ЛОГИКА И СЕМАНТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
(Вычислительные системы)
1992 год Выпуск 146

*КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ*

# О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ОБОГАЩЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПЕЦИФИКАЦИЙ

Антимиров В.М., Дегтярёв А.И., Киев

Алгебраическая спецификация - это пара $SP = \langle\Sigma,E\rangle$, где $\Sigma$ - многосортная сигнатура, E - набор (квази)тождеств сигнатуры $\Sigma$. В качестве стандартной модели (интерпретации) такой спецификации выбирается так называемая *инициальная модель* $I(SP)$, которую с точностью до изоморфизма можно представить в виде фактора $T_\Sigma/{=_E}$ абсолютно свободной алгебры основных термов сигнатуры $T_\Sigma$ по наименьшей конгруэнции $=_E$, порожденной (квази) тождествами из E.

На практике возникает необходимость пошагового построения алгебраической спецификации. С этой целью используется следующая конструкция: к имеющейся спецификации SP добавляются набор новых функциональных символов F и множество новых аксиом R, определяющих смысл этих символов. При этом возникает спецификация $SP' = SP + \langle F,R\rangle = \langle\Sigma+F,E+R\rangle$, которую называют *обогащением* SP.

Такое обогащение должно быть *непротиворечивым*, т.е. удовлетворять условию "отсутствия склеек": если $E+R \vdash t1 = t2$, то $E \vdash t1 = t2$ для всех основных $\Sigma$-термов t1, t2 (здесь $\vdash$ обозначает выводимость в эквациональной логике). Этим условием обеспечивается "сохранение" I(SP) в обогащении в качестве подалгебры I(SP') и гарантируется отсутствие $\Sigma$-тождеств, ложных в I(SP), но истинных в I(SP').

Пусть вместе с множеством функциональных символов F задано F-индексированное семейство термов $r_f$ сигнатуры $\Sigma + F$. Обогащение назовем *функциональным* (ф-обогащением), если множество новых аксиом R есть $\{f(x) = r_f \mid f \in F,\ r_f \in T_{\Sigma+F}(x)\}$, где x - набор различных переменных. Другими словами, R имеет вид функциональной программы над абстрактным типом данных I(SP).

В работе [1] показано, что если все $r_f$ суть $\Sigma$-термы, то такое ф-обогащение непротиворечиво. Однако нельзя обобщить этот факт на случай произвольных $r_f$, как показывает следующий пример обогащения спецификации SP натуральных чисел с вычитанием:

```
sort Nat
const 0:Nat
operations suc:Nat → Nat; _ - _:Nat,Nat → Nat
axioms (∀x,y:Nat)
x-0=x; 0-x=0; suc(x)-suc(y)=x-y; x-x=0; suc(x)-x=suc(0).
```

Пусть $F = \{f\colon Nat \to Nat\}$, $R = \{f(x) = suc(f(x))\}$. Тогда обогащение SP + $\langle F,R\rangle$ противоречиво, так как позволяет вывести тождество $0 = suc(0)$, ложное в I(SP).

Основной вопрос, исследуемый в настоящей работе: при каких условиях ф-обогащение общего вида непротиворечиво? В последующих формулировках мы рассматриваем ф-обогащение R как систему переписывания термов.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть R - нормализующая система переписывания термов, т.е. каждый* ($\Sigma$+R)*-терм имеет* R*-нормальную форму. Тогда ф-обогащение* SP + $\langle F,R\rangle$ *непротиворечиво.*

Эта теорема следует из [2] и, очевидно, обобщает упомянутый результат из [1]. Однако она не применима тогда,когда ф-обогащение задает частичную функцию (как в нашем примере).Чтобы охватить этот случай, необходимо модифицировать логику.

Считаем, что в каждой сигнатуре выделено подмножество $\Sigma^+$ "тотальных" функциональных символов, а из множества переменных

Х каждого сорта выделено подмножество "положительных" переменных $X^+$. Обозначим $\Sigma^- = \Sigma \setminus \Sigma^+$, $X^- = X \setminus X^+$ ("отрицательные" функциональные символы и переменные). Терм назовем *положительным*, если он не содержит символов из $\Sigma^- \cup X^-$. Моделями таких сигнатур служат алгебры, содержащие $\Sigma^+$-подалгебры, элементами которых ограничивается оценка переменных из $X^+$ (остальные элементы модели играют роль "сообщений об ошибках"). Оказывается, что можно получить согласованное с такой семантикой полное (относительно класса всех моделей) эквациональное исчисление, если ввести следующее ограничение на правило подстановки: вместо положительных переменных можно подставлять только положительные термы (подробнее см. в [3]).

Рассмотрим теперь случай обогащения спецификации SP = $= \langle \Sigma, E \rangle$ частичными функциями $f \in F$. Относительно SP предполагаем следующее: она содержит сорт булевских значений Bool с константами true, false и функции разбора случаев if: $\mathrm{Bool} \times s \times s \to s$ для каждого сорта s вместе с аксиомами if(true,x,y)= = x, if(false,x,y) = y; множество этих аксиом обозначим через IF.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть все переменные, входящие в аксиомы из* $T \setminus IF$, *являются положительными, а все ф-символы из* F *– отрицательными. Тогда ф-обогащение* $\langle \Sigma+F, E+R \rangle$ *непротиворечиво в логике с частичными функциями.*

*Литература*


1. GOGUEN J.J., THATCHER J., WAGNER E. An initial algebra approach to the specification, correctness and implementation of abstract data types //Gurrent trends in ptogramming methodology, Vol. 4. -Prentice-Hall, 1978. -P. 80-149.

2. ДЕГТЯРЕВ А.И. Методы обращения с равенством в теориях с полным множеством редукций //Математическое обеспечение системы логического вывода. - Киев, 1983. -С. 42-55 (ИК АН УССР).

3. ANTIMIROV V.M., NAIDICH D.E., KOVAL V.N. Partial functions in simulation: formal models and calculi //Proc. IMACS European Simulation Meeting, Esztergom, Hungary, August, 28-30. - 1990. -P. 143-148.