СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1991 год Выпуск 142

УДК 519.651

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ И ВЫПУКЛОСТИ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

В.Л.Мирошниченко

Введение.

В [1] получены достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов класса C^1, выраженные в виде ограничений на разделенные разности от интерполируемой функции. Целью данной статьи является конкретизация таких ограничений в зависимости от краевых условий параболического сплайна. Кроме того, использование иных, чем в [1], определяющих уравнений для параболического сплайна позволило существенно ослабить достаточные условия монотонности сплайна.

Пусть в узлах сетки $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, N$, функции $f(x)$. Для единообразия записи формул положим $x_{-1} = x_0$, $x_{N+1} = x_N$. Обозначим $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$, $i = -1, 0, \ldots, N$ (таким образом $x_{-1/2} = x_0$, $x_{N+1/2} = x_N$).

Следуя [2], будем называть параболическим интерполяционным сплайном функцию $S(x) \in C^1[a,b]$, которая является многочленом второй степени на каждом из отрезков $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $i = 0, \ldots, N$; удовлетворяет условиям интерполяции: $S(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, N$, и одному из типов краевых условий:

I. $S'(x_0) = f_0'$, $S'(x_N) = f_N'$;

II. $S''(x_0) = f_0''$, $S''(x_N) = f_N''$;

IV. $S''(x_{k+1/2}+0)=S''(x_{k+1/2}-0)$, $k=0,N-1$.

Мы не рассматриваем периодический случай, которому соответствуют периодические краевые условия (тип Ш).

Нас будет интересовать вопрос об условиях, при которых параболический сплайн $S(x)$, интерполируя монотонные $(f[x_i, x_{i+1}]\geq 0,\ i = 0,\ldots, N-1)$ или выпуклые $(f[x_{i-1},x_i, x_{i+1}] \geq 0,\ i=1,\ldots, N-1)$ данные, будет соответственно монотонным - $S'(x) \geq 0$ или выпуклым - $S''(x) \geq 0$ при $x\in [a,b]$. Символами $f[x_i, x_{i+1}]$, $f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$ обозначаются первая и вторая разделенные разности соответственно.

В §1 выводятся уравнения, связывающие узловые значения первой производной параболического сплайна, на основе которых решается вопрос об условиях его монотонности (§ 2). Отметим, что эти уравнения представляют интерес и с точки зрения алгоритмов построения параболических сплайнов. В §3 приводятся условия выпуклости параболического интерполяционного сплайна.

§1. Определяющие уравнения для параболического сплайна

Обозначим $m_{i+1/2} = S'(x_{i+1/2})$, $h_i= x_{i+1}-x_i$, $i = -1,0,\ldots,N$. Заметим, что в соответствии с принятыми соглашениями относительно точек x_{-1}, x_{N+1} имеем $h_{-1}= h_{N+1} = 0$ и

$$m_{-1/2}= S'(x_0)\ ,\ m_{N+1/2}= S'(x_N)\ . \qquad (1)$$

Легко видеть, что интерполяционный параболический сплайн $S(x)$ на промежутке $[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$ может быть представлен в виде:

$$S(x) = f_i + (x-x_i)(\lambda_i m_{i-1/2} + \mu_i m_{i+1/2}) +$$

$$+ \frac{(x-x_i)^2}{h_{i-1}+h_i} (m_{i+1/2} - m_{i-1/2}), \qquad (2)$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$.

Так как

$$S'(x) = \lambda_i m_{i-1/2} + \mu_i m_{i+1/2} +$$

$$+ \frac{2(x-x_i)}{h_{i-1}+h_i} (m_{i+1/2} - m_{i-1/2}), \qquad (3)$$

$$x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],$$

то очевидно выполнены условия

$$S'(x_{i+1/2}-0) = S'(x_{i+1/2}+0), \quad i = 0,1,\ldots, N-1.$$

Поэтому, для того, чтобы $S(x)$ удовлетворял условию $S(x) \in C^1[a,b]$, достаточно потребовать выполнения соотно - шений

$$S(x_{i+1/2}-0) = S(x_{i+1/2}+0), \quad i = 0,1,\ldots, N-1. \qquad (4)$$

Из (2) имеем

$$S(x_{i+1/2}-0) = f_i + \frac{1}{4} \lambda_i h_i m_{i-1/2} +$$

$$+ \frac{1}{4} \lambda_i (h_i + 2h_{i-1}) m_{i+1/2}, \qquad (5)$$

$$S(x_{i+1/2}+0) = f_{i+1} - \frac{1}{4} \mu_{i+1} (h_i + 2h_{i+1}) m_{i+1/2} -$$

$$- \frac{1}{4} \mu_{i+1} h_i m_{i+3/2}. \qquad (6)$$

Подставив (5),(6) в (4), приходим к N соотношениям:

$$\lambda_i m_{i-1/2}+(2+\mu_i+\lambda_{i+1})m_{i+1/2}+\mu_{i+1}m_{i+3/2} = \\ = 4f[x_i,x_{i+1}],\ i=0,\dots,N-1, \qquad (7)$$

которые связывают $N+2$ величины $m_{i+1/2}$. Добавляя к этим соотношениям уравнения, вытекающие из краевых условий, получаем замкнутую систему относительно параметров $m_{i+1/2}$, $i = -1,\dots,N$. Согласно (1), в случае краевых условий типа I эти уравнения имеют вид:

$$m_{-1/2} = f'_0, \quad m_{N+1/2} = f'_N. \qquad (8)$$

Учитывая, что

$$S''(x) = \frac{2}{h_{i-1}+h_i}(m_{i+1/2}-m_{i-1/2}), \qquad (9)$$

$$x\in[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],$$

для краевых условий типа П имеем

$$\left.\begin{aligned} m_{-1/2}-m_{1/2} &= -h_0f''_0/2, \\ -m_{N-1/2}+m_{N+1/2} &= h_{N-1}f''_N/2. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Трехдиагональные системы (7),(8) и (7),(10) легко решаются методом прогонки.

В случае краевых условий типа IV из (9) имеем

$$\left.\begin{aligned} m_{-1/2}-(1+\mu_1)m_{1/2}+\mu_1m_{3/2} &= 0, \\ \lambda_{N-1}m_{N-3/2}-(1+\lambda_{N-1})m_{N-1/2}+m_{N+1/2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Исключая из (4) и (11) неизвестные $m_{-1/2}, m_{N+1/2}$, находим

$$m_{1/2}= f[x_0,x_1], \quad m_{N-1/2}= f[x_{N-1},x_N]. \qquad (12)$$

Тем самым краевые условия типа IV можно рассматривать как своеобразный вариант краевых условий типа I с заданием значений первой производной в ближайших к концам промежутка $[a,b]$ узлах сплайна и последующей заменой точных значений производной их разностными аппроксимациями.

Для вычисления неизвестных $m_{i+1/2}$, $i=-1,\ldots,N$, в случае краевых условий типа IV вначале из системы, содержащей уравнения (7) при $i=1,\ldots,N-1$ и (12), находим величины $m_{i+1/2}$, $i=0,\ldots,N-1$, а затем из (11) определяем $m_{-1/2}$ и $m_{N+1/2}$.

§ 2. Монотонная интерполяция параболическими сплайнами

Пусть данные $\{f_i\}$ монотонны, т.е. $f[x_i,x_{i+1}]\geq 0$, $i=0,\ldots,N-1$. Так как на каждом отрезке $[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$, $i=0,\ldots,N$, первая производная сплайна - $S'(x)$ является линейной функцией, то для выполнения условия $S'(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$, достаточно, чтобы имели место неравенства $m_{k+1/2}\geq$ ≥ 0, $k=-1,\ldots,N$. Поэтому достаточные условия монотонности параболического сплайна можно вывести путем применения леммы о неотрицательности решения трехдиагональной системы [1,3] к системам относительно параметров $m_{k+1/2}$ (§1).

В случае краевых условий типа I из системы уравнений (7), (8) получаем, что при выполнении неравенств

$$f_0'\geq 0,\quad f_N'\geq 0, \tag{13}$$

$$c_0-f_0'-\frac{\mu_1c_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\geq 0\ , \tag{14}$$

$$c_i-\frac{\lambda_ic_{i-1}}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i}-\frac{\mu_{i+1}c_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}\geq 0,\ i=1,2,\ldots,N-2, \tag{15}$$

$$c_{N-1} - f'_N - \frac{\lambda_{N-1} c_{N-2}}{2+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1}} \geq 0 \;, \tag{16}$$

где $c_i = 4f[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,N-1$, сплайн $S(x)$ будет монотонен, т.е. $S'(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$.

Из результатов, сформулированных в [1,теорема 4], для краевых условий типа I вытекают следующие условия монотонности параболического сплайна:

$$0 \leq 2f'_0 \leq c_0 \,, \tag{17}$$

$$2\lambda_i c_{i-1} \leq (1+2\lambda_i) c_i \,, \quad i = 1,2,\ldots, N-1 \,, \tag{18}$$

$$2\mu_i c_i \leq (1+2\mu_i) c_{i-1} \,, \quad i = 1,2,\ldots, N-1 \,, \tag{19}$$

$$0 \leq 2f'_N \leq c_{N-1} \,. \tag{20}$$

Покажем, что ограничения (13)-(16) более слабые, чем (17)-(20). В самом деле, пусть неравенства (17)-(20) выполнены. Тогда, учитывая (18),(19), имеем

$$c_i - \frac{\lambda_i c_{i-1}}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i} - \frac{\mu_{i+1} c_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}} \geq$$

$$\geq c_i \left[1 - \frac{1+2\mu_{i+1}}{4+2\mu_{i+1}+2\lambda_{i+2}} - \frac{1+2\lambda_i}{4+2\mu_{i-1}+2\lambda_i} \right] \geq 0 \,,$$

$$i = 1,2,\ldots, N-1 \,,$$

т.е. неравенства (15) выполняются. Аналогичным образом проверяются неравенства (14),(16).

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с соотношениями (13)-(16). Дело в том, что неравенства (13)-(16), гарантирующие монотонность параболического сплайна, слабее ограничений, обеспечивающих монотонность кубического сплайна класса

C^2 при тех же краевых условиях типа I. В то же время, ограничения (17)-(20) жестче условий монотонности кубического сплайна.

Пусть параболический сплайн $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям типа П. Исключая из уравнений (7),(10) параметры $m_{-1/2}$, $m_{N+1/2}$ получаем систему

$$\left.\begin{aligned}
&(3+\lambda_1)m_{1/2}+\mu_1 m_{3/2}= c_0+ h_0 f_0''/2 ,\\
&\lambda_i m_{i-1/2}+(2+\mu_i+\lambda_{i+1})m_{i+1/2}+\mu_{i+1}m_{i+3/2}= c_i ,\\
&\qquad\qquad i = 1,\dots, N-2 ,\\
&\lambda_{N-1}m_{N-3/2}+(3+\mu_{N-1})m_{N-1/2}=c_{N-1}-h_{N-1}f_N''/2 .
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Отсюда с помощью леммы о неотрицательности решения трехдиагональной системы имеем условия

$$\left.\begin{aligned}
&c_0+ h_0 f_0''/2 - \frac{\mu_1 c_1}{2+\mu_1+\lambda_2} \ge 0 ,\\
&c_1- \frac{\lambda_1(c_0+h_0 f_0''/2)}{3 + \lambda_1} - \frac{\mu_2 c_2}{2+\mu_2+\lambda_3} \ge 0 ,\\
&c_i- \frac{\lambda_i c_{i-1}}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i} - \frac{\mu_{i+1} c_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}} \ge 0 ,\\
&\qquad\qquad i = 2,3,\dots, N-3 ,\\
&c_{N-2}- \frac{\lambda_{N-2}c_{N-3}}{2+\mu_{N-3}+\lambda_{N-2}} -\\
&\qquad - \frac{\mu_{N-1}(c_{N-1}-h_{N-1}f_N''/2)}{3 + \mu_{N-1}} \ge 0 ,
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$c_{N-1} - h_{N-1}f''_N/2 - \frac{\lambda_{N-1}c_{N-2}}{2+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1}} \geq 0, \qquad \vdots \; j$$

которые обеспечивают выполнение неравенств $m_{k+1/2} \geq 0$, $k = 0,\ldots,N-1$.

Предположим, что условия (22) выполнены. Тогда, исключая из первых двух уравнений системы (21) неизвестное $m_{3/2}$, имеем

$$\left[3+\lambda_1 - \frac{\mu_1\lambda_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\right]m_{1/2} - \frac{\mu_1\mu_2 m_{5/2}}{2+\mu_1+\lambda_2} =$$

$$= c_0 + h_0 f''_0/2 - \frac{\mu_1 c_1}{2+\mu_1+\lambda_2},$$

откуда, учитывая, что $m_{5/2} \geq 0$, получаем оценку

$$m_{1/2} \geq \frac{(c_0+h_0f''_0/2)(2+\mu_1+\lambda_2) - \mu_1 c_1}{(3+\lambda_1)(2+\mu_1+\lambda_2) - \mu_1\lambda_1} = \bar{m}_{1/2}.$$

Теперь из (10) имеем

$$m_{-1/2} \geq \bar{m}_{1/2} - h_0 f''_0/2,$$

и таким образом неравенство $m_{-1/2} \geq 0$ будет выполнено, если $\bar{m}_{1/2} - h_0 f''_0/2 \geq 0$, что эквивалентно ограничению

$$c_0 - \left[2+\lambda_1 - \frac{\mu_1\lambda_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\right]h_0 f''_0/2 - \frac{\mu_1 c_1}{2+\mu_1+\lambda_2} \geq 0. \qquad (23)$$

Аналогичным образом показывается, что для выполнения неравенства $m_{N+1/2} \geq 0$ достаточно ограничения

$$c_{N-1} + \left[2+\mu_{N-1} - \frac{\lambda_{N-1}\mu_{N-1}}{2+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1}}\right] h_{N-1} f''_N/2 -$$

$$- \frac{\lambda_{N-1} c_{N-2}}{2+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1}} \geq 0 . \qquad (24)$$

В итоге, достаточными условиями монотонности параболического сплайна при краевых условиях типа П являются неравенства (22)-(24).

Рассмотрим случай краевых условий типа IV. Из (12) сразу имеем $m_{1/2} \geq 0$, $m_{N-1/2} \geq 0$. Исключая величины $m_{1/2}$, $m_{N-1/2}$ из (7),(11), получаем систему

$$m_{-1/2}+ \mu_1 m_{3/2} = (1+ \mu_1)c_0/4 ,$$

$$(2+\mu_1+\lambda_2)m_{3/2}+\mu_2 m_{5/2} = c_1- \lambda_1 c_0/4 ,$$

$$\lambda_i m_{i-1/2}+(2+\mu_i+\lambda_{i+1})m_{i+1/2}+\mu_{i+1}m_{i+3/2} = c_i , \quad i = 2,\ldots,N-3;$$

$$\lambda_{N-2}m_{N-5/2}+(2+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1})m_{N-3/2}= c_{N-2}-\mu_{N-1}c_{N-1}/4 ,$$

$$\lambda_{N-1}m_{N-3/2}+ m_{N+1/2}= (1+ \lambda_{N-1})c_{N-1} /4 .$$

Применив к ней лемму о неотрицательности решения трехдиагональной системы, находим условия неотрицательности величин $m_{k+1/2}$, $k = -1,1,2,\ldots, N-3/2,N+1/2$, гарантирующие монотонность параболического сплайна при краевых условиях типа IV:

$$4c_1- \lambda_1 c_0 \geq 0 ,$$

$$\left(1+\mu_1+ \frac{\lambda_1\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\right) c_0- \frac{4\mu_1 c_1}{2+\mu_1+\lambda_2} \geq 0 ,$$

$$c_1- \frac{\mu_2 c_2}{2+\mu_2+\lambda_3} \geq 0 ,$$

$$c_i - \frac{\lambda_i c_{i-1}}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i} - \frac{\mu_{i+1} c_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}} \geq 0,$$

$$i = 2,\ldots, N-3;$$

$$c_{N-2} - \frac{\lambda_{N-2} c_{N-3}}{2+\mu_{N-3}+\lambda_{N-2}} \geq 0,$$

$$\left[1+ \lambda_{N-1}+ \frac{\lambda_{N-1}\mu_{N-1}}{2+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1}}\right] c_{N-1} -$$

$$- \frac{4\lambda_{N-1} c_{N-2}}{2+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1}} \geq 0,$$

$$4c_{N-2} - \mu_{N-1} c_{N-1} \geq 0 .$$

§ 3. Выпуклая интерполяция параболическими сплайнами

Достаточные условия выпуклости параболических сплайнов с краевыми условиями типов I, П, IV непосредственно следуют из результатов, сформулированных в [1,теорема 3]. А именно, если исходные данные выпуклы, т.е. $f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] \geq 0$, $i = 1,2,\ldots, N-1$, то соотношение $S''(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ имеет место при выполнении неравенств

$$3d_i - \mu_i d_{i-1} - \lambda_i d_{i+1} \geq 0, \ i = 0,\ldots, N, \tag{25}$$

где $d_i = 8f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$, $\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+ h_i)$, $\mu_i = 1- \lambda_i$, $i = 1,2,\ldots, N-1$; $d_{-1} = d_{N+1} = 0$ и, кроме того,

$$d_0 = \frac{8}{h_0} (f[x_0, x_1] - f_0'],$$

$$d_N = \frac{6}{h_{N-1}} (f'_N - f[x_{N-1}, x_N]),$$

$$\lambda_0 = \mu_N = 1, \quad \mu_0 = \lambda_N = 0$$

для краевых условий типа I;

$$d_0 = 3f''_0, \quad d_N = 3f''_N, \quad \lambda_0 = \mu_N = 0, \quad \lambda_N = \mu_0 = 1$$

для краевых условий типа П;

$$d_0 = d_N = 0, \quad \lambda_0 = \mu_N = -3, \quad \lambda_N = \mu_0 = 0$$

для краевых условий типа IV.

Условия выпуклости в случае краевых условий типа IV можно несколько ослабить. В самом деле, параметры $M_i = S''(x_i)$, $i = 0, \ldots, N$, неотрицательность которых гарантирует выпуклость параболического сплайна, удовлетворяют системе [2]:

$$\left.\begin{aligned} &M_0 - M_1 = d_0 = 0, \\ &\mu_i M_{i-1} + 3M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \\ &\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, N-1; \\ &-M_{N-1} + M_N = d_N = 0 . \end{aligned}\right\}$$

Исключив из нее неизвестные M_0, M_N приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} &(3 + \mu_1) M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1, \\ &\mu_i M_{i-1} + 3M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \\ &\qquad\qquad i = 2, \ldots, N-2; \\ &\mu_{N-1} M_{N-2} + (3 + \lambda_{N-1}) M_{N-1} = d_{N-1}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда, после применения леммы о неотрицательности решения трехдиагональной системы, получаем следующие условия выпуклости сплайна:

$$3d_i - \mu_i d_{i-1} - \lambda_i d_{i+1} \geq 0,$$
$$i = 1,\ldots, N-1; \quad i \neq 2, N-2;$$
$$3d_2 - \frac{3\mu_2 d_1}{3+\mu_1} - \lambda_2 d_3 \geq 0,$$
$$3d_{N-2} - \mu_{N-2} d_{N-3} - \frac{3\lambda_{N-2} d_{N-1}}{3+\lambda_{N-1}} \geq 0,$$

которые слебее ограничений (25).

В заключение отметим, что при интерполяции строго монотонной $(f'(x) > 0)$ или строго выпуклой $(f''(x) > 0)$ функции параболический сплайн, также как и кубический сплайн [3], будет соответственно монотонным или выпуклым на любой сетке, для которой величина $\max\limits_i h_i$ достаточно мала.

Литература

1. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of functions'84.- Sofia, 1984 - P.610-620.

2. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике.- М.: Наука, 1976.- 248 с.

3. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 // Приближение сплайнами.- Новосибирск, 1990.- Вып. 137: Вычислительные системы.- С.31-57.

Поступила в ред.изд.отд.
13 ноября 1991 года