длину поведения обоих преобразователей. Ввиду противоречия с условием минимальности μ получаем $t \le L_2$, и окончательные оценки имеют вид $N_i \le$ $\le \bar N = c^2\cdot m^2\cdot s\cdot(l_d+1)^n\cdot(D+1)^n + D$, i = 1,2, где константы L_d и D зависят лишь от параметров A_1 и A_2. Таким образом, если рассогласующая разметка μ существует, то поведение любого из преобразователей A_1 и A_2 на ней содержит не более $\bar N$ линейных участков и проблема слабой эквивалентности сводится к серии проблем слабой эквивалентности для коммутативных металинейных схем. Эти проблемы разрешимы согласно [5]. Покажем подробнее, как осуществляется сведение. По K-преобразователю $B = (R, \Sigma, n, H_B, q_0, P)$ построим K-преобразователь $B' = (R', \Sigma, n, H'_B, q_0, P)$, где $R' = R \cup \{\langle\sigma,Q\rangle \mid \sigma\in\Sigma,\ Q\in K\}\cup\{\tilde{f}\}$, $H'_B =$

$= H_B \cup \{(\sigma)\langle\sigma,\, Q\rangle \to \theta\xi\theta \mid\ ((\sigma)Q \to \xi G) \in H_1 \cup H_2\}$.
Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Рассогласующая разметка* μ *, на которой поведения* A_1 *и* A_2 *содержат не более* $\overline{N}$ *линейных участков, существует тогда и только тогда, когда существует рассогласующая разметка для пары металинейных преобразователей* $B_i^{\langle\sigma_1^i,Q_1^i\rangle} \cdot \ldots \cdot B_i^{\langle\sigma_{N_i}^i,Q_{N_i}^i\rangle}$, $i = 1,2$, *при некоторых* $N_1 \leq \overline{N}$, $N_2 \leq \overline{N}$ *и* $\sigma_1^i = \mu(\theta)$, $Q_1^i = Q_0^i$, $\langle\sigma_j^i,\, Q_j^i\rangle \in \Sigma\times\mathbb{K}$, $j = \overline{2,N_i}$, $i = 1,2$.

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Проблема включения для* RK*-преобразователей разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_1 и A_2 - RK-преобразователи и нас интересует проблема $O(A_1) \subseteq O(A_2)$. Если A_1 и A_2 не являются слабо эквивалентными (что по теореме 1 эффективно проверяется), то и включение $O(A_1) \subseteq O(A_2)$ не имеет места. Поэтому в дальнейших рассуждениях считаем, что A_1 и A_2 слабо эквивалентны. Тогда включение $O(A_1) \subseteq \subseteq O(A_2)$ не имеет места только в случае, когда существует разметка μ такая, что $\mathrm{Val}(A_1,\theta,\mu)$ определено, а $\mathrm{Val}(A_2,\theta,\mu)$ - нет.

Назовем холостым состояние $\xi \in R$, если для любой разметки μ имеет место $\mathrm{Val}(B^{\xi},x,\mu) = x$. Назовем ε-зацикливающим макросостояние $Q \in K_t$, если существует последовательность $Q_0,\ldots, Q_l$, $Q_i \in K_t$, $Q_0 = Q_l = Q$, и метка $\sigma \in \Sigma$ такая, что $((\sigma)\ Q_i \to \nu_i Q_{i+1}) \in H_{A_t}$ и ν_i - холостое, $i = \overline{1,l}$, $t \in \{1,2\}$. Назовем ε-зацикливающим состояние $\xi \in R$, если существует последовательность $\xi_0,\ldots, \xi_l$, $\xi_i \in R$, $\xi_0 = \xi_l = \xi$, и метка $\sigma \in \Sigma$ такая, что $((\sigma)\xi_i \to \theta\xi_{i+1})b \in H_B$, $i = \overline{1,l}$.

Назовем бесконечно-зацикливающим макросостояние $Q \in K_t$ (состояние $\xi \in R$), если для любой разметки μ, любого $x \in N^n$ и для любого положительного M существует конфигурация $\nu \in \rho(A_t, x, \mu)$ $(\rho(B, x, \mu))$ такая, что $|active(\nu) - x| > M$. Все определенные выше свойства эффективно проверяются. Можно, не ограничивая общности, считать A_t такими, что если $Val(A_t, \theta, \mu)$ не определено, то это происходит за счет попадания в бесконечно-зацикливающее (макро)состояние. Этого можно добиться, если выявить все ε-зацикливающие (макро)состояния, добавить новое бесконечно-зацикливающее состояние (и соответствующее ему (макро)состояние) и и переопределить систему команд так, чтобы попадание в ε-зацикливающее (макро)состояние приводило к безусловному переходу в бесконечно-зацикливающее состояние. Нетрудно убедиться, что в описанной ситуации на разметке μ преобразователь A_2 может зациклиться, только попав в бесконечно-зацикливающее состояние, ибо в противном случае разметка μ может быть переопределена за пределами параллелепипеда $\Pi(\theta, |Val(A_1, \theta, \mu)|)$ таким образом, чтобы A_2 останавливался, а это противоречит слабой эквивалентности A_1 и A_2. Определим преобразователи A_1' и A_2', работающие над решеткой N^{n+1}, следующим образом: A_1' совпадает с A_1 с точностью до размерности векторов в командах (базисный вектор e_{n+1} не используется), A_2' имеет добавочное состояние $\tilde{\xi} \in R'$ с системой команд вида $(\sigma)\tilde{\xi} \to e_{n+1} f \theta$, где σ пробегает все Σ, а f - заключительное состояние K-преобразователя B', для всех бесконечно-зацикливающих макросостояний Q команды переопределяются так: $(\sigma)Q \to \tilde{\xi} F$, где σ пробегает все Σ, а F - заключительное состояние RK-преобразователя A_2', для всех бесконечно-зацикливающих состояний ξ команды переопределяются так: $(\sigma)\xi \to \theta\tilde{\xi}\theta$, где σ пробегает все Σ. Так построенные преобразователи обладают следующими свойствами (с учетом тривиального вложения $\mathbb{N}^n \subseteq \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$):

а) $\forall \mu : \mathbb{N}^{n+1} \to \Sigma : \mathrm{Val}(A_1', \theta, \mu) = \mathrm{Val}(A_1, \theta, \mu) \in \mathbb{N}^n$;

б) $O(A_2) \subseteq O(A_2')$;

в) любая разметка μ на $\mathbb{N}^n$ может быть продолжена на $\mathbb{N}^{n+1}$ так, что $\mathrm{Val}(A_2', \theta, \mu)$ определено, причем если $\mathrm{Val}(A_2, \theta, \mu)$ не определено, то $\mathrm{Val}(A_2', \theta, \mu) \in \in \mathbb{N}^{n+1} \setminus \mathbb{N}^n$.

Из свойств "а"-"в" вытекает, что включение A_1 в A_2 равносильно слабой эквивалентности A_1' и A_2' и, следовательно, эффективно проверяемо. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Разрешима проблема эквивалентности для класса* $\mathbb{RK}$ *-преобразователей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\mathbb{RK}$-преобразователей A_1 и A_2 имеем $O(A_1) = O(A_2)$, если и только если $O(A_1) \subseteq O(A_2)$ и $O(A_2) \subseteq O(A_1)$. Остается воспользоваться теоремой 2.

Пусть $\mathcal{L}$ - подкласс класса унарных рекурсивных схем с коммутирующими функциональными символами, определяемый как класс схем Янова с процедурами, в качестве которых выступают коммутативные ЛУР-схемы. Две любые схемы S и R класса $\mathcal{L}$ соответственно функционально эквивалентны, слабо эквивалентны или находятся в состоянии включения $O(S) \subseteq O(R)$ тогда и только тогда, когда они находятся в том же отношении на классе всех свободных коммутативных интерпретаций. Схемы класса $\mathcal{L}$, действующие на свободных коммутативных интерпретациях, есть фактически $\mathbb{RK}$ -преобразователи. Таким образом, из теорем 1-3 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *В классе* $\mathcal{L}$ *разрешимы проблемы функциональной эквивалентности, включения и слабой эквивалентности.*

Если схема S может быть получена из коммутативных унарных рекурсивных схем конечным применением операций суперпозиции, ветвления и циклирования, то схема S, очевидно, принадлежит вышеуказанному классу $\mathcal{L}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Проблемы функциональной эквивалентности, включения и слабой эквивалентности разрешимы в регулярной алгебре, базисом которой служат коммутативные линейные унарные рекурсивные схемы.*

Литература

1. ГАРЛЭНД С., ЛАКХЭМ Д. Стандартные схемы, рекурсивные схемы и формальные языки //Киб. сб. Новая серия. - М., 1976. - Вып. 13. -, С. 73-119.

2. АШКРОФТ Э., МАННА З., ПНУЕЛИ А. Разрешимые свойства одноаргументных функциональных схем //Языки и автоматы. - М., 1975. - С. 97-108.

3. FRIDMAN E.P. The inclusion problem for simple languages //Theor. Comp. Sci. - 1976. - Vol.1, N 1. - P. 47-49.

4. КОТОВ В.Е. Введение в теорию схем программ. - Новосибирск: Наука, СО, 1978. - 257 с.

5. ЛИСОВИК Л.П. О разрешимых проблемах для металинейных схем //Докл. АН УССР.Серия А. - 1979. - № 2. - С. 130-133.

6. ЛИСОВИК Л.П. Металинейные рекурсивные схемы над размеченными деревьями //Программирование. - 1983. - №5. -С. 13-22.

7. ЛИСОВИК Л.П. Металинейные схемы с засылками констант //Программирование. - 1985. - № 2. - С. 29-38.

8. ЛИСОВИК Л.П. О регулярной алгебре функционалов над размеченными деревьями //Кибернетика. - 1985. - № 5. - С. 1-8.

9. ГЛУШКОВ В.М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм //Кибернетика. - 1965. - № 5. - С. 1-13.

Поступила в ред.-изд.отд.

1 июля 1991 года