ЛОГИКА И СЕМАНТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1992 год Выпуск 146

УДК 517.15

СЕМЕЙСТВА С ЕДИНСТВЕННОЙ ПОЗИТИВНОЙ НУМЕРАЦИЕЙ

С.С.Гончаров

Систематическое изучение вычислимых нумераций было начато по инициативе А.Н.Колмогорова [22]. А.Н.Колмогоровым они рассматривались как естественные семантики языков программирования. Причем сводимости нумераций рассматривались им как трансляции языков. В результате интенсивного изучения многими авторами теоретико-нумерационные исследования естественным образом сформировались в новое актуальное направление классической теории алгоритмов и нашли свое отражение в монографии Ю.Л. Ершова [2].

В данной работе изучается проблема существования и числа минимальных нумераций семейств рекурсивно-перечислимых (р.п.) множеств. Х.Роджерс [19] определил для семейства $\mathcal{E}$ всех р.п.множеств полурешетку $L(\mathcal{E})$ всех ее вычислимых нумераций и начал ее изучение. Р.Фридберг [4] установил, что для $\mathcal{E}$ существуют однозначные вычислимые нумерации, а М.Пул-Эль [18] заметила, что однозначными вычислимыми нумерациями определяются в $L(\mathcal{E})$ минимальные элементы, и доказала, что их существует по крайней мере два. В этой же работе она ставит вопрос о существовании минимальных элементов, не определяемых однозначными вычислимыми нумерациями. А.И.Мальцев [13] ввел понятие позитивной нумерации и показал, что ею также определяются минимальные элементы, а Ю.Л.Ершов [3] нашел для этого семейства минимальные элементы, определяемые позитивными, но не определяемые однозначными вычислимыми нумерациями. Б.Хуторецкий [9] установил существование минимальных элементов,не определяемых позитивными нумерациями.Таким образом,при изучении для полурешетки $L(S)$ семейств р.п.множеств минимальных элементов выделилось три характеристики u, p, m: u - число неэквивалентных однозначных, p - число неэквивалентных позитивных и m - число минимальных нумераций. В [6] было установлено существование семейств точно с двумя неэквивалентными однозначными вычислимыми нумерациями. Несколько позднее [8] было доказано существование бесконечного числа неэквивалентных позитивных нумераций для семейств с однозначной вычислимой нумерацией, но без наименьшего элемента в $L(S)$, а в [7] было сконструировано семейство S с единственной с точностью до эквивалентности однозначной вычислимой нумерацией, но без наименьшего элемента в $L(S)$.

Вопрос же о возможном числе позитивных и минимальных нумераций остается открытым. Впервые эта проблема была сформулирована в [12], хотя среди специалистов она обсуждалась и много раньше. С.А.Бадаеву [1] удалось найти ряд условий на семейство S , когда из существования двух следует существование бесконечного числа неэквивалентных позитивных нумераций. Им высказывалась гипотеза, что всегда из существования двух неэквивалентных позитивных нумераций следует их бесконечность. В этой работе сделан первый шаг в попытке опровергнуть эту гипотезу. А именно, конструируется семейство S, имеющее единственную позитивную, но не наименьшую вычислимую нумерацию. Данная теорема показывает, что в теореме [8] о бесконечности позитивных элементов для семейств с однозначной, но не наименьшей нумерацией не может быть ослаблено условие однозначности на позитивность.

Таким образом, актуальными становятся следующие вопросы:

1. Верно ли, что семейство с позитивной, но не наименьшей вычислимой нумерацией имеет бесконечно много минимальных элементов в $L(S)$?

2. Существуют ли семейства S с единственным минимальным элементом в $L(S)$, но без наименьшего?

3. (И.А.Лавров). Существуют ли семейства с двумя позитивными нумерациями?

4. (С.А.Бадаев). Существуют ли семейства с двумя минимальными элементами в $L(S)$?

Теперь мы введем основные определения и обозначения. Все необходимые понятия по теории алгоритмов можно найти в [14], по теории нумераций - в [2]. Напомним здесь часть из них.

Пусть N - множество натуральных чисел, а S - семейство р.п.множеств. Нумерацией S называется отображение ν из N на S. Нумерация ν называется вычислимой, если множество пар $\{(n,m) \mid m \in \nu(n)\}$ рекурсивно-перечислимо. Нумерация ν сводится к μ, если существует рекурсивная функция f такая, что $\nu(n) = \mu f(n)$ для любых $n,m \in N$. Определив для семейства S множество всех вычислимых нумераций $\mathcal{L}(S)$ и предпорядок $\leq$ на $\mathcal{L}(S)$, определенный этой сводимостью нумераций, мы строим полурешетку $L(S)$, отождествляя эквивалентные нумерации относительно этого предпорядка. Будем называть ее полурешеткой Роджерса семейства S. Назовем нумерацию ν минимальной (наименьшей), если смежный класс в $L(S)$, содержащий эту нумерацию, минимален (наименьший) относительно частичного порядка $\leq$, определенного на смежных классах сводимостью. Нумерация называется однозначной, если $\nu(n) \neq \nu(m)$ для любых $n,m \in N$.

По любой нумерации ν мы определяем нумерационную эквивалентность η_ν. Нумерация называется позитивной, если ее нумерационная эквивалентность рекурсивно-перечислима.

ТЕОРЕМА. *Существует семейство р.п. множеств с единственной позитивной вычислимой нумерацией, не являющейся наименьшей.*

Построение искомого семейства S ведется по шагам. На шаге t мы конструируем для любого n конечное множество $\mu^t(n)$ и часть позитивной эквивалентности η^t, причем $\mu^t(n) \subseteq \subseteq \mu^{t+1}(n)$ и $\eta^t \subseteq \eta^{t+1}$. Искомое семейство S состоит из множеств $\mu(n) \rightleftharpoons \cup \mu^t(n)$, а $\mu(n) = \mu(m)$ тогда и только тогда, когда $(n,m) \in \eta$ и $\eta \rightleftharpoons \bigcup\limits_t \eta^t$. Отсюда мы получаем семейство S и его позитивную нумерацию μ с позитивной нумерационной эквивалентностью η. Так как класс всех пар (ν,η) таких, что ν - вычислимая нумерация некоторого семейства и η - ее позитивная нумерационная эквивалентность, не вычислим, то мы строим предварительно вычислимое семейство пар (ν_n,η_n) таких, что

1) ν_n - вычислимая нумерация;

2) η_n - позитивная эквивалентность, причем $\eta_n \subseteq \eta_\nu$;

3) для любой пары (ν,η) такой, что ν – вычислимая позитивная нумерация некоторого семейства р.п.множеств, а η – ее позитивная нумерационная эквивалентность, существует n такое, что $\nu_n = \nu$ и $\eta_n = \eta$. Для этого семейства мы естественным образом выбираем аппроксимацию конечными парами (ν_n^t,η_n^t) такую, что

$$\nu_n^t(m) \subseteq \nu_n^{t+1}(m), \qquad \eta_n \subseteq \eta_n^{t+1},$$

$$\nu_n(m) = \bigcup_t \nu_n^t(m), \qquad \eta_n = \bigcup_t \eta_n^t .$$

Нумерацию ν конструируем так, что μ не сводится к ν, но ν нумерует то же самое семейство S. Для достижения этих условий на шаге t будет определяться конечная функция φ^t так, что для любого n существуют $\varphi(n) \rightleftharpoons \lim \varphi^t(n)$ и

$\mu(n) = \nu\varphi(n)$, причем каждый класс нумерационной эквивалентности η содержит φ-образ. Из этого условия следует, что ν нумерует то же самое семейство. Чтобы добиться несводимости μ к ν для каждой рекурсивной функции f_n из некоторой вычислимой нумерации всех частично рекурсивных функций, мы будем подбирать попарно-различные значения $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+2}$ так, что $\mu(\Delta_1) = \ldots = \mu(\Delta_{n+2})$, но найдутся $i \neq j$ такие, что $\nu(\Delta_i) \neq \nu(\Delta_j)$ и $f_n(\Delta_i) = \Delta_i$, $f_n(\Delta_j) = \Delta_j$.

Без условия единственности позитивной нумерации этого мы могли бы достичь без особого труда, выбрав пару элементов i и j так, что $i \neq j$ и $f_n^t(i) = i$, $f_N^t(j) = j$, для которых на шаге t выполнены равенства $\nu^t(i) = \mu^t(i)$ и $\nu^t(j) = \mu^t(j)$, после этого на шаге $t+1$ определить $\nu^{t+1}(i) = \mu^{t+1}(i) = \mu^{t+1}(j)$, $\nu^{t+1}(i) \neq \nu^{t+1}(j)$ и на этих значениях ν и μ уже больше не будем изменять. Для единственности позитивной нумерации μ мы будем для любого n такого, что ν_n нумерует то же семейство S, а η_n - его нумерационная эквивалентность, конструировать по шагам конечные функции α_n^t так, что найдется t_n такое, что $\alpha_n \leftrightharpoons \bigcup_{t \geq t_n} \alpha_n^t$ - частичная функция, определенная почти на всех числах, и $\mu(m) = \nu_n(\alpha_n(m))$. Отсюда будет следовать единственность позитивной вычислимой нумерации. Однако с этим построением конфликтует необходимость нарушать сводимость μ к ν для любой рекурсивной функции f_n. Именно с этой целью мы заводим целый штат значений $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+2}$, чтобы испортить сводимость μ к ν посредством функции f_n. Чтобы испортить эту сводимость, мы ожидаем для всех этих значений, когда вычислится f_n на всех этих элементах $\Delta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta_{n+2}$, и проверяем, что $f_n(\Delta_i) = \Delta_i$. Если это не так, то уже заботиться не о чем. В случае же если на шаге t это обнаруживается, мы полагаем все пары (Δ_i, Δ_j) в η^{t+1} и проводим склейку., полагая $\mu^{t+1}(\Delta_1) = \ldots$ $\ldots = \mu^{t+1}(\Delta_{n+2}) = \nu^{t+1}(\Delta_1) = \ldots = \nu^{t+1}(\Delta_{n+2}) \supseteq$ $\supseteq \bigcup\limits_{i \leq n+2} \mu^t(\Delta_i)$. После этого для всех α_k^t таких, что

$k \leq n$ и α_k^t уже определено на этих числах $\Delta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta_{n+2}$, мы ожидаем, когда вычислится, что (*) все пары $(\alpha_k^t(\Delta_i), \alpha_k^t(\Delta_j))$ попадают в η_k, а пока этого не про - изошло мы определяем новый штат чисел $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+2}$, на которых эти α_k еще не определились. Ясно, что пока условие (*) не выполнится для α_k, мы не будет продолжать отображение α_k на другие элементы. На основании такого выбора все новых и новых штатов мы добьемся того, что для одного из них будет проведено построение склейки и после этого для всех определенных на числах из этого штата функций α_k, $k \leq n$, выполнится, что пары $(\alpha_k^t(\Delta_i), \alpha_k^t(\Delta_j))$ лежат в η_k. После этого мы проведем второй этап построения - размножение, определив на шаге t' значения

$$\mu^{t'}(\Delta_1) = \ldots = \mu^{t'}(\Delta_{n+2}) = \nu^{t'}(\Delta_0),$$

но

$$\mu^{t'}(\Delta_i) \setminus \mu^{t'}(\Delta_j) = \emptyset \text{ для всех } i \neq j.$$

Так как k таких, что $k \leq n$ и α_k^t определены на наборе $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+2}$, не более $n + 1$, а $\nu_k(\alpha_k^t(\Delta_i)) =$ $= \nu_k(\alpha_k^t(\Delta_j))$ для всех i, j, то для каждого k тре - буется найти такое i_k, что $\nu_k(\alpha_k^t(\Delta_0)) \supseteq \nu^{t'}(\alpha_k^t(\Delta_{i_k}))$, и для каждого такого k мы, расширяя множества, полагаем

$\nu(\Delta_0) = \nu(\Delta_{i_k})$. Так как штат состоит из $n+2$ чисел, то останется хотя бы одно Δ_i такое, что $\nu(\Delta_0) \neq \nu(\Delta_i)$, что уже гарантирует нарушение сводимости μ к ν посредством функции f_n. В то же время сводимость μ к ν_k посредством α_k^t не будет нарушена на этих числах, если на числах $\Delta_1,\ldots,\Delta_{n+2}$ была уже определена функция α_k^t, а ν_k нумерует то же самое семейство S, что и μ, а η_k - ее позитивная нумерационная эквивалентность. Так как мы изменяем строящиеся множества только на киких-либо выбранных штатах и по типу склейки или размножения, причем склейка не может нарушить сводимость, а для размножения мы добиваемся сохранения сводимости, то эта часть конструкции позволяет сформировать сводимость μ к ν_k, что и гарантирует единственность позитивной вычислимой нумерации.

Формальное изложение этой конструкции следует стандартным идеям метода приоритета и оставляется читателям.

Литература

1. БАДАЕВ С.А. Позитивные нумерации //Сиб.мат.журн.-1977. - Т.18, № 3. - С.343-352.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. - М.: Наука, 1977.

3. ЕРШОВ Ю.Л. О вычислимых нумерациях //Алгебра и логика. - 1968. - Т.7, № 5. - С.34-38.

4. FRIEDBERG R.M. Three theorema on recursive enumerations //J.Symb.Logic.-1958. - Vol.23, N.3. - P. 309-316.

5. ГОНЧАРОВ С.С. Неавтоэквивалентные конструктивизации //Труды Института математики СО АН СССР, т.2. - Новосибирск: Наука, 1982.

6. ГОНЧАРОВ С.С. Вычислимые однозначные нумерации //Алгебра и логика. - 1980. - Т.19, № 5. - С. 325-356.

7. ГОНЧАРОВ С.С. Семейство с единственной однозначной,но не наименьшей нумерацией //Труды Института математики СО АН СССР. - Новосибирск: Наука, 1988. -С. 42-58.

8. ГОНЧАРОВ С.С. Позитивные нумерации семейств с одно - значными нумерациями //Алгебра и логика. - 1983. - Т. 22,№5. - С. 345-350.

9. ХУТОРЕЦКИЙ А.Б. Двѐ теоремы существования для вычислимых нумераций //Алгебра и логика. - 1969. -Т. 8, №4. - С. 485-492.

10. LACHLAN A. On recursive enumeration without repetition //Z.Math.Log. und Grundl.Math. - 1965. - Vol. 11, N.3. - P.209-220.

11. LACHLAN A. Standard classes of r.e.sets //Z.Math. Log. und Grundl. Math. - 1964. - Vol. 10, N. 1. - P. 23-42.

12. LAVROV I.A. Computable numberings, Logic, Foundations of Mathematics and Theory. Dordrecht-Holland, D.Reidel Publi - shing Company. - 1977. - P. 195-206.

13. MAL'CEV A.I. Positive and negative numerations //The Meta Mathematics of Algebraic Systems. - Amsterdam; North-Holland, 1971. - P.379-383.

14. MAL'CEV A.I. Algoritms and recursive functions, Wolters-Noordhoff Publ., Goningen. The Netherlands, 1970.

15. МАРЧЕНКОВ С.С. Вычислимые нумерации семейств общерекурсивных функций //Алгебра и логика. - 1972. -Т. 11, №5. -С.326-336.

16. POUR-EL M.B. and HOWARD W. A structural criterion for recursive enumeration without repetition /Z. Màth. Log. und Grundl.Math. - 1964. - Vol. 10, N.2. -P. 105-114.

17. POUR-EL M.B. and PUTNAM H. Recursively enumerable classes and their aplication to recursive sequences of formal theories //Arch. Math. Log. Gr.F. - 1965. - Vol. 8. -P. 104-121.

18. POUR-EL M.B. Godel numberings versus Friedberg numbe - rings //Proc. Amer. Math. Soc. - 1964. - Vol. 15, N.2. -P.252-255.

19. ROGERS H. Godel Numberings of recursive functions //J. Symb. Logic. - 1958. - Vol. 23, N. 3. - P. 331-341.

20. ROGERS H. Theory of recursive fuctions and effective computebility. - New-York: McGraw-Hill, 1967.

21. СЕЛИВАНОВ В.Л. Теоремы о вычислимых нумерациях //Алгебра и логика. - 1976. - Т.15, № 4. -С. 297-306.

22. УСПЕНСКИЙ В.А. Системы перечислимых множеств и их нумерации //Докл. АН СССР. - 1958. - Т. 105, № 6. -С. 1155-1158.

Поступила в ред.-изд.отд.
25 августа 1992 года