ЛОГИКА И СЕМАНТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1992 год Выпуск 146

УДК 510.64

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ПОЛНОТЫ ТЕМПОРАЛЬНЫХ ЛОГИК

Р. Плюшкявичюс

Введение

В данной работе предлагается достаточно универсальный метод для установления классов полноты дискретных функциональных темпоральных логик первого порядка, содержащих темпоральные операторы, для которых имеют место аксиомы, аналогичные аксиоме индукции. Такие темпоральные логики находят широкое применение для спецификации и верификации параллельных программ (см., напр., [1]). Одним из привлекательных свойств предлагаемого метода является то, что в результате доказательства полноты указывается метод построения полного финитарного исчисления с эффективными теоретико-доказательственными свойствами. Известно (например, [2,3]), что "индукционные" функциональные темпоральные логики первого порядка являются неполными. Но они становятся полными (например, [4,5]) после замены "аксиом индукции" инфинитарными правилами, аналогичными ω-правилу. В [6,7] предложен метод доказательства полноты ограниченной темпоральной логики первого порядка на основе редукции инфинитарного исчисления (для некоторых классов формул) в финитарное исчисление. В процессе этой редукции предлагается некоторый способ для определения "инвариантных" формул. Например, для темпоральной логики с операторами $\bigcirc$ (следующий) и $\Box$ (всегда) это такие формулы R, для которых $\models R \supset \bigcirc R$. В данной работе нахожде -

ние инвариантной формулы отождествляется с нахождением вывода некоторой формулы в финитарном исчислении $\mathcal{R}$, не содержащем "индукционных" постулатов и поэтому существенно более простом, чем исследуемое финитарное исчисление для рассматриваемой темпоральной логики (для разрешимой темпоральной логики исчисление $\mathcal{R}$-разрешимо). Оказывается, что выводимость в некотором расширении исчисления $\mathcal{R}$ - в исчислении $\mathcal{R}_1$ (включающем некоторые эффективные "расщепляющие" правила) является признаком эквивалентности инфинитарного и финитарного исчислений для рассматриваемой функциональной темпоральной логики первого порядка. (Отметим, что в случае разрешимой темпоральной логики инфинитарное и финитарное исчисления для этой логики эквивалентны без каких-либо условий.) Таким образом, перед тем, как выводить формулу A в финитарном исчислении (для рассматриваемой темпоральной логики), следует, в общем случае, попробовать вывести ее в более простом исчислении $\mathcal{R}_1$. В работе будут использоваться исчисления генценовского типа.

Предлагается следующая схема доказательства полноты функциональной темпоральной логики первого порядка: 1) построение инфинитарного исчисления G_ω (очевидным образом отражающего семантику рассматриваемой темпоральной логики) и доказательство корректности и полноты исчисления G_ω; 2) определение финитарного исчисления $\mathcal{R}$, выводимость в котором обуславливает способ нахождения инвариантных формул; 3) построение финитарного исчисления G (содержащего вместо ω-правила правила трех типов: а) инвариантные правила, являющиеся правилами типа аналитического сечения; б) вспомогательные правила; в) расщепляющие правила) и построение исчисления $\mathcal{R}_1$ путем присоединения к $\mathcal{R}$ расщепляющих правил исчисления G; 4) доказательство того, что если $G \vdash S$, то $G_\omega \vdash S$ и $\mathcal{R}_1 \vdash S$; 5) доказательство того, что если $G_\omega \vdash S$ и $\mathcal{R}_1 \vdash S$, то $G \vdash S$.

Указанная ниже схема подробно продемонстрирована (§1- 5) для случая линейной темпоральной логики с операторами $\bigcirc$, $\Box$; в §6 рассмотрена возможность распространения этой схемы для так называемой симметричной темпоральной логики (содержащей не только операторы для будущего, но и операторы для прошлого), а также для темпоральной логики с операторами неподвижной точки.

§1. Инфинитарное исчисление $G_{L\Box\omega}$

Формулы определяются традиционным образом с помощью логических символов $\supset, \wedge, \vee, \neg, \exists, \forall$ и темпорального оператора $\Box$. Вместо формул вида $\bigcirc^k A$ (где $\bigcirc$ - оператор "следующий") будем употреблять "индексные" формулы A^k. Оперирование с индексами определяется следующим образом:

1) $(E^i)^k := E^{i+k}$, где E - атомарная формула, i - либо ноль (отождествляемый с пустым словом), либо произвольное натуральное число;

2) $(A \odot B)^k := A^k \odot B^k$, $\odot \in \{\supset, \wedge, \vee\}$;

3) $(\bigcirc A)^k := A^{k+1}$;

4) $(\sigma A)^k := \sigma A^k$, $\sigma \in \{\neg, \Box, \exists x, \forall x\}$.

Оператор $\Box$ удовлетворяет следующей "аксиоме индукции": $A \wedge \Box(A \supset A^1) \supset \Box A$.

Секвенция - выражение вида $\Gamma \to \Delta$, где Γ, Δ - произвольные конечные множества формул.

Инфинитарное исчисление $G_{L\Box\omega}$ определяется следующими постулатами.

АКСИОМА. $\Gamma, A \to \Delta, A$.

Правила вывода:

1) темпоральные:

$$\frac{A, \Box A^1, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta} \ (\Box \to),$$

$$\frac{\{\Gamma \to \Delta,\ A^k\}_{k\in\omega}}{\Gamma \to \Delta, \Box A} \quad (\to \Box_\omega),$$

где $k \in \omega$ означает $k \in \{0,1,\dots\}$. Запись Γ^1 означает $A_1^{k_1+1},\dots,A_n^{k_n+1}$, если $\Gamma = A_1^{k_1},\dots,A_n^{k_n}$, $n \geq 1$, $k_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$;

2) логические состоят из традиционных обратимых правил вывода (например, [8]). В правилах $(\to \exists)$, $(\forall \to)$ вводится ограничение (называемое минус-нормальностью) на подбор терма t : терм t входит в заключение правила; если заключение правила не содержит термов, тогда $t = a$, где a – свободная переменная;

3) структурные: из определения секвенции следует, что $G_{L\Box\omega}$ неявно содержит структурные правила сокращения повторений и перестановки.

Выводы в исчислении $G_{L\Box\omega}$ строятся традиционным образом (для исчислений с ω-правилом), т.е. в виде бесконечного дерева (с конечными ветвями); высотой вывода D является ординал, определяемый традиционным образом (например, [9]) и обозначаемый через $O(D)$. Пусть I - некоторое исчисление, тогда $I \vdash S$ будет означать, что секвенция S выводима в исчислении I.

ЛЕММА 1 (допустимость структурного правила утончения). *Следующее структурное правило является допустимым в* $G_{L\Box\omega}$:

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Pi, \Gamma \to \Delta, \Theta} \quad (y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переименуем все собственные переменные применений $(\to \forall)$, $(\exists \to)$ в данном выводе таким образом, чтобы они не входили в Π, Θ. После этого доказательство производится индукцией по высоте вывода.

Вывод в каком-то исчислении I будем называть атомарным, если все аксиомы в этом выводе имеют вид $\Gamma, E \to \Delta, E$, где E - атомарная формула.

ЛЕММА 2. *Произвольный вывод в* $G_{L\Box\omega}$ *может быть перестроен в атомарный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную аксиому $\Gamma, A \to \to \Delta, A$ в данном выводе. Пусть $\Box(A)$ означает число вхождений $\Box$ в A; $l(A)$ - число вхождений всех операторов. Тогда доказательство производится индукцией по $\omega\Box(A) + l(A)$ (т.е. двойной индукцией по $\langle \Box(A), l(A) \rangle$).

ЛЕММА 3 (обратимость правил вывода исчисления $G_{L\Box\omega}$). *Пусть* (i) *- произвольное правило вывода исчисления* $G_{L\Box\omega}$; S *- заключение правила* (i), S_1 *- произвольная посылка правила* (i). *Тогда* $G_{L\Box\omega} \vdash S \Rightarrow \Rightarrow G_{L\Box\omega} \vdash S_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по $O(D)$, используя лемму 2.

§2. Полнота исчисления $G_{L\Box\omega}$

В этом параграфе будут установлены полнота исчисления $G_{L\Box\omega}$, а также допустимость правила сечения в $G_{L\Box\omega}$.

Модель M для рассматриваемой темпоральной логики - это пара $\langle N, V \rangle$, где N - упорядоченная тройка $\langle D, \omega, \leq \rangle$, в которой D - некоторое непустое множество, ω - множество натуральных чисел, $\leq$ - отношение порядка на ω; V - оценочная функция, определяемая обычным образом (например, [8,10]).

Понятие "A истинна в M в момент времени $k \in \omega$" (которое будем обозначать через $M, k \models A$) определяется следующим образом:

1) $M,k \models P^1(t_1,\dots, t_m) \leftrightarrow \langle V(t_1),\dots, V(t_m), k+1\rangle \in V(P)$;

2) $M,k \models \Box A \leftrightarrow \forall l \ (l \in \omega)\ M,k+l \models A$.

Другие случаи определяются как в логике первого порядка (например, [8,10]). С помощью этого понятия традиционным образом (например, [8,10]) можно определить понятие общезначимой секвенции.

Для доказательства полноты исчисления $G_{L\Box\omega}$ введем "симметричное" исчисление $G_{L\Box\omega 1}$, получаемое из $G_{L\Box\omega}$ заменой правила $(\Box\rightarrow)$ следующей схемой правил:

$$\frac{\Gamma, A^l, \Box A \rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \rightarrow \Delta}\ (\Box^l\rightarrow),\ (l \in \omega).$$

Пусть I - исчисление, не содержащее правила сечения, тогда I+сеч будет означать исчисление, получаемое из I присоединением правила сечения.

ТЕОРЕМА 1 (корректность исчислений $G_{L\Box\omega}$+сеч, $G_{L\Box\omega 1}$+сеч). *Пусть* $I \in \{G_{L\Box\omega}$ + сеч, $G_{L\Box\omega 1}$+сеч$\}$ *и* $I \vdash S$, *тогда* $\forall M \models S$ *(т.е.* S *общезначима).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по $O(D)$ (где D - данный вывод), используя семантику рассматриваемой темпоральной логики.

ЛЕММА 4. *Пусть* S *- произвольная секвенция, тогда либо* $G_{L\Box\omega 1} \vdash S$, *либо* $\exists M,k \not\models S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем посредством построения редукционного дерева для S (например, [10]) и с использованием семантики рассматриваемой темпоральной логики.

ТЕОРЕМА 2 (полнота исчисления $G_{L\Box\omega 1}$). *Если* $\forall M \vdash S$, *то* $G_{L\Box\omega 1} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 4.

ТЕОРЕМА 3 (допустимость сечения в $G_{L\Box\omega 1}$). *Пусть* $G_{L\Box\omega 1}$+ сеч. $\vdash S$, *тогда* $G_{L\Box\omega 1} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 1 и 2.

ЛЕММА 5. *Если* $G_{L\Box\omega} \vdash S$, *то* $G_{L\Box\omega 1} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустимость правила $(\Box\rightarrow)$ в $G_{L\Box\omega 1}$ (а значит, и справедливость леммы 5) следует, из того, что $G_{L\Box\omega 1} - \Box A \rightarrow A \wedge \Box A^1$, и теоремы 3.

ЛЕММА 6. *Если* $G_{L\Box\omega 1} \vdash S$, *то* $G_{L\Box\omega} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва индукцией по l докажем допустимость в $G_{L\Box\omega}$ следующего правила:

$$\frac{\Box A^l, \Box A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (\Box^{l*}\rightarrow) .$$

Базис индукции (т.е. когда $l = 0$) очевиден. Пусть $G_{L\Box\omega} \vdash S = \Box A^{l+1}, \Box A, \Gamma \rightarrow \Delta$. Применив к S правило (У) (которое является допустимым в $G_{L\Box\omega}$), получим, что $G_{L\Box\omega} \vdash S' = A^l, \Box A^{l+1}, \Box A, \Gamma \rightarrow \Delta$. Применив $(\Box\rightarrow)$ к S' и индукционное предположение, получим, что $G_{L\Box\omega} \vdash \Box A, \Gamma \rightarrow \Delta$.

Теперь докажем допустимость $(\Box^l\rightarrow)$ в $G_{L\Box\omega}$. Пусть $G_{L\Box\omega} \vdash S = A^l, \Box A, \Gamma \rightarrow \Delta$. Применив (У) к S, получим, что $G_{L\Box\omega} \vdash S' = A^l, \Box A^{l+1}, \Box A, \Gamma \rightarrow \Delta$. Применив $(\Box\rightarrow)$ и $(\Box^{l*}\rightarrow)$ к S', получим, что $G_{L\Box\omega} \vdash \Box A, \Gamma \rightarrow \Delta$.

ТЕОРЕМА 4 (полнота исчисления $G_{L\Box\omega}$). *Если* $\forall M \models S$, *то* $G_{L\Box\omega} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2 и леммы 6.

ТЕОРЕМА 5 (допустимость сечения в $G_{L\Box\omega}$). *Пусть* $G_{L\Box\omega}$ + сеч. $\vdash S$, *тогда* $G_{L\Box\omega} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 5, теоремы 3 и леммы 6.

§3. Построение исчисления $\mathcal{H}$

Цель исчисления $\mathcal{H}$ - обеспечить некоторый потенциальный механизм для нахождения инвариантной формулы R в финитарном правиле вида $\Gamma \to \Delta, R;\ R \to R^1;\ R \to A / \Gamma \to \Delta, \Box A$.

Сперва введем правила вывода исчисления $\mathcal{H}$. Введем "отмеченную" форму правила $(\Box \to)$:

$$\frac{A^+, \Box A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta} \quad (\Box^+ \to),$$

где боковая формула A^+ правила $(\Box^+ \to)$ будет называться отмеченной формулой. Примем, что $(A \odot B)^+ := A^+ \odot B^+$ $(\odot \in \{\supset, \wedge, \vee\})$, $(\sigma A)^+ := \sigma A^+$ $(\sigma \in \{\neg, \forall x, \exists x, \Box\})$.

Введем следующее правило вывода:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \Box A^1}{\Gamma \to \Delta, \Box A} \quad (\to \Box^1).$$

ЛЕММА 7. *Правило вывода* $(\to \Box^1)$ *является обратимым в* $G_{L\Box\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что $G_{L\Box\omega} \vdash \Box A \to \Box A^1$, и теоремы 5.

Установим канонический вид секвенции S. Будем говорить, что секвенция S находится в канонической форме (будем такую секвенцию называть примарной), если $S = \Sigma_1, \Pi^1_{11}, \Pi^{+1}_{12}, \Box\Delta^1_1 \to \Sigma_2, \Pi^1_{21}, \Pi^{+1}_{22}, \Box\Delta^1_2$, где $\Sigma_i = \emptyset$ ($i = 1,2$) или состоит из формул, не содержащих $\Box$ и индексов (такие формулы будем называть логическими формулами); $\Pi^1_{i1} = \emptyset$ ($i = 1,2$) либо состоит из атомарных формул, либо из формул вида $\forall x A(x)$, если $i = 1$, и из формул $\exists x A(x)$, если $i = 2$; Π^{+1}_{i2} содержит либо формулы такого же вида, как и Π^1_{i1}, либо формулы вида $\Box A^1$, $\Delta_i^1 = \varnothing$ ($i = 1,2$), либо состоит из произвольных индексированных формул. Если $\Box\Delta_1^1 \neq \varnothing$ и $\Pi_{12}^{+1} \neq \varnothing$, $\Box\Delta_2^1 \neq \varnothing$, то S будем называть обыкновенной; если $S = \Pi_{12}^{+1}, \Box\Delta_1^1 \to \Pi_{22}^{+1}, \Box\Delta_2^1$, где $\Pi_{12}^{+1} = \varnothing$ либо состоит из формул вида $\Box A$, то S будем называть сингулярной. Секвенцию S будем называть квазипримарной, если $S = \Sigma_1, \Pi_{11}^1, \Pi_{12}^{+1}, \Box\Theta_1, \Box\Delta_1^1 \to \Sigma_2, \Pi_{21}^1, \Pi_{22}^{+1}, \Box\Theta_2, \Box\Delta_2^1$, , где Θ_i ($i = 1,2$) состоит из произвольных (т.е. не обязательно индексированных формул), а остальные обозначения такие же, как и в случае примарной секвенции.

Определим понятие редукции $R\{i\}$ в исчислении I секвенции S к секвенциям $S_1, \ldots, S_n$, где $\{i\}$ - множество правил, обратимых в I. Редукция $R\{i\}$ есть дерево секвенций; конечной секвенцией этого дерева является секвенция S, вершинами $R\{i\}$ являются секвенции $S_1, \ldots, S_n$; каждая секвенция в $R\{i\}$, за исключением S, является посылкой правила вывода $(k) \in \{i\}$, заключение которого принадлежит $R\{i\}$, т.е. $R\{i\}$ состоит из антиприменений правил вывода, обратимых в I.

ЛЕММА 8. *Можно построить редукцию секвенции* S *к примарным (квазипримарным) секвенциям* $S_1, \ldots, S_n$, *причем если* $G_{L\Box\omega} \vdash S$, *то* $G_{L\Box\omega} \vdash S_i$ ($i = 1, \ldots$ $\ldots, n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из обратимости правил исчисления $G_{L\Box\omega}$ (за исключением правила $(\to \Box_\omega)$) и леммы 7. Отметим, что редукция секвенции S к квазипримарным секвенциям отличается от редукции к примарным секвенциям тем, что в первом случае отсутствуют антиприменения правил $(\Box^+\to), (\to\Box^1)$.

Множество $\{S_1, \ldots, S_n\}$, где S_i является примарной (квазипримарной), полученное по лемме 8, будем называть примарным (квазипримарным) разложением секвенции S и обозначать через $P(S)$ (через $QP(S)$ соответственно).

Введем следующее правило вывода: $\dfrac{S_i^*}{S}(A)$ (которое будем называть правилом альтернативности), где S является примарной секвенцией, т.е. $S = \Sigma_1, \Pi_{11}^1, \Pi_{12}^{+1}, \Box\Delta_1^1 \to \Sigma_2, \Pi_{21}^1, \Pi_{22}^{+1}, \Box\Delta_2^1$; S_i^* ($i \in \{1,2,3,4\}$ или $i \in \{1,2,3\}$, если S не содержит отрицательных вхождений $\forall$ и положительных вхождений $\exists$), имеет следующий вид: $S_1 = \Sigma_1 \to \Sigma_2$; $S_2 = \Pi'_{11} \to \Pi'_{21}$ (где $\Pi'_{i1} \subseteq \Pi_{i1}$, $i \in \{1,2\}$ и Π'_{i1} не содержит $\Box$); $S_3 = \Pi^+_{12}, \Box\Delta_1 \to \Pi^+_{22}, \Box\Delta_2$; $S_4 = S$. Секвенцию S_3 будем называть темпоральным заключением антиприменения правила (A); S_1, S_2, S_3 - нетривиальными заключениями; S_4 - тривиальным заключением.

ЛЕММА 9 ("экзистенциальная" обратимость правила (A)). *Пусть* $G_{L\Box\omega} \vdash S$, *тогда* $\exists P(S)$, *такое, что из* $G_{L\Box\omega} \vdash S_n$ *следует* $G_{L\Box\omega} \vdash S^*_{n_i}$ ($i = 1,2,3$), *где* $S_n \in \exists P(S)$, *а* $S^*_{n_i}$ *является нетривиальным заключением антиприменения правила (A).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $G_{L\Box\omega} \vdash S_n$, то в каждой ветви данного вывода находится лишь конечное число применений правил $(\forall\to)$, $(\to\exists)$, из которых можем "выбрать" искомое антиприменение правила (A). Исходя из этого, обратимость правила (A) доказываем, используя индукцию по числу положительных вхождений $\Box$ в S_n.

Правилами вывода исчисления $\mathcal{R}$ являются $(\Box^{+}\to)$, $(\to\ \Box^{1})$, (А), структурное правило (У) и правила вывода исчисления $G_{L\Box\omega}$, за исключением правил $(\Box\to),(\to\ \Box_{\omega})$. Дерево вывода в исчислении $\mathcal{R}$ строим "антиприменяя", т.е. применяя правила вывода снизу-вверх (иначе говоря, от заключения к посылкам). Определим понятие замкнутой секвенции, играющей роль аксиомы исчисления $\mathcal{R}$. Пусть $S_1(c_1,\dots,c_n)$, $S_2(d_1,\dots,d_n)$ - две секвенции из дерева вывода D в $\mathcal{R}$, содержащие собственные переменные $c_1,\dots,c_n,d_1,\dots$ $\dots,d_n$ правил $(\to\forall),(\exists\to)$ $(n\geq 0)$. Будем говорить, что $S_1(c_1,\dots,c_n)$ и $S_2(d_1,\dots,d_n)$ практически совпадают (и обозначать это через $S_1\approx S_2$), если секвенции $S_1(x_1,\dots,x_n)$, $S_2(x_1,\dots,x_n)$ совпадают. Пусть S^{*} - некоторая секвенция из дерева вывода D в $\mathcal{R}$; будем называть S^{*} насыщенной, если $\exists S'\in D$, причем S' находится ниже S^{*} (в той же ветви, что и S^{*}) и $S^{*}\approx S'$. Введем следующее структурное правило:

$$\frac{\Gamma\to\Delta}{\Pi,\Gamma'\to\Delta',\Theta}\ (\tilde{У}),$$

где $\Gamma\to\Delta\approx\Gamma'\to\Delta'$. Будем говорить, что секвенция S' абсорбируется некоторой секвенцией S, если $\dfrac{S}{S'}\ (\tilde{У})$. Будем говорить, что секвенция S в дереве вывода в $\mathcal{R}$ является замкнутой, если либо $S=\Gamma,A\to\Delta,A$, либо S является насыщенной, либо S абсорбируется некоторой насыщенной секвенцией S'. Дерево вывода D в $\mathcal{R}$ будем называть замкнутым, если все вершины D являются замкнутыми секвенциями. Запись $\mathcal{R}\vdash^{D} S$ будет означать, что можно построить замкнутое дерево вывода секвенции S в исчислении $\mathcal{R}$ (иногда будем писать просто $\mathcal{R}\vdash S$). Пусть $\mathcal{R}\vdash^{D} S$. Если все вершины в D являются секвенциями вида $\Gamma,A\to\Delta,A$, то

D будем называть простым; если все вершины в D либо имеют вид $\Gamma, A \to \Delta, A$, либо являются сингулярными секвенциями, то D будем называть сингулярным; если хоть одна вершина в D является обыкновенной, то D будем называть обыкновенным.

Определим естественную тактику построения замкнутого дерева вывода в $\mathcal{R}$. Для этого определим понятие резольвенты секвенции S (обозначаемой $Re(S)$). Построение $Re(S)$ состоит из трех этапов. На первом этапе строится $P(S)$; пусть $S_i \in P(S)$ $(i = 1,\dots,n)$, тогда на втором этапе к секвенциям S_i $(i = 1,\dots,n)$ производится антиприменение правила (A). Пусть $\{S^*_{i_1},\dots, S^*_{i_m}\}$ $(m \le n)$ - множество, состоящее из темпоральных заключений антиприменений правила (A), посылками которых служат секвенции S_i. На третьем этапе для каждой секвенции $S^*_{i_j}$ $(j = 1,\dots,m)$ строится $QP(S^*_{i_j})$. В итоге имеем, что $Re(S) = \{QP(S^*_{i_1}),\dots$ $\dots, QP(S^*_{i_j})\}$.

Определим понятие k-й резольвенты секвенции S (обозначаемой $Re^k(S)$); $Re^0(S) = S$ и $Re^1(S) = Re(S)$. Пусть $S_i \in Re^k(S)$ и S_i незамкнута, тогда $Re^{k+1}(S) = \bigcup\limits_i Re(S_i)$. Если все S_i из $Re^k(S)$ (для любого i) замкнуты, тогда $Re^{k+1}(S)$ - пустое множество. Естественная тактика построения замкнутого дерева в $\mathcal{R}$ состоит в построении $Re^k(S)$. Очевидно, что если $R \vdash S$, тогда процесс построения $Re^k(S)$ всегда заканчивается.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае разрешимой темпоральной логики $Re^k(S)$ можно построить однозначно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда S не содержит отрицателвных вхождений $\forall$ и положительных вхождений $\exists$, то из $G_{L\Box\omega} \vdash S$

следует, что $\mathcal{R} \vdash S$.В общем случае это неверно. Например [11], $G_{L\Box\omega} \vdash S = P(c)$, $\Box\forall x\ (P(x) \supset P^1(f(x)))$, $\Box\forall x\ (P(x) \supset Q(x))$, $\Box\forall x\ (Q(f(x)) \supset Q(x)) \to$ $\to \Box Q(c)$, однако $\mathcal{R} \nvdash S$. Этот пример показывает, что применение ω-правила (в случае темпоральной логики первого порядка) нельзя "свернуть" в применение финитарного правила. Отметим, что если, например, $P = \Box P_1$ или $P = Q$, то $\mathcal{R} \vdash S$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Случай "антиприменения" правила (A), когда $i = 4$, соответствует той ситуации, когда попытка построения замкнутого дерева была неудачна. Производится возврат к заключению правила (A) с тем, чтобы получить новую примарную секвенцию с другими значениями переменных и предпринять новую попытку построения замкнутого дерева в $\mathcal{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Исчисление $\mathcal{R}$ является полуразрешимым (для разрешимой темпоральной логики исчисление $\mathcal{R}$ разрешимо). Очевидно, что из $\mathcal{R} \vdash S$ не следует, что $G_{L\Box\omega} \vdash S$.

ЛЕММА 10. *Пусть* $\mathcal{R} \vdash^D S$ *и* S' *– произвольная насыщенная вершина замкнутого дерева* D *в* $\mathcal{R}$. *Тогда* $\exists\, Re(S') = \{S_1, \dots, S_n\}$ *такая, что* $\forall i\ (1 \le i \le n)$ S_i *либо насыщена, либо абсорбируется некоторой насыщенной секвенцией из* D.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомую резольвенту секвенции S' строим, пользуясь деревом D. Конструкция $Re^k(S)$ и конечность дерева D обеспечивают выполнение условий леммы.

ЛЕММА 11. *Пусть* $\mathcal{R} \vdash^D S$, *тогда все насыщенные секвенции в* D *имеют вид* $S_i = \Pi_i^+, \Box\Omega \to \Delta_i^+, \Box\nabla$ $(i \ge 0)$, *где* Π_i^+, Δ_i^+ *– подформулы формул из* Ω, *причем если* $G_{L\Box\omega} \vdash S$, *то для всех* i *имеем* $G_{L\Box\omega} \vdash S_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вид секвенций S_i следует из метода построения D, а выводимость S_i в $G_{L\Box\omega}$ следует из обратимости правил исчисления $G_{L\Box\omega}$ и лемм 7-9.

ЛЕММА 12. *Пусть* $G_{L\Box\omega} \vdash S$ *и* $\mathcal{R} \vdash^{D} S$, *пусть* $S_i = \Pi_i^+, \Box\Omega \rightarrow \Delta_i^+, \Box\nabla$ ($i = 1, \ldots, n$) *- произвольная насыщенная вершина в* D. *Тогда либо* 1) $\forall i$ ($1 \leq i \leq n$) *существует формула* $\Box A$ *такая, что и* $G_{L\Box\omega} \vdash S_i' = \Pi_i^+, \Box\Omega \rightarrow \Delta_i^+, \Box A$, *либо* 2) $G_{L\Box\omega} \vdash$ $\vdash \Box\Omega \rightarrow \Box\nabla$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим, используя лемму 11 и индукцию по $|\Box\nabla|$.

Множество $\{\Pi_1^+, \Box\Omega \rightarrow \Delta_1^+, \ldots, \Pi_n^+, \Box\Omega \rightarrow \Delta_n^+\}$ из леммы 12 будем называть инвариантным множеством секвенции S и обозначать через $INV(S)$. Собственные переменные антиприменений правил $(\rightarrow \forall)$, $(\exists \rightarrow)$ из D, входящие в $INV(S)$, будем называть существенными переменными множества $INV(S)$ и обозначать через $\Pi(INV(S))$.

Таким образом, лемма 12 утверждает, что если $G_{L\Box\omega} \vdash$ $\vdash S$ и $\mathcal{R} \vdash^{D} S$, где D обыкновенное, т.е. имеет насыщенные вершины вида $S_i = \Pi_i^+, \Box\Omega \rightarrow \Delta_i^+, \Box\nabla$ ($i = 1, \ldots$ $\ldots, n$), тогда либо 1) D можно редуцировать в D' с насыщенными вершинами вида $S_i' = \Pi_i^+, \Box\Omega \rightarrow \Delta_i^+, \Box A$ (остальные формулы из $\Box\nabla$ можно получить правилом (У)), либо 2) D можно редуцировать в сингулярное дерево D' , в котором вместо S_i есть секвенция $\Box\Omega \rightarrow \Box\nabla$ (т.е. формулы из Π_i^+, Δ_i^+ являются несущественными и их можно получить правилом (У)). В первом случае дерево D будем называть сильно обыкновенным.

§4. Финитарное исчисление $G_{L\Box}$

Исчисление $G_{L\Box}$ получается из исчисления $G_{L\Box\omega}$ присоединением структурного правила (У) и заменой правила $(\to \Box_\omega)$ следующими правилами:

$$\frac{\Gamma, \Box\Omega \to \Delta, R;\ R \to R^1;\ R \to A}{\Gamma, \Box\Omega \to \Delta, \Box A} \quad (\to \Box_1),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A;\ \Gamma \to \Delta, \Box A^1}{\Gamma \to \Delta, \Box A} \quad (\to \Box_2),$$

$$\frac{\Box\Omega \to A_1, \Box A_2, \ldots, \Box A_n;\ \ldots;\ \Box\Omega \to \Box A_1, \ldots, \Box A_{n-1}, A_n}{\Box\Omega \to \Box A_1, \ldots, \Box A_n} \quad (\to \Box_3),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma^1 \to \Delta^1} \quad (+1),$$

где правило $(\to \Box_1)$ удовлетворяет нижеследующему условию (*):

1) $\Gamma, \Box\Omega \to \Delta \in \mathrm{INV}(S)$, а секвенция S такая, что $\mathcal{R} \vdash^{D} S$, причем D - сильно обыкновенное;

2) $R = \exists \bar{x} \ (\bigvee_{i=1}^{n} (\Pi_i^{+\wedge} \wedge \neg \Delta_i^{+\vee}) \wedge (\Box\Omega)^{\wedge})$, где $\{\Pi_1^{+}, \Box\Omega \to \Delta_1^{+}; \ldots; \Pi_n^{+}, \Box\Omega \to \Delta_n^{+}\} = \mathrm{INV}(S)$; $\bar{x} = \Pi(\mathrm{INV}(S))$; $\Gamma^{\wedge}$ $(\Gamma^{\vee})$ обозначает конъюнкцию (дизъюнкцию) формул из Γ.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Правило $(\to \Box_1)$ является инвариантным правилом (оно является правилом типа аналитического сечения); правила $(\to \Box_2)$, (+1) - вспомогательные; правило $(\to \Box_3)$ - расщепляющее. Правила (У) и (+1) включены в G_L в целях упрощения изложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Очевидно, что исчисление $G_{L\Box}$ не является полным; в §5 будет показано, что $G_{L\Box}$ полно для таких секвенций S, для которых $\mathcal{R}_1 \vdash S$, где $\mathcal{R}_1$ получается из $\mathcal{R}$ присоединением правила $(\rightarrow \Box_3)$. Такие секвенции будем называть регулярными.

Покажем, что из $G_{L\Box} \vdash S$ следует, что $G_{L\Box\omega} \vdash S$ и $\mathcal{R}_1 \vdash S$.

ЛЕММА 13. *В исчислении* $G_{L\Box\omega}$ *допустимо правило* $(+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по высоте вывода.

ЛЕММА 14. *В исчислении* $G_{L\Box\omega}$ *допустимо следующее правило вывода:*

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, R;\ R \rightarrow R^1;\ R \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow \Delta,\ \Box A} \quad (\rightarrow \Box).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя посылки правила $(\rightarrow \Box)$, допустимость сечения в $G_{L\Box\omega}$ и индукцию по k, получаем, что $G_{L\Box\omega} \vdash \Gamma \rightarrow \Delta, A^k$ $(k \in \omega)$. Следовательно, по $(\rightarrow \Box_\omega)$ получаем, что $G_{L\Box\omega} \vdash \Gamma \rightarrow \Delta,\ \Box A$.

ЛЕММА 15. *В исчислении* $G_{L\Box\omega}$ *допустимо правило* $(\rightarrow \Box_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 14, если положить $R = A \wedge \Box A^1$.

ЛЕММА 16. *В исчислении* $G_{L\Box\omega}$ *допустимо правило* $(\rightarrow \Box_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим, используя $(\rightarrow \Box_2)$, $(\Box \rightarrow)$.

ЛЕММА 17. *Если* $G_{L\Box} \vdash S$ *то* $\mathcal{R}_1 \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по высоте вывода, используя ограничение на правило $(\rightarrow \Box_1)$.

ТЕОРЕМА 6. *Если* $G_{L\Box} \vdash S$, *то* $G_{L\Box\omega} \vdash S$ *и* $\mathcal{R}_1 \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 13-17.

ПРИМЕР 1.

1) Пусть $S = \to \Box\ (\Box\Omega \supset A \vee \Box \neg \Box A)$, где $\Omega = \neg\ (\neg A \wedge \Box (A \supset \Box A))$. Легко проверить $\mathcal{R}_1 \vdash S$ и $\mathcal{R} \vdash^D S_1$, где $S_1 = \Box\Omega \to A, \Box \neg \Box A$ и $INV(S_1) = \{\Box\Omega \to \Box\ (A^+ \supset \Box A^+)\}$, таким образом, $R = \Box\Omega \wedge \neg \Box\ (A^+ \supset \Box A^+)$. Нетрудно проверить, что

$$I \vdash \Box\Omega \to \Box\ (A \supset \Box A), R; \quad (1)$$

$$IN \vdash R \to R^1\ ; \quad (2)$$

$$I_1 \vdash R \to \neg\Box A, \quad (3)$$

где I состоит из правил $(\to \wedge)$, $(\to \neg)$; I_1 состоит из правил $(\to \neg)$, $(\to \Box_3)$, $(\to \supset)$; IN - исчисление, получаемое из $G_{L\Box}$ удалением $(\to \Box_1)$, $(\to \Box_3)$. Применив $(\to \Box_1)$ к (1)-(3), получим, что $G_{L\Box} \vdash S_1' = \Box\Omega \to \Box\ (A \supset \Box A), \Box\neg\Box A$. Применив к S_1' те же правила, что и в D, за исключением правил (A) и $(\to \Box^1)$, получим, что $G_{L\Box} \vdash S_1$. (Заметим, что применения правила (A) заменяются применением правил (+1), (У), а применения правила $(\to \Box^1)$ заменяются применением правила $(\to \Box_2)$.) Применив к S_1 правила $(\to \supset)$, $(\to \vee)$, $(\to \Box_3)$, получим, что $G_{L\Box} \vdash S$.

2) Пусть $S = \to \Box\ (\Box A \supset \Box B) \vee \Box (\Box B \supset \Box A)$ [12]. Тогда вывод секвенции S получаем посредством правила $(\to \Box_3)$.

§5. Редукция выводов в $G_{L\Box\omega}$ в выводы в $G_{L\Box}$ для регулярных секвенций

В этом параграфе докажем, что если $G_{L\Box\omega} \vdash S$ и $\mathcal{R}_1 \vdash S$, то $G_{L\Box} \vdash S$.

ЛЕММА 18. *Пусть* $G_{L\Box\omega} \vdash S$ *и* $\mathcal{R}_1 \vdash^D S$ *; пусть* S_i $(i = 1,\ldots,n)$ *- замкнутые вершины в* D*, причем* $\forall i\ (1 \le i \le n)\ G_{L\Box} \vdash S_i$. *Тогда* $G_{L\Box} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два произвольных применения $(\to \Box_\omega)$ в атомарном выводе секвенции S. Эти применения будем называть различными, если главные формулы этих применений являются различными (формулы вида A^i, A^k будем считать совпадающими), либо они совпадают, но имеют различных потомков. Таким образом, число различных применений правила $(\to \Box_\omega)$ в данном атомарном выводе V можно считать конечным, и это число будем обозначать через $(\to \Box_\omega)[V]$. Лемму докажем индукцией по $(\to \Box_\omega)[V]$. Для доказательства леммы достаточно показать, что произвольное антиприменение правил $(\to \Box^1)$, (A) можно заменить применениями правил исчисления $G_{L\Box}$. Антиприменения правила $(\to \Box^1)$ можно заменить (пользуясь атомарностью V и индукционным предположением) применением правила $(\to \Box_2)$. Антиприменения правила (A) можно заменить применением правил (+1) и (У).

Пусть IN - исчисление, получаемое из $G_{L\Box}$ удалением правил $(\to \Box_1)$, $(\to \Box_3)$.

ЛЕММА 19. *Пусть* $G_{L\Box\omega} \vdash S$ *и* $\mathcal{R} \vdash^D S$, *, где* D *- сильно обыкновенное. Тогда* $IN \vdash R \to R^1$, *где* R *определено в условии (*) на правило* $(\to \Box_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как D — сильно обыкновенное дерево, то можно считать, что все насыщенные вершины в D имеют вид $S_i = \Pi_i^+, \Box\Omega \to \Delta_i^+, \Box A$. Пусть $Re(S_i) = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}\}$. Рассмотрим редукцию R_i секвенции S_i $(1 \le i \le n)$ к секвенциям $S_{i_1}, \ldots, S_{i_n}$. Для доказательства леммы преобразуем R_i в вывод V_i в IN секвенции $S'_i = \Pi^+_i, \Box\Omega \to \Delta^+_i, R^1$ $(1 \le i \le n)$.

Рассмотрим антиприменение правила (A) в R_i:

$$\frac{S'_k}{S_{ij} = \Sigma_1, \Pi^1_{11}, \Pi^{+1}_{12}, \Box\Omega^1 \to \Sigma_2, \Pi^1_{21}, \Pi^{+1}_{22}, \Box A^1}\ (A),$$

$k \in \{1,2,3\}$; $S'_1 = \Sigma_1 \to \Sigma_2$; $S'_2 = \Pi'_{11} \to \Pi'_{21}$ (где $\Pi'_{i1} \subseteq \Pi_{i1}$, $i \in \{1,2\}$ и Π'_{i1} не содержит $\Box$); $S'_3 = \Pi^+_{12}, \Box\Omega \to \Pi^+_{22}, \Box A$. Если $k \in \{1,2\}$, то очевидно, что IN $\vdash S'_k$. Используя структурное правило (У) (в случае, когда $k = 1$) и правила (У), (+1) (в случае, когда $k = 2$), получаем, что IN $\vdash S'_{ij} = \Sigma_1, \Pi^1_{11}, \Pi^{+1}_{12}, \Box\Omega^1 \to \Sigma_2, \Pi^1_{21}, \Pi^{+1}_{22}, R^1$. Пусть $k = 3$; в редукцию R_i подставим формулу R вместо всех вхождений выделенной формулы $\Box A$. Используя лемму 10, форму инвариантной формулы и применяя правила $(\to \vee)$, $(\to \wedge)$, $(\neg \to)$, $(\to \exists)$, получаем, что IN $\vdash S'' = \Pi^+_{12}, \Box\Omega \to \Pi^+_{22}, R$. Применив правила (+1) и (У), получим, что IN $\vdash S'_{ij}$. Применяя к S'_{ij} те же правила, что и в редукции R_i (ниже (A)), получим, что IN $\vdash S'_i = \Pi^+_i, \Box\Omega \to \Delta^+_i, R^1$ $(1 \le i \le n)$. Применив $(\wedge \to)$, $(\neg \to)$, $(\vee \to)$, $(\exists \to)$ к секвенциям S'_i $(1 \le i \le n)$, получим, что IN $\vdash R \to R^1$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $G_{L\Box\omega} \vdash S$ *и* $\mathcal{H}_1 \vdash^D S$, *тогда* $G_{L\Box} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 18 достаточно показать, что $\forall i$ $(1 \le i \le n)$ $G_{L\Box} \vdash S_i$, где S_i - замкнутые вершины в D. В силу леммы 11 и обратимости правила $(\to\Box_\omega)$ имеем, что $G_{L\Box^\omega} \vdash S_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Доказательство проведем индукцией по $(\to\Box_\omega)[V_i]$, где V_i - атомарный вывод секвенции S_i в $G_{L\Box\omega}$. Если S_i - сингулярная, то воспользуемся правилом $(\to\Box_3)$ и индукционным предположением. Пусть S_i - насыщенные вершины вида $\Pi_i^+, \Box\Omega \to \Delta_i^+, \Box\nabla$. Тогда в силу леммы 12 имеет место либо 1) $\forall i\ (1\le i\le n)$ $\exists\ \Box A \in \Box\nabla$ такая, что $G_{L\Box\omega} \vdash S_i' = \Pi_i^+, \Box\Omega \to \Delta_i^+, \Box A$, либо 2) $G_{L\Box\omega} \vdash \Box\Omega \to \Box\nabla$. Во втором случае пользуемся правилом $(\to\Box_3)$ и индукционным предположением. Рассмотрим первый случай. С помощью правил $(\to\vee)$, $(\to\wedge)$, $(\to\neg)$, $(\to\exists)$ получаем, что

$$G_{L\Box} \vdash \Pi_i^+, \Box\Omega \to \Delta^+, R, \tag{1*}$$

где R определено как в условии (*) (см. §4). В силу леммы 19 имеем, что

$$\mathbb{N} \vdash R \to R^1. \tag{2*}$$

Далее, согласно обратимости правила $(\to\Box_\omega)$ (примененному к секвенциям S_i') и индукционному предположению имеем, что $\forall i\ (1\le i\le n)$ $G_{L\Box} \vdash S_i'' = \Pi_i^+, \Box\Omega \to \Delta_i^+, A$. Применив правила $(\wedge\to)$, $(\neg\to)$, $(\vee\to)$, $(\exists\to)$ к S_i'', получим, что

$$G_{L\Box} \vdash R \to A. \tag{3*}$$

Применив $(\to\Box_1)$ к (1*)-(3*), получим, что $G_{L\Box} \vdash S_i'$ ($i = 1,\dots,n$). Таким образом, $G_{L\Box} \vdash S$.

ТЕОРЕМА 8 (полнота исчисления $G_{L\Box}$ для регулярных секвенций). *Если* $\forall M \models S$, *где* S *- регулярная секвенция, то* $G_{L\Box} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 4 и 7.

ТЕОРЕМА 9 (допустимость правила сечения в $G_{L\Box}$). ***Пусть*** $G_{L\Box}$*+сеч* $\vdash S$, *где* S *- регулярная секвенция, тогда* $G_{L\Box} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 6,5,7.

ТЕОРЕМА 10 (эквивалентность исчислений $G_{L\Box\omega}$ и $G_{L\Box}$ для регулярных секвенций). *Имеем*

$$(G_{L\Box\omega} \vdash S \wedge \mathcal{R}_1 \vdash S) \Rightarrow G_{L\Box} \vdash S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 6 и 7.

§6. Некоторые расширения исчислений $G_{L\Box\omega}$, $G_{L\Box}$

Построим инфинитарные и финитарные исчисления первого порядка для так называемой симметричной линейной темпоральной логики [13] и темпоральной логики с операторами неподвижной точки [14]. Следуя выше приведенной схеме (для случая операторов $\bigcirc$, $\Box$), можно доказать полноту построенных финитарных исчислений для регулярных секвенций, определяемых аналогичным образом,как и в §3,4.

1. Симметричная темпоральная логика. Рассмотрим линейную темпоральную логику с операторами W_1 ("пока в будущем"), W_2 ("пока в прошлом") (например, [1,12]). Формула AW_1B означает, что A будет истиной, пока B не станет истиной. Формула AW_2B означает, что A была истиной, пока B не стала истиной. Операторы "следующий" и "предыдущий" "проталкиваются" до элементарных формул и элиминируются с помощью индексных формул. Операторы $\Box_1$ ("всегда будет") и $\Box_2$ ("всегда было") определяются через операторы W_i: $\Box_i A = AW_i F$ (F - константа "ложь"). Операторы W_i удовлетворяют следующей "аксиоме индукции":

$$C \wedge \Box_i((C \wedge \neg B) \supset (A \wedge C^{\rho 1})) \supset AW_iB,$$

где $\rho = +$, если $i = 1$,и $\rho = -$, если $i = 2$.

Обозначим через $G_{LW_i\omega}$ инфинитарное исчисление, получаемое из исчисления $G_{L\Box\omega}$ заменой правил $(\to \Box_\omega)$, $(\Box \to)$ следующими правилами:

$$\frac{(B\vee A),\ (B\vee(A^{\rho 1}W_i B^{\rho 1})),\ \Gamma\to\Delta}{AW_iB,\ \Gamma\to\Delta}\qquad (W_i\to),$$

$$\frac{\{\Gamma\to\Delta,\ U_k\},\ k\in\omega}{\Gamma\to\Delta,\ AW_iB}\qquad (\to W_{i\omega}),$$

где $U_0 = B\vee A,\ U_k = B\vee(A\wedge U^{\rho 1}_{k-1})$ $(k=1,2,\ldots)$; $\rho = +$, если $i = 1$, $\rho = -$, если $i = 2$.

ТЕОРЕМА 11. *Секвенция* S *общезначима тогда и только тогда, когда она выводима в исчислении* $G_{LW_i\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теорем 1,4. Для доказательства полноты исчисления $G_{LW_i\omega}$ вводится вспомогательное исчисление, получаемое из исчисления $G_{LW_i\omega}$ заменой правила $(W_i\to)$ следующими правилами:

$$\frac{U_k,\ AW_iB,\Gamma\to\Delta}{AW_iB,\ \Gamma\to\Delta}.$$

Обозначим через G_{LW_i} финитарное исчисление, получаемое из исчисления $G_{LW_i\omega}$ присоединением структурного правила (У) и заменой правила $(\to W_{i\omega})$ следующими правилами:

$$\frac{(\Pi)W_i(\Theta),\Gamma\to\Delta,R;R\to R^{\rho 1},B;R\to A,B}{(\Pi)W_i(\Theta),\Gamma\to\Delta,\ AW_iB}\qquad (\to W_{i1}),$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,A,B;\Gamma\to\Delta,\ B,A^{\rho 1}W_iB^{\rho 1}}{\Gamma\to\Delta,\ AW_iB}\qquad (\to W_{i2}),$$

$$\frac{S_1;\ldots;S_m}{(\Gamma_1)W_i(\Gamma_2)\to(\Pi_1)W_i(\Pi_2)}\qquad (\to W_{i3}),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma^{\rho 1} \to \Delta^{\rho 1}} \, (\rho^1), \quad \rho \in \{+,-\},$$

где

$$S_1 = (\Gamma_1)W_i(\Gamma_2) \to C_1, D_1, C_2 W_i D_2, \ldots, C_m W_i D_m;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_m = (\Gamma_1)W_i(\Gamma_2) \to C_1 W_i D_1, \ldots, C_{m-1} W_i D_{m-1}, C_m, D_m;$$

$$(\Gamma_1)W_i(\Gamma_2) = A_1 W_i B_1, \ldots, A_n W_i B_n \quad (n \geq 0);$$

$$(\Pi_1)W_i(\Pi_2) = C_1 W_i D_1, \ldots, C_m W_i D_m \quad (m \geq 1);$$

инвариантное правило $(\to W_{i1})$ удовлетворяет такому аналогичному условию, что правило $(\to \Box_1)$ (см. §4). Понятие регулярной секвенции определяется аналогичным образом, как в §4.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть* S *– регулярная секвенция, тогда* $G_{LW_i\omega} \vdash S \Leftrightarrow G_{LW_i} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теорем 6,10.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть* S *– регулярная секвенция, тогда* S *общезначима тогда и только тогда, когда* $G_{LW_i} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 11,12.

ПРИМЕР 2.

1) Пусть $S = C, \Box_1\Omega \to AW_1B$, где $\Omega = ((C \wedge \neg B) \supset \supset (A \wedge C^1))$, $\Box_1\Omega = \Omega W_1 F$. Применив к секвенции S процедуру "насыщение" (аналогичную описанной в §3), получим, что $INV(S) = \{C, \Box_1\Omega \to\}$. Таким образом, $R = C \wedge \Box_1\Omega$. Легко проверить, что

$$I \vdash C, \Box_1\Omega \to R, \tag{4}$$

$$IN \vdash R \to R^1, B, \tag{5}$$

$$I_1 \vdash R \to A, B, \tag{6}$$

где $\mathbf{I}$ состоит из правила $(\to \wedge)$, $\mathbf{IN}$ состоит из правил $(W_1 \to)$, $(\supset \to)$, $(\to \wedge)$, $(\wedge \to)$ (в общем случае $\mathbf{IN}$ состоит из правил исчисления G_{LW_i} за исключением правил $(\to W_{i1})$, $(\to W_{i3})$); $I_1 = \mathbf{IN}$ (в общем случае $I_1 = G_{LW_i}$).

2) Пусть $S = AW_1(B \vee C) \to AW_1B\ AW_1C$, тогда вывод секвенции S нетрудно получить посредством правил $(\to W_{13})$, $(W_1 \to)$ и правил исчисления высказываний.

2. Темпоральная логика с операторами неподвижной точки. Рассмотрим линейную темпоральную логику с операторами μ, ν - наименьшей и наибольшей неподвижными точками (например, [1,14, 15]). Формулы $QXA(X)$ $(Q \in \{\mu, \nu\}$, X - пропозицио - нальная переменная) удовлетворяют условиям монотонности и непрерывности [14,15]. Операторы $\Box$ (всегда) и W (пока) выражаются через оператор ν : $\Box A = \nu X(A \wedge X^1)$, $AWB = \nu X(B \vee (A \wedge X^1))$, причем $\mu XA(X) = \neg\nu X \neg A(\neg X)$.

Обозначим через $G_{\mu\nu\omega}$ инфинитарное исчисление (ω-правила которого естественным образом отражают семантику операторов неподвижной точки), получаемое из исчисления $G_{L\Box\omega}$ присоединением аксиом: $\Gamma \to \Delta, T$; $F, \Gamma \to \Delta$ (где T, F - константы истинности) и заменой правил $(\to \Box_\omega)$, $(\Box \to)$ следующими правилами:

$$\frac{A(\nu XA(X)), \Gamma \to \Delta}{\nu XA(X), \Gamma \to \Delta} \quad (\nu \to),$$

$$\frac{\{\Gamma \to \Delta, A_{k+1}(T)\}_{k \in \omega}}{\Gamma \to \Delta, \nu XA(X)} \quad (\to \nu_\omega),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(\mu XA(X))}{\Gamma \to \Delta, \mu XA(X)} \quad (\to \mu),$$

$$\frac{\{A_{k+1}(F),\Gamma \to \Delta\}_{k\in\omega}}{\mu XA(X),\Gamma \to \Delta} \quad (\mu_\omega \to),$$

где $A_1(X) = A(X)$; $A_{k+1}(X) = A(A_k(X))$.

ТЕОРЕМА 14. *Секвенция* S *общезначима тогда и только тогда, когда она выводима в исчислении* $G_{\mu\nu\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теорем 1,4. Для доказательства полноты исчисления $G_{\mu\nu\omega}$ вводится вспомогательное исчисление, получаемое из исчисления $G_{\mu\nu\omega}$ заменой правил $(\nu \to)$, $(\to \mu)$ следующими правилами соответственно:

$$\frac{A(A_k(T)),\Gamma \to \Delta}{\nu XA(X),\ \Gamma \to \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A(A_k(F))}{\Gamma \to \Delta, \mu XA(X)},$$

где $k \in \omega$.

Обозначим через $G_{\mu\nu}$ исчисление, получаемое из исчисления $G_{\mu\nu\omega}$ присоединением структурного правила (У) и заменой правил $(\to \nu_\omega)$,$(\mu_\omega \to)$ правилом (+1) и следующими правилами:

$$\frac{\nu(\Omega),\Gamma \to \Delta,R;\ R \to A(R)}{\nu(\Omega),\Gamma \to \Delta,\ \nu XA(X)} \quad (\to \nu_1),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ A(\nu XA(X))}{\Gamma \to \Delta,\nu XA(X)} \quad (\to \nu_2),$$

$$\frac{A(R) \to R;\ R,\Gamma \to \Delta,\mu(\Omega)}{\mu XA(X),\Gamma \to \Delta,\mu(\Omega)} \quad (\mu_1 \to),$$

$$\frac{A(\mu XA(X)),\Gamma \to \Delta}{\mu XA(X),\Gamma \to \Delta} \quad (\mu_2 \to),$$

$$\frac{S_1;\dots;S_n}{S} \quad (\to \nu_3), \qquad \frac{S'_1;\dots;S'_m}{S'} \quad (\mu_3 \to),$$

где $Q(\Sigma) = QX_1A_1(X_1),\dots,QX_pA_p(X_p)$, если $\Sigma = A_1(X_1),\dots,A_p(X_p), p \geq 0$, $Q \in \{\mu,\nu\}$; $S = \nu(\Pi) \to \nu(\Delta)$;

$\nu(\Delta) = \nu Y_1 B_1(Y_1), \ldots, \nu Y_n B_n(Y_n) \quad (n \geq 1)$; $S_1 = {}$
$= \nu(\Pi) \to B_1(T), \nu Y_2 B_2(Y_2), \ldots, \nu Y_n B_n(Y_n); \ldots;$ $S_n = {}$
$= \nu(\Pi) \to \nu Y_1 B_1(Y_1), \ldots, \nu Y_{n-1} B_{n-1}(Y_{n-1}), B_n(T)$; $S' = {}$
$= \mu(\Theta) \to \mu(\Pi)$; $\mu(\Theta) = \mu X_1 A_1(X_1), \ldots, \mu X_m A_m(X_m)$ $(m \geq$
$\geq 1)$; $S_1' = A_1(F), \mu X_2 A_2(X_2), \ldots, \mu X_m A_m(X_m); \ \ldots \ ;$
$S_m' = \mu X_1 A_1(X_1), \ldots, \mu X_{m-1} A_{m-1}(X_{m-1}), A_m(F)$; инвариантные правила $(\to \nu_1)$, $(\mu_1 \to)$ удовлетворяют условию, аналогичному такому условию, что и правило $(\to \Box_1)$ (см. §4). Понятие регулярной секвенции определяется аналогичным образом, как в §4.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть* S *- регулярная секвенция, тогда* $G_{\mu\nu\omega} \vdash S \Leftrightarrow G_{\mu\nu} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теорем 6,10.

ТЕОРЕМА 16. *Пусть* S *- регулярная секвенция, тогда* S *общезначима тогда и только тогда, когда* $G_{\mu\nu} \vdash S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 14,15.

ПРИМЕР 3. Пусть $S = A, \nu X B(X) \to \nu X(A \wedge X^1)$, где $B(X) = ((A \supset A^1) \wedge X^1)$. Применив к секвенции S процедуру "насыщение" (аналогичную описанной в §3), получим, что $INV(S) = \{A, \nu X B(X) \to\}$. Таким образом, $R = A \wedge \nu X B(X)$. Легко проверить, что

$$I \vdash A, \nu X B(X) \to R, \tag{7}$$

$$IN \vdash R \to A \wedge R^1, \tag{8}$$

где I состоит из правила $(\to \wedge)$, IN состоит из правил $(\to \nu_2)$, $(\nu \to)$ и правил исчисления высказываний (в общем случае $IN = G_{\mu\nu}$).

Литература

1. PNUELI A. Applications of temporal logic to the specification and verification of reactive systems: a survey of current trends //LNCS.- 1986.- Vol.224.- P.510-584.

2. SZALAS A. Concerning the semantic consequence relation in first order temporal logic //Theor.Comput.Sci.- 1986. - Vol.47.- P.329-334.

3. KROGER F. On the interpretability of arithmetic in temporal logic//Theor.Comput.Sci.- 1990.- Vol.73.- P.47-60.

4. KAWAI H. Sequential calculus for a first order infinitary temporal logic //Zeitshr. fur Math.Log. und Grundlagen der Math.- 1987.- Vol.33.- P.423-432.

5. SZALAS A. A complete axiomatic characterization of first order temporal logic of linear time //Theor. Comput.Sci.- 1987.- Vol.54.- P. 199-214.

6. PLIUŠKEVIČIUS R. Investigation of finitary calculi for temporal logic by means of infinitary calculi //LNCS.- 1990.- Vol.452.- P.464-469.

7. PLIUŠKEVIČIUS R. Investigation of finitary calculus for a discrete linear time logic by means of finitary calculus //LNCS.- 1991.- Vol. 502.- P.504-528.

8. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. - М.: Наука, 1979.

9. ШВИХТЕНБЕРГ Г. Теория доказательств: некоторые прило - жения устранения сечения // Справочная книга по математической логике.- М.: Наука,1983.- С.54-83.

10. ТАКЕУТИ Г. Теория доказательств.- М.: Мир, 1978.

11. KROGER F. Частное сообщение.

12. МАКСИМОВА Л.Л. Частное сообщение.

13. PLIUŠKEVIČIUS R. Complete sequential calculi for the first order symmetrical linear temporal logic with UNTIL and SINCE //Proc of symposium on logical foundations of computer science.- 1992. Tver (an appear).

14. PLIUSKEVICIUS R. Design complete sequential calculus for continous fixpoint temporal logic //Proc.of third European workshop on logic in AI.- 1992. Berlin (an apperar).

15. BARRINGER H. The use of temporal logic in the compositional specification of concurrent systems//Temporal logic and their applications,ed. A Galton.-London,1987.- P.53-90.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 июля 1992 года