ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1992 год Выпуск 147

УДК 519.65

ОЦЕНКИ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ В-СПЛАЙНОВОЙ КОЛЛОКАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Ю.С.Волков

Введение

При изучении сплайнов произвольной степени,а также при их практическом использовании, наибольшее распространение получил способ представления сплайна в виде разложения по базису из В-сплайнов. Причиной тому послужило то, что В-сплайны обладают рядом прекрасных свойств: неотрицательность, финитность, простота рекуррентных формул для их вычисления. Естественно возникает необходимость изучения свойств коллокационной матрицы, т.е. матрицы системы уравнений относительно коэффициентов разложения сплайна по В-сплайнам, получаемой из условий интерполяции. Этому вопросу посвящены, например, работы [1,2].

В настоящей статье мы устанавливаем оценки числа обусловленности коллокационной матрицы через величину локальной характеристики сетки. Мы ограничимся рассмотрением периодического случая, причем предполагается, что точки интерполяции совпадают с узлами сплайна.

1. Определения и обозначения

Рассмотрим задачу интерполяции. По заданным в узлах сетки $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ значениям $f_i = f(x_i)$ периодической функции f периода $b-a$ требуется построить периодический интерполяционный сплайн S степени $2r+1$.

Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,1,\dots,N-1$; $\bar{h} = \max\limits_i h_i$. В качестве показателя неравномерности сетки будем использовать локальную сеточную характеристику

$$\rho_\Delta = \max_{|i-j|=1} \frac{h_i}{h_j}.$$

Продолжим разбиение Δ с периодом $b-a$ на всю ось $\mathbb{R}$, тогда В-сплайн $B_i(x)$ можно определить как разделенную разность $(2r+2)$-го порядка по значениям аргумента $t = x_{i-r-1}$, $x_{i-r},\dots,x_{i+r+1}$ функции $(x_{i+r+1} - x_{i-r-1})(t-x)_+^{2r+1}$, т.е.

$$B_i(x) = (x_{i+r+1} - x_{i-r-1})$$

$$(\cdot - x)_+^{2r+1}[x_{i-r-1}, x_{i-r}, \dots, x_{i+r+1}]. \qquad (1)$$

Функции $\tilde{B}_i(x) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} B_{i+mN}(x)$, $i = 1,2,\dots,N$, будем называть периодическими В-сплайнами.

При представлении сплайна $S(x)$ в виде

$$S(x) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \tilde{B}_i(x)$$

решение задачи интерполяции сводится к решению системы уравнений

$$A\bar{\beta} = \bar{f} \qquad (2)$$

с матрицей $A = [\tilde{B}_i(x_j)]_{i,j=1}^N$ и правой частью $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ относительно неизвестных $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T$.

Под числом обусловленности некоторой матрицы $C = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ понимаем величину $\mathrm{cond}(C) = \|C\| \cdot \|C^{-1}\|$, где

$$\|C\| = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |c_{ij}|$$

есть чебышевская норма матрицы C. Такая норма матрицы согласована с нормой $\|\bar{x}\| = \max_{1\le i\le N} |x_i|$ вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$.

Обозначим $\omega(g;h) = \sup\{|g(x)-g(y)| : |x-y| \le h\,;\ x,y \in [a,b]\}$ модуль непрерывности функции g на $[a,b]$, и, как обычно, $\|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|g(x)| : a \le x \le b\}$.

Пусть $\lambda_1(q), \lambda_2(q), \ldots, \lambda_{2r}(q)$ - нули обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса

$$\Pi_{2r+1}(\lambda;q) = \frac{1}{(q-1)^{2r+1}} \sum_{m=0}^{2r+1} (-1)^m \begin{bmatrix} 2r+1 \\ m \end{bmatrix} \prod_{\substack{i=0 \\ i\ne m}}^{2r+1} (q^i - \lambda),$$

пронумерованные в порядке убывания (известно [3], что все они вещественны, отрицательны, различны и $\lambda_m(q) \sim q^m$). Обозначим через ρ^* и $\bar{\rho}$ нули монотонных функций $1 + \lambda_r(q)$ и $1 + \lambda_r(q)\cdot q^{(r-1)(2r+1)}$ соответственно. Таблицы значений величин ρ^* и $\bar{\rho}$ для сплайнов до 17 степени можно найти в [4].

2. Оценки числа обусловленности

ТЕОРЕМА 1. *Для любой сетки* Δ *с локальной характеристикой* $\rho_\Delta \le \rho < \bar{\rho}$ *существует константа* K, *независящая от* Δ, *такая, что* $\operatorname{cond}(A) \le K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для любой сетки Δ выполнено $\|A\| = 1$, то достаточно оценить норму матрицы A^{-1}, элементы которой обозначим b_{ij}.

Пусть число i_0 такое, что

$$\|A^{-1}\| = \sum_{j=1}^{N} |b_{i_0 j}|.$$

Выберем периодическую функцию f так, чтобы выполнялись условия

$$f_j = \operatorname{sign} b_{i_0 j}, \quad j = 1,2,\dots,N. \tag{3}$$

При этом

$$\max_{1\le i\le N} |\beta_i| \ge |\beta_{i_0}| = \Big|\sum_{j=1}^{N} b_{i_0 j} f_j\Big| = \sum_{j=1}^{N} |b_{i_0 j}|,$$

т.е.

$$\| A^{-1} \| \le \|\bar\beta\|, \tag{4}$$

где $\bar\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T$ - вектор, компонентами которого являются коэффициенты разложения по В-сплайнам сплайна, интерполирующего $f(x)$.

В работе [5] показано, что при $\rho_\Delta \le \rho < \bar\rho$ норма оператора P_Δ, ставящего в соответствие интерполируемой функции интерполяционный сплайн на сетке Δ, ограничена некоторой константой K_1, не зависящей от сетки, т.е.

$$\| P_\Delta \| < K_1 .$$

В силу (3) и в соответствии [6] с неравенством

$$D\|\bar\beta\| \le \| S \|_\infty \le \|\bar\beta\|, \tag{5}$$

где константа D не зависит от Δ и N, имеем

$$\|\bar\beta\| \le D^{-1} \| S \|_\infty \le K \tag{6}$$

с константой $K = K_1/D$.

Теперь утверждение теоремы следует из (4) и (6).

ТЕОРЕМА 2. *Число обусловленности матрицы A системы уравнений (2) может быть как угодно большим, если локальная характеристика сетки $\rho_\Delta \ge \rho^*$.*

ЛЕММА. *Для* $f \in C[a,b]$ *справедлива оценка*

$$\| S-f \|_{\infty} \le (1+r+r\|A^{-1}\|)\omega(f;\bar{h}). \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы. Рассмотрим локально-аппроксимационный сплайн $S_L(x)$, у которого коэффициенты разложения по B-сплайнам равны соответствующим значениям исходной функции

$$S_L(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j \tilde{B}_j(x).$$

Запишем тождество $S(x) - f(x) = [S(x) - S_L(x)] + [S_L(x) - f(x)]$. Так как $\sum_{j=1}^{N} \tilde{B}_j(x) \equiv 1$, то

$$S_L(x)-f(x) = \sum_{j=1}^{N} [f_j - f(x)]\tilde{B}_j(x).$$

Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда

$$|S_L(x)-f(x)| =$$

$$= \left| \sum_{j=i-r}^{i+r+1} [f_j - f(x)]\tilde{B}_j(x) \right| \le (r+1)\omega(f;\bar{h}). \tag{8}$$

Из неравенства (5) имеем

$$\|S-S_L\|_{\infty} \le \|\bar{\beta} - \bar{f}\| , \tag{9}$$

а оценку величины $\|\bar{\beta} - \bar{f}\|$ получаем из системы уравнений $A(\bar{\beta}-\bar{f}) = \bar{f} - A\bar{f}$, эквивалентной системе (2):

$$\|\bar{\beta} - \bar{f}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \max_{1\le k\le N} \left| \sum_{j=k-r}^{k+r} (f_k - f_j)\tilde{B}_j(x) \right| \le$$

$$\le r\|A^{-1}\|\omega(f;\bar{h}). \tag{10}$$

Теперь оценка (7) следует из неравенств (8)-(10). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. В работе [7] автором показано, что существуют непрерывная функция f и последовательность сеток $\{\Delta_\nu\}$ с локальными характеристиками $\rho_{\Delta_\nu} \geq \rho^*$ такие, что $\|S-f\|_\infty \to \infty$ и $\bar{h} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Но в этом случае $\omega(f;\bar{h}) \to 0$, и, согласно доказанной лемме должна неограниченно возрастать соответствующая последовательность норм $\|A^{-1}\|$. Так как $\|A\| = 1$, то $\mathrm{cond}(A) \to \infty$ при $\nu \to \infty$. Теорема доказана.

Отметим, что данная теорема для кубических сплайнов была доказана в [8].

3. Численные эксперименты

В [8] приводятся числовые данные, показывающие рост числа обусловленности матрицы A для кубического сплайна при увеличении неравномерности сетки, состоящей из 12 узлов.

Нами проведен ряд численных экспериментов для сплайнов пятой степени $(r = 2)$. С помощью датчика случайных чисел были сгенерированы разбиения отрезка $[0,1]$ на 15 частей и 50. В первом случае $\rho_\Delta = 51$, а во втором - $\rho_\Delta = 68$. Обусловленности образуемых при этом коллокационных матриц получились равны 4107 и 37236 соответственно.

Кроме того, были вычислены обусловленности матриц для геометрических сеток, характеризуемых показателем геометричности ρ (табл. 1 и 2), которые использовались в [7] для построения примера расходимости, т.е. $\Delta:\ -1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1;$

$$h_i = h_{N-1-i}, \quad i = 0,1,\ldots,\left[\frac{N-1}{2}\right],$$

$$h_i = \frac{1}{\rho} h_{i+1}, \quad i = 0,1,\ldots,\left[\frac{N-3}{2}\right],$$

$$\rho_\Delta = \rho.$$

Таблица 1

ρ	N		
	20	60	100
1.0	7.5	7.5	7.5
1.2	11.4	11.6	11.6
1.3	17.2	19.8	19.8
1.38	27.1	54.1	58.9
1.4	30.9	74.9	101
1.41	33.1	92.8	142

Таблица 2

ρ	N		
	20	60	100
1,42	35.6	117	211
1.43	38.2	150	328
1.5	65.7	$1.3\cdot 10^3$	$1.9\cdot 10^4$
1.6	155	$4.7\cdot 10^4$	$1.4\cdot 10^7$
2.0	$5.7\cdot 10^3$	$3.9\cdot 10^{10}$	$1.7\cdot 10^{17}$

Табл. 1 и 2 показывают, что если $\rho \geq \rho^* \approx 1.4164$, то $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$ начинает неограниченно расти с ростом $\mathbf{N}$.

Заключение

Ранее вопрос об устойчивом решении системы уравнений (2) рассматривался только для кубического сплайна. В [8] приводится оценка

$$\rho_\Delta < (1 + \sqrt{13})/2, \tag{11}$$

гарантирующая хорошую обусловленность коллокационной матрицы $\mathbf{A}$, причем (11) получена из условия диагонального преобладания в матрице $\mathbf{A}$. Теорема 1 улучшает оценку (11), так как для кубических сплайнов $\bar{\rho} = (3 + \sqrt{5})/2$.

Для сплайнов же более высоких степеней такое исследование не проводилось, хотя большинство современных монографий и руководств по сплайнам ограничиваются рассмотрением лишь метода построения сплайна, основанного на решении системы уравнений (2). Однако, так как числа ρ^* и $\bar{\rho}$ с ростом степени сплайна быстро убывают [4], стремясь к 1, то гарантировать устойчивое решение системы (2) для сплайнов высоких степеней можно только на почти равномерных сетках. Построение интерполяционного сплайна на существенно неравномерных сетках,используя решение системы уравнений с B-сплайн-коллокационной матрицей может привести к большой потери точности.

Литература

1. LEE S.L., MICCHELLI C.A., SHARMA A., SMITH P.W. Some properties of periodic B-spline collocation matrices //Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. - 1983. - Vol.94A, N 3-4.- P.235-246.

2. DE BOOR C. Total positivity of the spline collocation matrix //Indiana Univ. Math. J. - 1976. - Vol.25, N6. - P.541-551.

3. FENG Y.Y., KOZAK J. On generalized Euler-Frobenius polynomial //J.approxim. theory. - 1981. - Vol.32, N4.-P.327-338.

4. ВОЛКОВ Ю.С. О сходимости интерполяционных сплайнов в терминах локальной сеточной характеристики //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1988. - Вып. 128: Вычислительные системы. - С. 32-38.

5. FRIEDLAND S., MICCHELLI C.A. Bounds on solutions of difference equations and spline interpolation at knots //Linear algebra and its appl. - 1978. - Vol.20, N3. -P.219-251.

6. DE BOOR C. On uniform approximation by splines //J.approxim. theory. - 1968. - Vol.1, N2. -P. 219-235.

7. ВОЛКОВ Ю.С. Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1984. - Вып. 106: Вычислительные системы. -С. 41-56.

8. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

20 октября 1992 года