ЛОГИКА И СЕМАНТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
Вычислительные системы

1992 год Выпуск 146

УДК 519.68

ε^1-КОНСТРУКТИВНОСТЬ ОРФ-КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

Е.И.Латкин

В работе [1] Гжегорчик построил иерархию $\varepsilon^0 \subseteq \varepsilon^1 \subseteq \varepsilon^2 \subseteq \ldots \ldots \subseteq R$ классов примитивно-рекурсивных функций и показал, что для любой частично рекурсивной функции F из $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$ найдутся такие $l, P \in \varepsilon^1$, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) = l(\inf\{y \mid P(\bar{x}, y) = 0\}).$$

(Класс ε^1 - это, грубо говоря, примитивно-рекурсивные функции, растущие не быстрее линейных.)

Основываясь на этом результате, можно показать, что для любой общерекурсивной функции $F: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ найдется такая $h \in \varepsilon^1$, что:

1) функция $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto F(h(x_1), \ldots, h(x_n))$ принадлежит ε^1,

2) h отображает $\mathbb{N}$ на все множество $\mathbb{N}$.

Отсюда следует, что любая конструктивизируемая модель $\mathbf{A}$ конечной чисто предикатной сигнатуры σ имеет некоторую ε^1-конструктивизацию.

В самом деле: пусть $\sigma = \{P_1^{n_1}, \ldots, P_k^{n_k}\}$ и $a: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{A}$ - конструктивизация модели $\mathbf{A}$. Это значит, что существует такая общерекурсивная функция F, что для любых $x_1, \ldots, x_n, i \in \mathbb{N}$: $\mathbf{A} \models P_i(a(x_1), \ldots, a(x_{n_i}))$ равносильно $F(i, x_1, \ldots, x_n) = 0$, здесь $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$.

Положив $a' = a \circ h$, получим $\mathcal{E}^1$-конструктивизацию $\mathbf{A}$. Действительно, a' отображает $\mathbb{N}$ на все A и

$$\mathbf{A} \models P_i(a'(x_1), \ldots, a'(x_{n_i})) \Leftrightarrow G_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) = 0,$$

где $G_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) = F(h(c_i), h(x_1), \ldots, h(x_{n_i}), h(0), \ldots, h(0))$, и $c_1, \ldots, c_n$ таковы, что $h(c_i) = i$.

Чтобы доказать существование функции h с указанными свойствами, выполним следующие выкладки.

По Гжегорчику:

$$F(\bar{x}) = l(\inf\{y \mid P(\bar{x}, y) = 0\}).$$

Положим:

$$\tilde{F}(\bar{x}, z) = \begin{cases} \inf\{y \le z \mid P(\bar{x}, y) = 0\}, & \text{если такое } y \text{ существует,} \\ z + 1 & \text{— иначе,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{F}(\bar{x}, z) = \sup\{\tilde{F}(\bar{x}, z) \mid x_1, \ldots, x_n \le x\}, \\ \bar{F}(x, z) \le z + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{f}(0, z) = \bar{F}(0, z), \\ \bar{f}(x+1, z) = \begin{cases} \bar{F}(x+1, z), & \text{если } \bar{F}(x+1, z) > \bar{f}(x, z), \\ \bar{f}(x, z) + 1 & \text{— иначе,} \end{cases} \\ \bar{f}(x, z) \le x + z + 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \sup\{\bar{f}(x, z) \mid z \in \mathbb{N}\},$$

$$h(y) = \begin{cases} \sup\{x \mid f(x) \le y\}, & \text{если такое } x \text{ существует,} \\ 0 & \text{— иначе.} \end{cases}$$

По построению f строго монотонна: $f(x) < f(x+1)$, поэтому h монотонно отображает $\mathbb{N}$ на все $\mathbb{N}$.

Кроме того, $f(h(y)) \le u(y) = \max\{f(0), y\}$, $u \in \varepsilon^1$.

Обозначим $G(\overline{y}) = F(h(x_1), \ldots, h(y_n))$. Имеем:

$$G(\overline{y}) = l(\inf\{z \le f(h(\max\{y_1, \ldots, y_n\}))\,|\, P(h(y_1), \ldots, h(y_n), z) = 0\}) =$$

$$= l(\inf\{z \le u(\max\{y_1, \ldots, y_n\})\,|\, P(h(y_1), \ldots, h(y_n), z) = 0\}).$$

Поскольку класс ε^1 замкнут относительно операций ограниченного минимума, ограниченного максимума и ограниченной примитивной рекурсии, то $\overline{F}$, $\widetilde{F}$, $\overline{f}$ и h принадлежат ε^1 (оцениваем: $h(y) \le y$ ограничено функцией класса ε^1).

Таким же образом и $G \in \varepsilon^1$.

Литература

1. ГЖЕГОРЧИК А. Некоторые классы рекурсивных функций // Сложность алгоритмов и вычислений.- М.: Мир, 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.

25 августа 1992 года