формулы вида $\exists x \in t\ \varphi$, $\exists x \subseteq t\ \varphi$, $\forall x \in t\ \varphi$, $\forall x \subseteq t\ \varphi$, называемые формулами с ограниченными кванторами [1].

Рассмотрим вопрос об эквивалентности в языке $L$ списочных надстроек над двумя различными моделями. Достаточное условие их эквивалентности можно сформулировать в терминах самих исходных моделей.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *- модели некоторой конечной сигнатуры. Пусть существует последовательность непустых семейств* $S_n$ *- конечных частичных изоморфизмов из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$ *таких, что* $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots$ $\ldots \supseteq S_n \supseteq \ldots$ *и для любых конечных наборов* $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$ *и* $b_1, \ldots, b_l \in |\mathfrak{B}|$, *для любого* $\varphi \in S_{n+1}$, $n \geq 0$, *существуют* $\psi_1, \psi_2 \in S_n$ *такие, что* $\varphi \subseteq \psi_1, \psi_2$ *и* $a_1, \ldots, a_k \in \delta\psi_1$, $b_1, \ldots$ $\ldots, b_l \in \rho\psi_2$. *Тогда* $HW(\mathfrak{A}) \equiv HW(\mathfrak{B})$.

*Литература*

1. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико-математические проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 107: Вычислительные системы. -С. 3-29.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры.-Новосибирск: Наука, 1988.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. -М.: Наука, 1980.

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ

Коляда С.В., Киев

Как известно, в математической логике построен и исследован ряд пропозициональных исчислений, предназначенных для формализации логических рассуждений. Теоретические и прикладные применения таких исчислений, в том числе основанные на использовании ЭВМ, потребовали разработки и развития методов автоматизированного доказательства логических формул. Это позволило добиться продвижения в попытках достижения практически прием -

лемых возможностей доказывать сложные логические формулы, однако далеко не все трудности преодолены (см., например, [1]). Используемые в компьютерной логике методы автоматизированного доказательства логических формул могут быть в значительной мере усилены путем сочетания их с аналитическими вычислениями пропозициональных формул. Исследования в области аналитических вычислений над формулами различных математических теорий имеют богатую историю [2,3]. Представленная в данном сообщении работа посвящена аналитическим вычислениям именно над пропозициональными формулами. Она основана на общих идеях компьютерной алгебры [2,3] и отличается от подходов к представлению, преобразованию и использованию логических формул, принятых в логическом программировании, известных методов компьютерной логики, методов переписывания термов и специальных вычислительных структур.

В настоящем сообщении кратко описывается реализованная на ЭВМ типа IBM PC система аналитических вычислений АПАЛ-ПК [4] и рассматриваются некоторые ее применения.

Система АПАЛ-ПК состоит из двух главных частей: базовых средств и прикладных модулей. Базовые средства позволяют:

- записывать формулы в функциональных базисах {&,V,~,0,1}, {&,V,~,=>,<=>,0,1} и {+,*,0,1};
- применять заложенные в АПАЛ-ПК или определяемые пользователем системы отношений;
- выполнять основные преобразования булевых формул: вычислять значения, проверять эквивалентность, тождественную истинность или ложность формул, раскрывать скобки и выносить за скобки общие множители, упорядочивать формулы, применять соотношения и системы соотношений, производить подстановки формул вместо переменных и др.

Прикладные модули позволяют строить нормальные формы, решать булевы уравнения, процедурно применять определенные соотношения (например, a & b V b = b), они также реализуют некоторые прикладные алгоритмы.

В настоящее время рассматриваются следующие основные направления применения средств системы АПАЛ-ПК.

1. Автоматизация поиска логического вывода. Система АПАЛ-ПК предлагает достаточно богатые и выразительные средства для программирования процедур доказательства истинности пропозициональных формул. Средствами АПАЛ-ПК были, например, решены все тесты для автоматических доказателей теорем [1], относящиеся к алгебре логики. На это потребовалось от 2 до 5 с времени на ПЭВМ IBM PC (процессор 80286). Каждый тест потребовал обращения только к одному из операторов системы АПАЛ-ПК: упорядочения (с попутными упрощениями) и проверки эквивалентности.

Отметим, что в ряде случаев аналитические вычисления представляют собой более естественный и эффективный метод доказательства истинности пропозициональных формул, чем используемые в компьютерной логике методы. Показательной в этом смысле является так называемая U-проблема (тест 71) из [1]:

U1: (P1 <=> P1)

U2: (P1 <=> (P2 <=> (P1 <=> P2)))

U3: (P1     (P2 <=> (P3 <=> (P1 <=>(P2 <=> P3)))))

. . .

Un: (P1 <=> (P2 <=> (P3 <=> ... <=> (Pn <=> (P <<=> (P2 <=>
<=> ... <=> Pn)...)))))

Один из способов доказательства истинности формулы Ui с помощью АПАЛ-ПК заключается в упорядочении Ui (с учетом ассоциативности и коммутативности <=>) с попутным применением соотношения (x <=> x) =1. При этом экспериментально установленное время счета растет линейно с ростом n, что соответствует природе задачи. Кроме того, с каждым шагом сокращается занимаемая память. Использование же любой резолюционной стратегии приводит к экспоненциальному росту размера доказательства с ростом n [1], при этом еще приходится расходовать время и память на построение начального множества дизъюнктов, которое экспоненциально растет с увеличением n.

2. Автоматизация обучения булевой алгебре в соответствии с курсами для высших учебных заведений. На базе АПАЛ-ПК и инструментального комплекса для построения СУБД "Микропоиск" [5] разрабатывается автоматизированная обучающая система по алгебре логики АОС-АЛ. АОС-АЛ будет представлять собой компьютерный аналог задачника [6] (в части алгебры логики) с дополнительными возможностями по аналитическим вычислениям булевых формул в диалоговом режиме и построению индивидуальных обучающих курсов. С помощью АПАЛ-ПК были решены все примеры по алгебре логики из задачника [6], условия которых записываются в виде преобразования формул. Время решения самых сложных примеров не превышает 10 с на компьютере IBM PC (процессор 80286).

3. На базе АПАЛ-ПК были выполнены также некоторые эксперименты, связанные с аналитическими вычислениями булевых формул, возникающими в процессе функционального проектирования дискретных устройств.

*Литература*


1. PELLETIER F.J. Seventy-five Problems for Testing Automatic Theorem Provers //J.Automat. Reason. - 1986. - Vol. 2,N2, - P. 191-216.

2. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления /Под ред. Б.Бухбергера, Дж.Коллинза, Р.Лооса. - М.: Мир, 1986.

3. ДЭВЕНПОРТ Дж., СИРЭ И., ТУРНЬЕ Э. Компьютерная алгебра. - Мир, 1991.

4. КОЛЯДА С.В. Разработка и некоторые применения системы аналитических вычислений АПАЛ-ПК//Решение задач в интеллектуальных компьютерных средах. - Киев, 1991 (ИК АН Украины).

5. ГРЕЧКО В.О., ПЕРУНОВА Т.Л., ТОКАРЕВА Г.В. Средства разработки диалоговых систем для персональных компьютеров //Методы и средства алгебраического и логического программирования.- Киев, 1990 (ИК АН Украины).

6. ЛАВРОВ И.А., МАКСИМОВА Л.Л. Упражнения по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М.: Наука, 1984.

## НИЖНЯЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ РАСШИРЕННОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ СРАВНЕНИЙ ПОЛИНОМОВ ПО КОНСТАНТНОМУ МОДУЛЮ

Косовский Н.К., С.-Петербург

Установлена экспоненциального вида нижняя оценка числа шагов вычисления истинности индексно задаваемых систем формул элементарной теории сравнений полиномов по константному модулю.

В [1] доказана верхняя квадратичная оценка на максимальную используемую в процессе вычисления память, измеряемую относительно длины исходных данных для алгоритма, проверяющего истинность формул элементарной теории сравнения полиномов по константным модулям. Задача установления истинности этих формул является Р-СПЭЙС-полной.

Пусть Т - множество всех систем, возникающих из каждой такой бескванторной формулы с помощью введения одной переменной-неизвестной, списка индексов, каждый из которых (как и любая другая переменная, включая переменную-неизвестную) может являться переменной для натуральных чисел, не превосходящих заранее заданной конструкции. (В применении к персональному компьютеру эта константа равна $2^{16}-1$.) Все переменные, включая индексы, кодируются в трехбуквенном алфавите. Таким образом, в систему входят те и только те формулы, которые получаются из бескванторной формулы, содержащей переменную-неизвестную, посредством фиксации значений, не превосходящих некоторой константы, у всех переменных, включая индексы.

ТЕОРЕМА. *При всяком натуральном числе* H *и любом рациональном* A, *меньшем* 1/2, *алгоритм, проверяющий существование решения у любой системы из* T, *в которой число переменных* p *не превосходит числа индексов при переменной-неизвестной, не может выполнять-*