ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1992 год Выпуск 147

УДК 519.651

ВЫПУКЛОСТЬ И МОНОТОННОСТЬ КУБИЧЕСКОЙ ЛОКАЛЬНОЙ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

В.Л.Мирошниченко

Введение

В [1] (см.также перевод этой работы на английский язык [2]) рассматривалась задача о монотонной и выпуклой интерполяции кубическими сплайнами класса C^2. В последнее время при решении практических задач наряду с интерполяционными широко используются локально-аппроксимационные кубические сплайны [3-7]. Целью данной статьи является исследование условий монотонности и выпуклости различных видов локальной кубической сплайн-аппроксимации. Явный характер формул локальной аппроксимации позволяет получить в этом направлении существенно более полные результаты по сравнению с интерполяционным случаем. В частности, не вызывает затруднений рассмотрение локальных постановок задач монотонной и выпуклой аппроксимации.

Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется разбиение (сетка)

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

Дополним его узлами x_j, $j = -3,-2,-1,N+1,N+2,N+3$, так что $x_{-3} \le x_{-2} \le x_{-1} \le x_0$; $x_N \le x_{N+1} \le x_{N+2} \le x_{N+3}$. Расширенное таким образом разбиение Δ обозначим через $\tilde{\Delta}$.

Любой кубический сплайн $S(x)$ класса C^2 на сетке Δ может быть представлен в виде

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i B_i(x) \quad , \tag{1}$$

где $B_i(x) \in C^2$ - кубические нормализованные B-сплайны [3], т.е.

$$\text{supp}B_i(x) = [x_{i-2}, x_{i+2}], \quad \sum_{i=-1}^{N+1} B_i(x) \equiv 1, \quad x \in [a,b]. \tag{2}$$

В дальнейшем часто будут использоваться формулы:

$$\left.\begin{aligned} B_{j-1}(x_j) &= \frac{\lambda_j h_j}{h_{j-2} + h_{j-1} + h_j}, \\ B_{j+1}(x_j) &= \frac{\mu_j h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j + h_{j+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$B'_{j-1}(x_j) = \frac{-3B_{j-1}(x_j)}{h_j}, \quad B'_{j+1}(x_j) = \frac{3B_{j+1}(x_j)}{h_{j-1}}, \tag{4}$$

$$B''_{j-1}(x_j) = \frac{6\, B_{j-1}(x_j)}{h_j^2}, \quad B''_{j+1}(x_j) = \frac{6\, B_{j+1}(x_j)}{h_{j-1}^2}, \tag{5}$$

где $h_j = x_{j+1} - x_j$, $\lambda_j = h_j/(h_{j-1}+h_j)$, $\mu_j = 1 - \lambda_j$.

Введем также нормализованные параболические B-сплайны $B^2_{i-1/2}(x)$, $i = 0, \ldots, N+1$; $\text{supp}\, B^2_{i-1/2} = [x_{i-2}, x_{i+1}]$ и B-сплайны первой степени $B^1_i(x), i = 0, \ldots, N$; $\text{supp}\, B^1_i(x) = [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Согласно формулам дифференцирования B-сплайнов [3] из (1) имеем

$$S'(x) = 3\sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i^{(1)} B^2_{i-1/2}(x), \tag{6}$$

$$S''(x) = 6 \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^{(2)} B_i^1(x) , \tag{7}$$

где

$$\alpha_i^{(1)} = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-2}} , \tag{8}$$

$$\alpha_i^{(2)} = \frac{\alpha_{i+1}^{(1)} - \alpha_i^{(1)}}{x_{i+1} - x_{i-1}} =$$

$$= \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left\{ \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{x_{i+2} - x_{i-1}} - \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-2}} \right\} . \tag{9}$$

Большинство приводимых в статье результатов выводится с помощью следующих двух лемм о свойствах сплайнов вида (1).

ЛЕММА 1. *Если для некоторого* $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ *выполнены условия* $\alpha_{i-1} \le \alpha_i \le \alpha_{i+1} \le \alpha_{i+2}$ *, то* $S'(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая финитность параболических В-сплайнов, из (6) при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S'(x) = 3 \sum_{k=i}^{i+2} \alpha_k^{(1)} B_{k-1/2}^2(x) .$$

Требуемый результат вытекает теперь из предположения леммы, формулы (8) и неотрицательности В-сплайнов.

ЛЕММА 2. *Для того, чтобы при некотором* $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ *выполнялось неравенство* $S''(x) \ge 0$ *,* $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-2}} \le \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{x_{i+2} - x_{i-1}} \le \frac{\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}}{x_{i+3} - x_i} . \tag{10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (7) при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S''(x) = 6\alpha_i^{(2)} B_i^1(x) + 6\alpha_{i+1}^{(2)} B_{i+1}^1(x).$$

Отсюда ясно, что для того, чтобы при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ было выполнено неравенство $S''(x) \geq 0$, необходимо и достаточно выполнения соотношений $\alpha_i^{(2)} \geq 0$, $\alpha_{i+1}^{(2)} \geq 0$, которые, как это видно из (9), эквивалентны неравенствам (10).

Пусть в узлах сетки Δ заданы значения $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,N$, функции $f(x)$. Символом $f[x_k, x_{k+1},\ldots, x_{k+n}]$ будем обозначать n-ю разделенную разность по узлам $x_k,\ldots, x_{k+n}$. Данные f_i, $i = k,\ldots, k+m$; $k \geq 0$, $k+m \leq N$, называются монотонно возрастающими, если выполнены условия $f_k \leq f_{k+1} \leq \ldots \leq f_{k+m}$ или в терминах первых разделенных разностей $f[x_i, x_{i+1}] \geq 0$, $i = k,\ldots, k+m-1$. Данные f_i, $i = k,\ldots, k+m$, называются выпуклыми (выпуклыми вниз), если $f[x_{i+1}, x_i] \geq f[x_i, x_{i-1}]$, $i = k+1,\ldots, k+m-1$, или в терминах вторых разделенных разностей $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \geq 0$, $i = k+1,\ldots, k+m-1$. Нас будут интересовать условия, при которых локальная аппроксимация кубическими сплайнами,построенная по монотонным (выпуклым) исходным данным,будет соответственно монотонной (выпуклой). Все результаты в статье формулируются для монотонно возрастающих и выпуклых вниз данных $\{f_i\}$. Соответствующие утверждения для монотонно убывающих и выпуклых вверх данных получаются заменой знаков неравенств на противоположные.

§1. Монотонность и выпуклость простейшей локальной аппроксимации

Простейшая формула локальной аппроксимации получается,когда в (1) коэффициенты α_i определяются соотношениями

$$\alpha_i = f_i, \quad i = 0,\ldots, N. \tag{11}$$

Для нахождения оставшихся свободными коэффициентов α_{-1}, α_{N+1} воспользуемся, как это предложено в [8,9], условиями интерполяции

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 0,N, \tag{12}$$

в точках x_0, x_N, которые эквивалентны уравнениям

$$\alpha_{j-1}B_{j-1}(x_j) + \alpha_j B_j(x_j) + \alpha_{j+1}B_{j+1}(x_j) = f_j, \tag{13}$$
$$j = 0,N.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$f_0 - \alpha_{-1} = (\alpha_0 - f_0)\,\frac{B_0(x_0)}{B_{-1}(x_0)} + (\alpha_1 - f_0)\,\frac{B_1(x_0)}{B_{-1}(x_0)}, \tag{14}$$

$$\alpha_{N+1} - f_N = (f_N - \alpha_N)\,\frac{B_N(x_N)}{B_{N+1}(x_N)} + (f_N - \alpha_{N-1})\,\frac{B_{N-1}(x_N)}{B_{N+1}(x_N)}. \tag{15}$$

Теперь, принимая во внимание (11), имеем

$$\alpha_{-1} = f_0 - (f_1 - f_0)B_1(x_0)/B_{-1}(x_0), \tag{16}$$

$$\alpha_{N+1} = f_N + (f_N - f_{N-1})B_{N-1}(x_N)/B_{N+1}(x_N). \tag{17}$$

Отметим, что в зарубежной литературе (см.,напр, [5]) дополнительные узлы обычно берут кратными - совпадающими с концами отрезка $[a,b]$, а именно: $x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = a$; $x_{N+1} = x_{N+2} = x_{N+3} = b$. В этом случае $B_1(x_0) = B_{N-1}(x_N) = 0$ и из (16), (17) получаем $\alpha_{-1} = f_0$, $\alpha_{N+1} = f_N$. Тем самым кратные дополнительные узлы позволяют определить все коэффициенты α_j, $j = -1,\ldots,N+1$, единым способом по формуле (11) (так как $f_{-1} = f(x_{-1}) = f_0$, $f_{N+1} = f(x_{N+1}) = f_N$) и автоматически обеспечивают интерполяцию на концах отрезка $[a,b]$. Однако, использование кратных узлов не всегда целесообразно. Например, когда сетка Δ равномерная с шагом h, то употребление кратных дополнительных узлов влечет снижение порядка точности аппроксимации сплайном по сравнению со случаем равномерной расширенной сетки $\tilde{\Delta}$ [10].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (11),(16),(17). *Тогда:*

а) если $f_{i-1} \le f_i \le f_{i+1} \le f_{i+2}$, $i \in \{1,\dots,N-2\}$, *то* $S'(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_i, x_{i+1}]$;

б) если $f_0 \le f_1 \le f_2$, *то* $S'(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_0, x_1]$;

в) если $f_{N-2} \le f_{N-1} \le f_N$, *то* $S'(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_{N-1}, x_N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение "а" прямо следует из леммы 1. Для доказательства утверждения "б" достаточно также воспользоваться этой леммой и учесть, что из (16), (11) вытекает $\alpha_0 - \alpha_{-1} = (f_1 - f_0)B_1(x_0)/B_{-1}(x_0) \ge 0$, т.е. $\alpha_0 \ge \alpha_{-1}$. Аналогичным образом, из (17),(11) и леммы 1 вытекает утверждение "в".

Таким образом, если данные f_k, $k = i-1, i, i+1, i+2$, монотонные, то согласно теореме 1 гарантируется монотонность простейшей сплайн-аппроксимации на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, иными словами, при $f[x_i, x_{i+1}] \ne 0$ имеет место равенство

$$\operatorname{sign} S'(x) = \operatorname{sign} f[x_i, x_{i+1}], \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{18}$$

Если же $f_{i-1} \le f_i \le f_{i+1} \ge f_{i+2}$, то на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ знак $S'(x)$ может меняться. Вообще говоря, в большинстве ситуаций такое поведение сплайна представляется естественным. Например, пусть $f_{i-1} < f_i = f_{i+1} > f_{i+2}$. Логично считать, что эти сеточные значения соответствуют гладкой функции $f(x) \not\equiv f_i$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, т.е. максимальное значение $f(x)$ достигается внутри отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Поэтому изменение знака $S'(x)$ с плюса на минус на этом отрезке вполне соответствует поведению $f(x)$. Вместе с тем, если по каким-либо причинам желательно выполнение соотношения (18) при $f_{i-1} < f_i < f_{i+1} > f_{i+2}$, то этого можно добиться следующим способом. Введем в сетку Δ узел $x^*_{i+1} = x_{i+1} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, с соответствующим сеточным значением $f^*_{i+1} = f_{i+1}$. Тогда по теореме 1 для $S(x)$ будет иметь место равенство (18) и, кроме того, как нетрудно видеть, $S(x_{i+1}) \approx f_{i+1}$. Впрочем, можно положить $\varepsilon = 0$, т.е. считать узел x_{i+1} кратным. В этом случае вместе с (18) выполняется условие интерполяции $S(x_{i+1}) = f_{i+1}$, но следует примириться с разрывом производной $S''(x)$ в узле x_{i+1}. Наконец, заметим, что горизонтальный участок на $[x_i, x_{i+1}]$ при $f_i = f_{i+1}$ можно получить, если оба узла x_i, x_{i+1} считать кратными.

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $f_0 \le f_1 \le \ldots \le f_N$ *и коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (11),(16),(17), *то* $S'(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$.

Утверждения теоремы 1 и следствия 1 позволяют сделать вывод о том, что простейшая формула локальной аппроксимации с "краевыми" условиями (12) сохраняет свойство монотонности исходных сеточных данных на произвольной сетке и при произвольном расположении дополнительных узлов.

Наряду с (12) можно использовать и традиционные для интерполяционных кубических сплайнов краевые условия типа I:

$$S'(x_j) = f'_j, \quad j = 0,N; \tag{19}$$

или типа II:

$$S''(x_j) = f''_j, \quad j = 0,N. \tag{20}$$

Из уравнений, эквивалентных этим условиям

$$\alpha_{j-1}B^{(r)}_{j-1}(x_j)+\ \alpha_j B^{(r)}_j(x_j)+\ \alpha_{j+1}B^{(r)}_{j+1}(x_j)=\ f^{(r)}_j\ , \tag{21}$$

$$j\ =\ 0,N,$$

где r = 1 или r = 2, находим

$$\alpha_{-1}=\ \alpha_0+(\alpha_0-\alpha_1)\ \frac{B^{(r)}_1(x_0)}{B^{(r)}_{-1}(x_0)}\ +\ \frac{f^{(r)}_0}{B^{(r)}_{-1}(x_0)}\ , \tag{22}$$

$$\alpha_{N+1}=\ \alpha_N+(\alpha_N-\alpha_{N-1})\ \frac{B^{(r)}_{N-1}(x_N)}{B^{(r)}_{N+1}(x_N)}\ +\ \frac{f^{(r)}_N}{B^{(r)}_{N+1}(x_N)}\ . \tag{23}$$

Отметим любопытный факт совпадения формул (22),(23) и (16),(17) при так называемых естественных краевых условиях $S''(x_0) = S''(x_N) = 0$, когда сетка $\tilde{\Delta}$ равномерна, т.е. в этом случае естественные краевые условия эквивалентны требованиям интерполяции в узлах x_0, x_N.

Из (22),(23), используя лемму 1 и соотношения (3)-(5), (11), легко вывести условия монотонности простейшей локальной аппроксимации при краевых условиях типов I и П. Очевидно, они будут отличаться от результатов теоремы 1 только на отрезках $[x_0,x_1]$, $[x_{N-1},x_N]$.

Если $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям типа I, то при $f_0 \le f_1 \le f_2$ и

$$f'_0\ \ge 3\mu_0 h_0 f[x_0,x_1]/(h_{-1}+\ h_0+\ h_1) \tag{24}$$

имеем $S'(x) \ge 0$, $x \in [x_0,x_1]$; при $f_{N-2} \le f_{N-1} \le f_N$ и

$$f'_N\ \ge 3\lambda_N h_{N-1} f[x_{N-1},x_N]/(h_{N-2}+\ h_{N-1}+\ h_N) \tag{25}$$

имеем $S'(x) \ge 0$, $x \in [x_{N-1},x_N]$.

Для граничных условий типа П условия (24),(25) нужно заменить соответственно неравенствами

$$6\lambda_0 f[x_0,x_1] - (h_{-1}+h_0+h_1)f''_0 \geq 0,$$

$$6\mu_N f[x_{N-1},x_N] + (h_{N-2}+h_{N-1}+h_N)f''_N \geq 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об условиях выпуклости простейшей локальной аппроксимации.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (11), (16), (17). *Тогда*

а) для того, чтобы выполнялось условие $S''(x) \geq 0$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{1, \ldots, N-2\}$, *необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{x_{i+3}-x_i} \geq \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+2}-x_{i-1}} \geq \frac{f_i-f_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-2}} \quad ; \tag{26}$$

б) для того, чтобы выполнялось условие $S''(x) \geq 0$, $x \in [x_0, x_1]$, *необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$\frac{f_2-f_1}{x_3-x_0} \geq \frac{f_1-f_0}{x_2-x_{-1}}, \qquad h_{-1} \leq h_0; \tag{27}$$

в) для того, чтобы выполнялось условие $S''(x) \geq 0$, $x \in [x_{N-1}, x_N]$, *необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$\frac{f_N-f_{N-1}}{x_{N+1}-x_{N-2}} \geq \frac{f_{N-1}-f_{N-2}}{x_N-x_{N-3}}, \quad h_N \leq h_{N-1}. \tag{28}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение "а" вытекает из леммы 2. Далее, из (16) и (3) имеем

$$\frac{f_0 - \alpha_{-1}}{x_1 - x_{-2}} = \left(\frac{h_{-1}}{h_0}\right)^2 \frac{f_1 - f_0}{x_2 - x_{-1}} .$$

Отсюда и из леммы 2 вытекает утверждение "б". Точно также доказывается и утверждение "в".

Из теоремы 2 видно, что влияние краевых условий (12) ограниченно отрезками $[x_0, x_1], [x_{N-1}, x_N]$. То же самое верно в отношении краевых условий типа I и П. Для краевых условий типа I ограничения $h_{-1} \le h_0$, $h_N \le h_{N-1}$ следует заменить соответственно неравенствами:

$$\frac{f_1 - f_0}{x_2 - x_{-1}} \ge \frac{1}{3} f_0', \quad \frac{f_N - f_{N-1}}{x_{N+1} - x_{N-2}} \le \frac{1}{3} f_N',$$

а для краевых условий типа П неравенствами: $f_0'' \ge 0$, $f_N'' \ge 0$.

Простейшая локальная аппроксимация не всегда сохраняет выпуклость исходных сеточных данных. Действительно, пусть выполнены неравенства

$$f[x_{i+1}, x_{i+2}] \ge f[x_i, x_{i+1}] \ge f[x_{i-1}, x_i] , \qquad (29)$$

что означает выпуклость данных f_j, $j = i-1, i, i+1, i+2$.
Запишем условия (26) в виде

$$\frac{h_{i+1} f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i} \ge \frac{h_i f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_{i-1}} \ge \frac{h_{i-1} f[x_{i-1}, x_i]}{x_{i+1} - x_{i-2}} .$$

Очевидно эти неравенства не вытекают из (29) для случая произвольной сетки. Иначе обстоит дело на равномерной сетке. В частности имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть сетка* $\tilde{\Delta}$ *равномерная. Если* $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \ge 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, *и коэффициенты* α_i *в* (*1*) *определены формулами* (*11*), (*16*), (*17*), *то* $S''(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$.

Кстати, утверждение следствия теряет силу, если равномерная сетка Δ расширена кратными узлами. Это еще один довод против использования кратных узлов на концах промежутка $[a, b]$.

Отметим, что результаты теорем 1,2, относящиеся к внутренней части $[a,b]$ - отрезку $[x_1, x_{N-1}]$, содержатся в [4]. В данной статье эти результаты дополнены анализом краевых условий, с выбором которых неизбежно приходится иметь дело при практическом использовании локальной аппроксимации.

В заключение параграфа приведем пример, наглядно иллюстрирующий некоторые свойства простейшей локальной аппроксимации на неравномерной сетке. Пусть $f(x) = x$ и узлы сетки x_j, $j = i-3, i-2, \ldots, i+4$, таковы, что $h_{i-2} = h_i = h_{i+2} = h$, $h_{i-3} = h_{i-1} = h_{i+1} = h_{i+3} = H$, причем $h = \alpha H$, , где $\alpha < 1$. Используя формулы (1)-(5), имеем

$$S(x_j) = x_j + \varphi(\alpha)h, \quad S''(x_j) = -12\varphi(\alpha)/H, \quad j = i, i+2;$$

$$S(x_{i+1}) = x_{i+1} - \varphi(\alpha)h, \quad S''(x_{i+1}) = 12\varphi(\alpha)/H,$$

где $\varphi(\alpha) = (1-\alpha)/[(1+2\alpha)(2+\alpha)]$. Собственно, уже из этих выражений видно, что локальная аппроксимация не сохраняет выпуклости исходных данных, так как $S''(x_i)$ и $S''(x_{i+1})$ имеют разные знаки при любом $\alpha < 1$.

Воспользовавшись представлением кубического сплайна класса C^2 через узловые значения сплайна и его второй производной, находим:

при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$S(x) = x + (1-2t)[1 + 2t(1-t)\alpha]\varphi(\alpha)h,$$

$$S'(x) = 1 - 2[1 - \alpha + 6\alpha t(1-t)]\varphi(\alpha),$$

$$S''(x) = -12(1-2t)\varphi(\alpha)/H, \quad t = (x - x_i)/h;$$

при $x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$

$$S(x) = x - (1-2t)[\alpha + 2t(1-t)]\varphi(\alpha)H,$$

$$S'(x) = 1 - 2[1 - \alpha - 6t(1-t)]\varphi(\alpha),$$

$$S''(x) = 12(1-2t)\varphi(\alpha)/H, \quad t = (x - x_{i+1})/H.$$

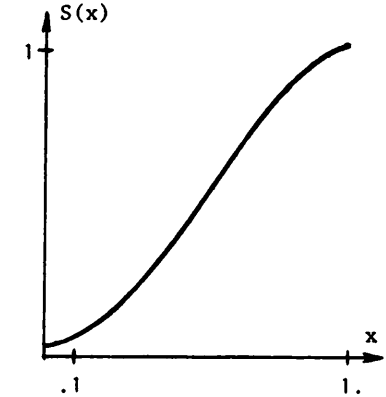

Рис. 1

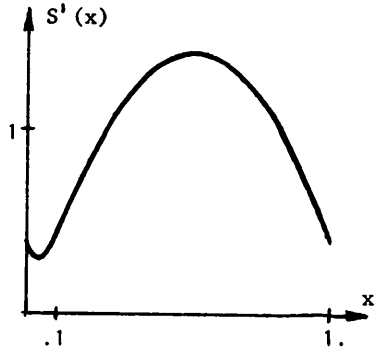

Рис. 2

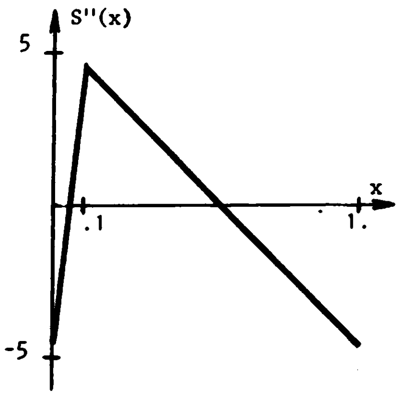

Рис. 3

На рис.1-3 изображены графики $S(x)$, $S'(x)$ и $S''(x)$ для сетки с параметрами $h = .1$, $H = .9$, $\alpha = 1/9$. В полном соответствии с теоремой 1 сплайн монотонен. Однако его поведение вряд ли вызывает приятные эмоции, если вспомнить, что аппроксимируется функция $f(x) = x$. Все неприятные эффекты объясняются нарушением условий выпуклости простейшей локальной аппроксимации на неравномерной сетке. Для равномерной сетки ($\alpha = 1$) имеем $S(x) \equiv x$.

§2. Монотонность и выпуклость локальной аппроксимации, точной на полиномах первой степени

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. Положим в (1)

$$\alpha_i = f(\xi_i), \quad i = 0,\dots,N, \tag{30}$$

где $\xi_i = (x_{i-1}+x_i+x_{i+1})/3 = x_i+(h_i-h_{i-1})/3$. Для того, чтобы все точки ξ_i попадали на отрезок $[a,b]$ будем предполагать выполненными условия $h_{-1} \le h_0$, $h_N \le h_{N-1}$. Отметим, что

$$\xi_i - \xi_{i-1} = (h_{i-2}+h_{i-1}+h_i)/3 = (x_{i+1} - x_{i-2})/3, \tag{31}$$

т.е. $\xi_i > \xi_{i-1}$, $i = 1,2,\dots,N$.

Коэффициенты α_{-1}, α_{N+1} определим из условий интерполяции (12) по формулам (14),(15). Локальная аппроксимация с коэффициентами, заданными равенствами (30), (14), (15) точна на полиномах первой степени (т.е., если $f(x)$ - полином первой степени, то $S(x) \equiv f(x)$) [1,5]. В случае, когда сетка $\tilde{\Delta}$ равномерная, то $\xi_i = x_i$, $i = 0,\dots,N$, и введенная локальная аппроксимация совпадает с простейшей локальной аппроксимацией, рассмотренной выше.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (30),(14),(15). *Тогда*

а) если $f(\xi_{i-1}) \le f(\xi_i) \le f(\xi_{i+1}) \le f(\xi_{i+2})$, $i \in \{1,\dots,N-2\}$, *то* $S'(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_i,x_{i+1}]$;

б) если $f_0 \le f(\xi_0) \le f(\xi_1) \le f(\xi_2)$, *то* $S'(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_0,x_1]$;

в) если $f(\xi_{N-2}) \le f(\xi_{N-1}) \le f(\xi_N) \le f_N$, *то* $S'(x) \ge 0$, *при* $x \in [x_{N-1},x_N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение "а" следует из леммы 1. Для доказательства утверждения "б" согласно этой же лемме достаточно показать, что $\alpha_0 \geq \alpha_{-1}$. Из (30) и условий теоремы имеем $\alpha_1 - f_0 \geq 0$, $\alpha_0 - f_0 \geq 0$. Тогда из (14) следует $f_0 \geq \alpha_{-1}$ и так как $\alpha_0 = f(\xi_0) \geq f_0$, то $\alpha_0 \geq \alpha_{-1}$, что и требовалось. Аналогично доказывается утверждение "в".

Для краевых условий типов I,П совокупность коэффициентов α_i определяется формулами (30), (22), (23). В случае краевых условий типа I неравенства $f_0 \leq f(\xi_0)$ и $f(\xi_N) \leq f_N$ в пп. "б" и "в" теоремы 3 нужно заменить соответственно ограничениями

$$f'_0 \geq \mu_0 f[\xi_0, \xi_1], \quad f'_N \geq \lambda_N f[\xi_{N-1}, \xi_N]. \tag{32}$$

Для краевых условий типа П вместо (32) возникают неравенства

$$\left.\begin{aligned} &2\lambda_0 f[\xi_0, \xi_1] \geq h_0 f''_0, \\ &2\mu_N f[\xi_{N-1}, \xi_N] \geq -h_{N-1} f''_N. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Следующая теорема характеризует свойства выпуклости локальной аппроксимации, точной на полиномах первой степени.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (30), (14), (15). *Тогда*

а) *если* $i \in \{1, \ldots, N-2\}$

$$f[\xi_{i-1}, \xi_i] \leq f[\xi_i, \xi_{i+1}] \leq f[\xi_{i+1}, \xi_{i+2}], \tag{34}$$

то $S''(x) \geq 0$ *при* $x \in [x_i, x_{i+1}]$;

б) *если*

$$f[\xi_0, \xi_1] \leq f[\xi_1, \xi_2], \tag{35}$$

$$f(\xi_0) - f_0 \leq (\xi_0 - x_0) f[\xi_0, \xi_1], \tag{36}$$

то $S''(x) \geq 0$ *при* $x \in [x_0, x_1]$;

в) *если*

$$f[\xi_{N-2}, \xi_{N-1}] \le f[\xi_{N-1},\xi_N], \tag{37}$$

$$f_N - f(\xi_N) \le (x_N - \xi_N) f[\xi_{N-1},\xi_N], \tag{38}$$

то $S''(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_{N-1}, x_N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 для справедливости неравенства $S''(x) \ge 0$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{1, \ldots, N-2\}$, достаточно выполнения условий

$$\frac{f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-2}} \le \frac{f(\xi_{i+1})-f(\xi_i)}{x_{i+2}-x_{i-1}} \le \frac{f(\xi_{i+2})-f(\xi_{i+1})}{x_{i+3}-x_i} .$$

Учитывая (19), получаем, что эти условия эквивалентны неравенствам (34).

Рассмотрим теперь п. "б" теоремы. Так же как в п. "а" в силу условия (35) имеет место неравенство $\dfrac{\alpha_1-\alpha_0}{x_2-x_{-1}} \le \dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{x_3-x_0}$.

Остается показать, что $\dfrac{\alpha_0-\alpha_{-1}}{x_1- x_{-2}} \le \dfrac{\alpha_1-\alpha_0}{x_2-x_{-1}}$. Подставляя сюда выражение для α_{-1} из (14) и учитывая (30), несложно убедиться, что это неравенство эквивалентно условию (36). Аналогичным образом доказывается утверждение "в".

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $h_{-1} = h_0$, $h_N = h_{N-1}$, то условия (36), (38) заведомо выполняются.

Для краевых условий типа I вместо (36) и (38) возникают неравенства

$$f[\xi_0,\xi_1] \ge f'_0,\ f[\xi_{N-1},\xi_N] \le f'_N , \tag{39}$$

а в случае краевых условий типа П приходим к естественным ограничениям

$$f_0'' \geq 0, \quad f_N'' \geq 0. \tag{40}$$

Напомним, что непрерывная функция $f(x)$, $x \in [a,b]$, называется выпуклой, если $f[\eta_1, \eta_2, \eta_3] \geq 0$ при всех $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in [a,b]$, $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$. Если $f(x) \in C^2$, то это определение выпуклости эквивалентно условию $f''(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$.

Замечательным качеством локальной аппроксимации, точной на полиномах первой степени, является в определенном смысле полное сохранение свойств монотонности и выпуклости аппроксимируемой функции. Имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (30), (14), (15). *Если* $f(x)$ *- монотонная на* $[a,b]$ *функция, то* $S'(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. *Если* $f(x)$ *выпуклая на* $[a,b]$ *функция, то* $S''(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$.

Так как из условия $f''(x) \geq 0$ вытекают соотношения (39), (40), то при аппроксимации выпуклой функции $f(x) \in C^2$ выпуклость аппроксимационного сплайна $S(x)$ гарантируется и для краевых условий типов I и П.

Если учесть, что локальная аппроксимация, точная на полиномах первой степени, помимо сохранения свойств монотонности и выпуклости, дает точность аппроксимации $O(H^2)$, $H = \max\limits_i h_i$, на любой неравномерной сетке [11], то это делает ее весьма привлекательным методом аппроксимации. Однако в практических задачах, когда известны только сеточные значения функции $f(x)$, непосредственное применение такой аппроксимации невозможно. В этой ситуации рекомендуется действовать следующим образом. По исходным данным $f_i, i = 0, \ldots, N$, на сетке Δ построим интерполяционный сплайн первой степени $S_1(x)$. Затем при построении кубической сплайн-аппроксимации будем вместо формул

(30) использовать соотношения $\alpha_i = S_1(\xi_i)$, $i = 0, \ldots, N$. Нетрудно видеть, что в этом случае имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f[x_i, x_{i+1}], \text{ если } h_i \ge h_{i-1}; \\ \alpha_i &= f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f[x_{i-1}, x_i], \text{ если } h_i \le h_{i-1}; \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

$$i = 0, \ldots, N,$$

(предполагается, конечно, что $h_0 \ge h_{-1}$, $h_N \le h_{N-1}$). Коэффициенты $\alpha_{-1}, \alpha_{N+1}$ по-прежнему находим, либо из условий интерполяции (11), либо из краевых условий типа I или П. Отметим, что вместо пары формул (41) можно использовать выражение вида

$$\alpha_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{6}\{[1+\operatorname{sign}(h_i - h_{i-1})]f[x_i, x_{i+1}] + [1-\operatorname{sign}(h_i - h_{i-1})]f[x_{i-1}, x_i]\}, \qquad (42)$$

$$i = 0, \ldots, N.$$

Опираясь на теоремы 3,4 и свойства сплайна $S_1(x)$, можно утверждать, что, построенная таким образом локальная кубическая сплайн-аппроксимация сохраняет монотонность и выпуклость сеточных данных. Кроме того, эта аппроксимация, очевидно, точна на полиномах первой степени и имеет точность $O(H^2)$ [11].

В практических приложениях важно иметь локальные критерии монотонности и выпуклости в терминах исходных сеточных значений. Их легко вывести из теорем 3 и 4 (можно также воспользоваться леммами 1,2 в сочетании с формулами (42)). Степень локальности критериев монотонности и выпуклости определяется характером неравномерности сетки Δ, от которого зависит расположение точек ξ_i. Например, для того, чтобы сплайн

$S(x)$ с коэффициентами (42) был монотонен на $[x_i, x_{i+1}]$ при $i \in \{2, \dots, N-3\}$, достаточно, вообще говоря, выполнения неравенств $f_{i-2} \le f_{i-1} \le f_i \le f_{i+1} \le f_{i+2} \le f_{i+3}$. Однако если $h_{i-2} \le h_{i-1}$ и $h_{i+2} \le h_{i+1}$, то достаточно потребовать выполнения только неравенств $f_{i-1} \le f_i \le f_{i+1} \le$ $\le f_{i+2}$. Также, как это предлагалось в случае простейшей аппроксимации, для ограничения влияния данных, расположенных вне отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ можно применять тактику введения в сетку Δ дополнительных узлов. В частности, если пополнить Δ произвольными узлами $x^*_{i-1} \in (x_{i-1}, x_i), x^*_{i+1} \in (x_{i+1}, x_{i+2})$ и доопределить набор сеточных значений величинами $S_1(x^*_{i-1})$, $S_1(x^*_{i+1})$, то очевидно при любой исходной сетке для моно - тонности сплайна с коэффициентами (42) достаточно условий $f_{i-1} \le f_i \le f_{i+1} \le f_{i+2}$.

В целом, кубическая локальная аппроксимация на основе формул (42) обладает рядом замечательных свойств, которые делают ее достаточно универсальным, и одновременно простым и надежным методом приближения.

§3. Монотонность и выпуклость локальной аппроксимации, точной на кубических полиномах

Пусть в (1)

$$\alpha_i = f_i + \frac{1}{3}\left(\lambda_i h_i f[x_{i-1}, x_i] - \mu_i h_{i-1} f[x_i, x_{i+1}]\right), \qquad (43)$$

$$i = 1, \dots, N-1.$$

Определив оставшиеся свободными коэффициенты α_{-1}, α_0 α_N, α_{N+1} (в дальнейшем для краткости эти коэффициенты называются граничными) из условий интерполяции

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, N-1, N, \qquad (44)$$

т.е. из уравнений

$$\alpha_{j-1}B_{j-1}(x_j)+\alpha_j B_j(x_j)+\alpha_{j+1}B_{j+1}(x_j)=f_j, \qquad (45)$$

$$j=0,1,N-1,N,$$

получаем локальную аппроксимацию, точную на полиномах третьей степени [3-9, 12]. При достаточной гладкости функции $f(x)$ (например, $f\in C^4$) такая аппроксимация позволяет получить точность приближения $O(H^4)$ на любой неравномерной сетке Δ [12].

Остановимся более подробно на способах нахождения граничных коэффициентов. В [12] предлагается определять эти величины, исходя из формул квазиинтерполяции:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{-1}&=f_0-\frac{2h_{-1}+h_{-2}}{3}f_0'+\frac{h_{-1}(h_{-2}+h_{-1})}{6}f_0'',\\
\alpha_i&=f_i+\frac{h_i-h_{i-1}}{3}f_i'-\frac{h_{i-1}h_i}{6}f_i'',\quad i=0,1,\dots,N,\\
\alpha_{N+1}&=f_N+\frac{2h_N+h_{N+1}}{3}f_N'+\frac{h_N(h_N+h_{N+1})}{6}f_N''.
\end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

А именно, пусть $L_j(x)$ - интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени, интерполирующий значения f_j, f_{j+1}, f_{j+2}, f_{j+3}. Тогда, используя аппроксимацию $f_0^{(r)}\approx L_0^{(r)}(x_0)$, $f_N^{(r)}\approx L_{N-3}^{(r)}(x_N)$, $r=1,2$, в соотношениях (46), получаем для $\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_N,\alpha_{N+1}$ формулы, содержащие только сеточные значения f_j.

Еще один способ вычисления граничных коэффициентов состоит в следующем [4]. Набор сеточных значений f_j, $j=0,\dots,N$, пополняется величинами $f_k=L_0(x_k)$, $k=-1,-2$; $f_m=$ $=L_{N-3}(x_m)$, $m=N+1,N+2$. После этого все коэффициенты

α_j, $j= -1,\dots, N+1$, определяются по формулам (43), если дополнительные узлы $x_{-1}, x_{-2}, x_{N+1}, x_{N+2}$ не являются кратными. В случае кратных дополнительных узлов необходимо учесть появление разделенных разностей с кратными узлами в (43).

Оказывается, все три рассмотренных способа определения граничных коэффициентов эквивалентны. В самом деле, легко убедиться, что и способ, основанный на аппроксимации формул (46), и способ, связанный с экстраполяцией сеточных данных, дают значения граничных коэффициентов, удовлетворяющие уравнениям (45), т.е. в обоих случаях реализуются условия интерполяции (44).

С точки зрения простоты вычислительного алгоритма предпочтительнее нахождение граничных коэффициентов путем решения уравнений (45).

Кроме условий интерполяции (44), для вычисления граничных коэффициентов может быть использована информация о значениях производных от $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ [9]. В частности, коэффициенты α_{-1}, α_0 и α_N, α_{N+1} могут быть найдены из условий

$$S^{(p)}(x_k)= f_k^{(p)}, \quad S^{(q)}(x_k)= f_k^{(q)}, \tag{47}$$

где $p\in \{0,1\}$, $q \in\{1,2\}$, $q > p$, соответственно при $k = 0$ и $k = N$.

Соотношения (47) эквивалентны системе

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{k-1}B^{(p)}_{k-1}(x_k)+\alpha_k B^{(p)}_k(x_k)+\alpha_{k+1}B^{(p)}_{k+1}(x_k)= f^{(p)}_k, \\ &\alpha_{k-1}B^{(q)}_{k-1}(x_k)+\alpha_k B^{(q)}_k(x_k)+\alpha_{k+1}B^{(q)}_{k+1}(x_k)= f^{(q)}_k. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Приведем вытекающие из нее формулы для граничных коэффициентов при возможных значениях p и q .

При $p = 0$, $q = 1$ имеем

$$\alpha_0 = f_0 + \frac{h_{-1}(f_0 - \alpha_1)}{h_0 + h_1} + \frac{1}{3} h_0 f_0' \left[1 + \frac{h_{-1}}{h_0 + h_1} \right],$$

$$\alpha_N = f_N + \frac{h_N(f_N - \alpha_{N-1})}{h_{N-1} + h_{N-2}} - \frac{1}{3} h_{N-1} f_N' \left[1 + \frac{h_N}{h_{N-1} + h_{N-2}} \right],$$

и α_{-1}, α_{N+1} определяются формулами (14), (15). Отметим, что этот тип краевых условий полезен с точки зрения повышения точности локальной аппроксимации [13].

При $p = 0$, $q = 2$ имеем

$$\alpha_0 = f_0 + \frac{(h_{-1} - h_0)(f_0 - \alpha_1)}{2h_0 + h_1} - \frac{h_0^2}{6} f_0'' \left[1 + \frac{h_{-1} - h_0}{2h_0 + h_1} \right],$$

$$\alpha_N = f_N + \frac{(h_N - h_{N-1})(f_N - \alpha_{N-1})}{2h_{N-1} + h_{N-2}} -$$

$$- \frac{h_{N-1}^2}{6} f_N'' \left[1 + \frac{h_N - h_{N-1}}{2h_{N-1} + h_{N-2}} \right],$$

и $\alpha_{-1}, \alpha_{N+1}$ определяются формулами (14), (15).

При $p = 1$, $q = 2$ имеем

$$\alpha_0 = \alpha_1 - (h_{-1} + h_0 + h_1)(f_0' + h_0 f_0''/2)/3,$$

$$\alpha_{-1} = \{f_0' + \alpha_0 [B_{-1}'(x_0) + B_1'(x_0)] - \alpha_1 B_1'(x_0)\}/B_{-1}'(x_0),$$

$$\alpha_N = \alpha_{N-1} + (h_{N-2} + h_{N-1} + h_N)(f_N' - h_{N-1} f_N''/2)/3,$$

$$\alpha_{N+1} = \{f_N' + \alpha_N [B_{N-1}'(x_N) + B_{N+1}'(x_N)] -$$

$$- \alpha_{N-1} B_{N-1}'(x_N)\}/B_{N+1}'(x_N).$$

В качестве обобщения условий интерполяции (44) можно рассматривать условия

$$S^{(p)}(x_1)= f_1^{(p)}, \quad S^{(q)}(x_0)= f_0^{(q)}, \tag{49}$$

$$S^{(m)}(x_{N-1})= f_{N-1}^{(m)}, \quad S^{(n)}(x_N)= f_N^{(n)}, \tag{50}$$

где $p,q,m,n\in \{0,1,2\}$. Из (49) рекуррентным образом находятся α_0, α_{-1}, а из (50) - α_N, α_{N+1}.

Перейдем к исследованию условий монотонности и выпуклости локальной аппроксимации, точной на кубических полиномах. Мы ограничимся рассмотрением локальной аппроксимации с краевыми условиями (44). При других краевых условиях изменяются только формулировки результатов на отрезках $[x_0,x_2]$, $[x_{N-2},x_N]$, что нетрудно сделать, учитывая полученные выше формулы для граничных коэффициентов.

Обозначим

$$u_j= f[x_j,x_{j+1}]- h_j^2 f[x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}],$$
$$j=1,\ldots, N-2.$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть коэффициенты* α_j *в* (1) *определены формулами* (43), (45). *Тогда*

а) если для $i\in \{2,\ldots, N-3\}$ *выполнены условия*

$$u_j \geq 0, \quad j= i-1,i,i+1, \tag{51}$$

то $S'(x) \geq 0$, $x\in [x_i,x_{i+1}]$;

б) если $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ *и*

$$f[x_0,x_1]- h_0^2 f[x_0,x_1,x_2,x_3] \geq 0, \tag{52}$$

то $S'(x) \geq 0$, $x\in [x_1,x_2]$;

в) если $u_{N-3} \geq 0$, $u_{N-2}\geq 0$ *и*

$$f[x_{N-1},x_N]-h^2_{N-1}f[x_{N-3},x_{N-2},x_{N-1},x_N]\geq 0, \tag{53}$$

то $S'(x)\geq 0,\ x\in[x_{N-1},x_N]$;

г) если выполнено условие (52) *и* $u_1\geq 0$, *а также*

$$f[x_0,x_1]-(h_0+h_{-1})f[x_0,x_1,x_2]+$$
$$+(h_0+h_{-1})(\lambda_0 h_{-1}+h_0+h_1)f[x_0,x_1,x_2,x_3]\geq 0, \tag{54}$$

то $S'(x)\geq 0,\ x\in[x_0,x_1]$;

д) если выполнено условие (53) *и* $u_{N-2}\geq 0$, *а также*

$$f[x_{N-1},x_N]+$$
$$+(h_{N-1}+h_N)f[x_{N-2},x_{N-1},x_N]+(h_{N-1}+h_N)(\mu_N h_N+$$
$$+h_{N-1}+h_{N-2})f[x_{N-3},x_{N-2},x_{N-1},x_N]\geq 0, \tag{55}$$

то $S'(x)\geq 0,\ x\in[x_{N-1},x_N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (43) имеем

$$\alpha_{i+1}-\alpha_i=$$
$$=\frac{h_i}{3}\left\{\left(\frac{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}{h_i}+\lambda_i+\mu_{i+1}\right)f[x_i,x_{i+1}]-\right.$$
$$\left.-\mu_{i+1}f[x_{i+1},x_{i+2}]-\lambda_i f[x_{i-1},x_i]\right\},$$
$$i=1,\dots,N-2.$$

Отсюда находим,

$$\alpha_{i+1}-\alpha_i=(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})u_i/3,\ i=1,\dots,N-2, \tag{56}$$

и, обращаясь к лемме 1, получаем утверждение "а".

Далее, из (45) находим

$$(\alpha_1-\alpha_0)B_0(x_1)= (\alpha_1-f_1)+ (\alpha_2-\alpha_1)B_2(x_1).$$

Подставляя в правую часть величину α_1-f_1 из (43) и учитывая (56), (3), имеем

$$\frac{\alpha_1-\alpha_0}{h_{-1}+h_0+h_1} =$$

$$= \frac{1}{3}\{f[x_0,x_1]-h_0^2f[x_0,x_1,x_2,x_3]\}. \qquad (57)$$

Отсюда и из леммы 1 получаем утверждение "б" (аналогично выводится утверждение "в").

Из (45) следует равенство

$$(\alpha_0-\alpha_{-1})B_{-1}(x_0) =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_0)[B_1(x_0)-1]+(\alpha_1-f_1)+h_0f[x_0,x_1].$$

Преобразуя правую часть с помощью соотношений (43), (57), (3), находим

$$\frac{\alpha_0-\alpha_{-1}}{h_{-2}+h_{-1}+h_0} = \frac{1}{3}\{f[x_0,x_1]-(h_0+h_{-1})f[x_0,x_1,x_2]+$$

$$+ (h_0+h_{-1})(\lambda_0h_{-1}+h_0+h_1)f[x_0,x_1,x_2,x_3]\}. \qquad (58)$$

Принимая теперь во внимание лемму 1 приходим к утверждению "г". Заключительное утверждение "д" выводится аналогичным образом. Доказательство теоремы завершено.

Таким образом, локальная аппроксимация, точная на кубических полиномах, в отличие от более простых типов локальной аппроксимации (теоремы 1,3), вообще говоря, не сохраняет монотонность исходных данных. Условия (51)-(55) в теореме 5 означают, по-существу, что для сохранения свойства монотонности данных $\{f_i\}$ разделенные разности $f[x_i,x_{i+1}]$ на соседних интервалах не должны сильно отличаться друг от друга. Например, условие (51) может быть записано в виде неравенств

$$\left\{\frac{h_{j-1}+h_j+h_{j+1}}{h_j}+\lambda_j+\mu_{j+1}\right\}f[x_j,x_{j+1}]-$$

$$-\lambda_j f[x_{j-1},x_j]-\mu_{j+1}f[x_{j+1},x_{j+2}]\geq 0, \tag{59}$$

$$j=i-1,i,i+1.$$

Отсюда ясен смысл вышесказанного. В частном случае, на равномерной сетке условия (59) имеют вид

$$8f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j+1},x_{j+2}]-f[x_{j-1},x_j]\geq 0,$$

$$j=i-1,i,i+1,$$

и выполняются, например, если

$$f[x_{j-1},x_j]/4\leq f[x_j,x_{j+1}]\leq 4f[x_{j-1},x_j], \tag{60}$$

$$j=i-1,i,i+1,i+2.$$

В качестве иллюстрации приведем условия (52)-(55) для случая равномерной сетки. Неравенства (52),(53) можно представить в виде

$$5f[x_0,x_1]+2f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]\geq 0,$$

$$5f[x_{N-1},x_N]+2f[x_{N-2},x_{N-1}]-f[x_{N-3},x_{N-2}]\geq 0.$$

Соответственно условия (54), (55) записываются следующим образом

$$17f[x_0,x_1]-16f[x_1,x_2]+5f[x_2,x_3]\geq 0,$$

$$17f[x_{N-1},x_N]-16f[x_{N-2},x_{N-1}]+5f[x_{N-3},x_{N-2}]\geq 0.$$

Условия (59), вообще говоря, не являются более слабыми, по сравнению с аналогичными условиями монотонности [1,2] кубического интерполяционного сплайна класса C^2, если рассматривать случай произвольной сетки. Однако на равномерной сетке локальная аппроксимация становится монотонной при более слабых требованиях к исходным данным. Так, например, вместо (60) для интерполяционных сплайнов имеем ограничения

$$f[x_{j-1},x_j]/3 \le f[x_j,x_{j+1}] \le 3f[x_{j-1},x_j] .$$

Рассмотрим пример, демонстрирующий некоторые особенности локальной аппроксимации, точной на кубических полиномах. Пусть $f(x)= \gamma x$, $x \le 0$; $f(x)= \beta x$, $x \ge 0$, причем $\gamma \ge 0$, $\beta \ge 0$. Введем равномерную сетку с узлами $x_j= jh$, $j = 0,\pm 1, \pm 2,\dots$. Имеем $f[x_i,x_{i+1}]= \gamma$, $i < 0$; $f[x_i,x_{i+1}]= \beta$, $i \ge 0$. По формулам (43) получаем $\alpha_i= \gamma x_i$, $i < 0$; $\alpha_i = \beta x_i$, $i > 0$; $\alpha_0= h(\gamma-\beta)/6$. Следовательно

$$S(x_{-2})= \gamma x_{-2}= -2\gamma h,$$

$$S(x_{-1})= -\gamma h + \frac{h(\gamma-\beta)}{36} .$$

Поэтому

$$S(x_{-1})- S(x_{-2})= \frac{h(37\gamma-\beta)}{36}$$

и при $\gamma < \beta/37$ имеем $S(x_{-1}) < S(x_{-2})$, хотя $f(x_{-1}) > f(x_{-2})$. Таким образом, при $\gamma < \beta/37$ локальная аппроксимация, точная на кубических полиномах, не сохраняет монотонности данных f_j. Заметим, что простейшая локальная аппроксимация сохраняет свойство монотонности данных при любом соотношении параметров γ, β.

Обозначим

$$w_j = f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}] +$$
$$+ \mu_j h_{j-1} f[x_{j-2},x_{j-1},x_j,x_{j+1}] -$$
$$- \lambda_j h_j f[x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}],$$
$$j = 2,\dots, N-2.$$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (43), (45). *Для того, чтобы имело место неравенство* $S''(x) \ge 0$ *при* $x \in [x_i,x_{i+1}]$, *необходимо и достаточно выполнения условий соответственно:*

а) при $i \in \{2,3,\dots, N-3\}$ –

$$w_j \ge 0, \quad j = i,i+1; \tag{61}$$

б) при $i = 1$ – $w_2 \ge 0$ *и*

$$f[x_0,x_1,x_2]-(h_1- h_0)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \ge 0; \tag{62}$$

в) при $i = 0$ –

$$f[x_0,x_1,x_2]-(2h_0+h_1)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \ge 0; \tag{63}$$

г) при $i = N-2$ – $w_{N-2} \ge 0$ *и*

$$f[x_{N-2},x_{N-1},x_N] -$$
$$- (h_{N-2}-h_{N-1})f[x_{N-3},x_{N-2},x_{N-1},x_N] \ge 0; \tag{64}$$

д) при $i = N-1$ –

$$f[x_{N-2},x_{N-1},x_N] -$$
$$- (2h_{N-1}+h_{N-2})f[x_{N-3},x_{N-2},x_{N-1},x_N] \ge 0. \tag{65}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы вытекает из леммы 2 и выражений для $\alpha_{j+1}-\alpha_j$, $j=-1,\dots,N$, найденных в ходе доказательства теоремы 5.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть данные* f_i, $i=0,\dots,N$, *выпуклые и коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (43), (45). *Для того, чтобы сплайн* $S(x)$ *был выпуклым, необходимо и достаточно выполнения неравенств* $w_j \geq 0$, $j=2,\dots,N-2$, *и условий* (63), (65).

Для доказательства следствия достаточно заметить, что в условиях неотрицательности вторых разделенных разностей из (63), (65) следуют неравенства (62), (64).

Выражение для w_j можно переписать в виде

$$w_j=\lambda_j\{(1+\varkappa_j)f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]-\varkappa_j f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}]\}+$$
$$+\mu_j\{(1+\varkappa_{j-1})f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]-\varkappa_{j-1}f[x_{j-2},x_{j-1},x_j]\},$$

где $\varkappa_j=h_j/(h_{j-1}+h_j+h_{j+1})$. Отсюда ясно, что из неравенств

$$\left.\begin{aligned}&(1+\varkappa_j)f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]\geq\varkappa_j f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}],\\&(1+\varkappa_{j-1})f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]\geq\varkappa_{j-1}f[x_{j-2},x_{j-1},x_j],\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

следует $w_j \geq 0$. Кроме того, условия (63), (65) эквивалентны ограничениям

$$(3h_0+2h_1+h_2)f[x_0,x_1,x_2]\geq(2h_0+h_1)f[x_1,x_2,x_3],\quad(67)$$

$$(3h_{N-1}+2h_{N-2}+h_{N-3})f[x_{N-2},x_{N-1},x_N]\geq$$
$$\geq(2h_{N-1}+h_{N-2})f[x_{N-3},x_{N-2},x_{N-1}].\quad(68)$$

В результате получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть коэффициенты* α_i *в* (1) *определены формулами* (43), (45). *Если выполнены условия* (66) (при $j = 2,\dots, N-2$) *и* (67), (68), *то* $S''(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$.

В заключение параграфа отметим, что условия выпуклости локальной аппроксимации, точной на кубических полиномах, слабее аналогичных условий для интерполяционных кубических сплайнов [1,2] класса C^2 .

§4. Локальная аппроксимация и сглаживание

Локальная аппроксимация сплайнами широко используется при обработке экспериментальной информации в качестве аппарата сглаживания [6,7]. Собственно, именно с этой целью такие сплайны были введены в основополагающей для теории сплайнов работе [14]. В частности, в [14] были обоснованы сглаживающие свойства локальной аппроксимации при равномерной бесконечной сетке. Какие-либо результаты относительно сглаживающих свойств локальной аппроксимации для неравномерных сеток нам неизвестны. Ниже мы покажем, что простейшая локальная аппроксимация, вообще говоря, непригодна для сглаживания на неравномерной сетке.

Рассмотрим бесконечную сетку узлов x_i с заданными в них значениями f_i, $i = 0,\pm1,\pm2,\dots$. Процедура вычисления значений $S(x_j)$, $j = 0,\pm1,\dots$, локальной аппроксимации

$$S(x) = \sum_i f_i B_i(x) \qquad (69)$$

называется сглаживанием исходных данных $\{f_i\}$. Обычно, с целью регулирования степени сглаживания используется итерационный процесс

$$S^{(k)}(x_j) = \sum_i S^{(k-1)}(x_i) B_i(x_j) , \qquad (70)$$

$$S^{(0)}(x_j) = f_j, \quad j = 0,\pm1,\dots; \; k = 1,2,\dots \quad .$$

Здесь k - номер итерации, а не порядок производной. Количество итераций определяется требованиями, предъявляемыми к результату сглаживания, например, ограничениями на допустимое отклонение сглаженных значений от исходных [6].

Пусть сетка такова, что $x_{2i}-x_{2i-1}=H$, $x_{2i+1}-x_{2i}=h=\alpha H$, $\alpha<1$, $i=0,\pm1,\ldots$, и значения $f_j=x_j$, $j=0,\pm1,\ldots$, т.е. исходные данные и сетка фактически такие же как в примере из §1.

Согласно формуле (70) имеем

$$S^{(k)}(x_j)=S^{(k-1)}(x_{j-1})B_{j-1}(x_j)+$$
$$+S^{(k-1)}(x_j)B_j(x_j)+S^{(k-1)}(x_{j+1})B_{j+1}(x_j),$$
$$j=0,\pm1,\ldots;\quad k=1,2,\ldots\ .$$

Учитывая (3), находим

$$S^{(k)}(x_j)=[S^{(k-1)}(x_{j-1})-S^{(k-1)}(x_j)]\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}+$$
$$+S^{(k-1)}(x_j)+[S^{(k-1)}(x_{j+1})-$$
$$-S^{(k-1)}(x_j)]\frac{1}{(1+\alpha)(2+\alpha)},\tag{71}$$
$$j=0,\pm1,\ldots;\quad k=1,2,\ldots\ .$$

Отсюда

$$S^{(1)}(x_{2i})=x_{2i}+uH,\quad S^{(1)}(x_{2i+1})=x_{2i+1}-uH,\tag{72}$$

где $u=\alpha(1-\alpha)/[(2+\alpha)(1+2\alpha)]$.

Будем искать выражение для $S^{(k)}(x_j)$ в виде

$$\left.\begin{aligned}S^{(k)}(x_{2i})&=x_{2i}+uH\beta_k,\\ S^{(k)}(x_{2i+1})&=x_{2i+1}-uH\beta_k,\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

где согласно (72) $\beta_1=1$.

Подставляя выражения для $S^{(k-1)}(x_j)$ из (73) в (71), имеем

$$S^{(k)}(x_{2i}) = x_{2i} + uH(1+v\beta_{k-1}) , \qquad (74)$$

где $v = 3\alpha/[(2+\alpha)(1+2\alpha)]$. Сопоставляя (74) и (73), находим

$$\beta_k = 1+ v\beta_{k-1}, \ k = 2,3,\ldots; \quad \beta_1 = 1.$$

Отсюда $\beta_k = 1+ v+\ldots + v^{k-1}=(1-v^k)/(1-v)$ и следовательно

$$S^{(k)}(x_{2i}) = x_{2i} + wH(1-v^k), \quad k = 1,2,\ldots, \qquad (75)$$

где $w = \alpha(1-\alpha)/(2+2\alpha+2\alpha^2)$. Аналогично показывается, что

$$S^{(k)}(x_{2i+1}) = x_{2i+1} - wH(1-v^k), \ k = 1,2,\ldots . \qquad (76)$$

Так как $0 < v < 1/3$, то в пределе при $k \to \infty$ получаем

$$\left.\begin{aligned} S^{(\infty)}(x_{2i}) &= x_{2i} + wH, \\ S^{(\infty)}(x_{2i+1}) &= x_{2i+1} - wH, \quad i = 0,\pm1,\ldots . \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Анализ формул (75)-(77) показывает, что в процессе "сглаживания" сеточных данных, соответствующих функции $f(x) = x$, с помощью формулы простейшей локальной аппроксимации мы получили сеточную функцию, которая представляет собой сумму исходной "гладкой" сеточной функции и пилообразного возмущения с достаточно ощутимой амплитудой. Естественно такой результат нельзя считать сглаживанием исходной информации. Заметим, что график предельной локальной аппроксимации $S^{(\infty)}(x) = \sum_i S^{(\infty)}(x_i)B_i(x)$ аналогичен графику сплайна на рис.1. Нетрудно также получить

$$S^{(k)''}(x_{2i+1}) = \frac{12[1-\alpha+3w(1-v^k)]}{(2+\alpha)(1+2\alpha)H} = -S^{(k)''}(x_{2i}).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $f_j = (-1)^j \varepsilon$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, т.е. исходная сеточная функция носит пилообразный характер. Нетрудно найти, что $S^{(k)}(x_j) = (-1)^j v^k \varepsilon$, $j = 0, \pm 1, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$, и соответственно $S^{(\infty)}(x_j) = 0$, $j = 0, \pm 1, \ldots$. Таким образом, в данном примере мы наблюдаем четко выраженный эффект сглаживания исходных негладких данных.

Подводя итоги, можно утверждать, что в случае неравномерной сетки простейшая локальная аппроксимация, с одной стороны, может сглаживать негладкие сеточные данные, но, с другой стороны, может преобразовывать гладкие сеточные данные в негладкие. И, так как экспериментальные данные можно трактовать как сумму гладкой и негладкой составляющих, то результат обработки их с помощью простейшей локальной аппроксимации на неравномерной сетке может носить непредсказуемый характер.

Возможно, рассмотренные эффекты связаны с условиями выпуклости локальной аппроксимации.

Литература

1. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып. 137: Вычислительные системы. - С. 31-57.

2. MIROSHICHENKO V.L. Sufficient conditions for monotonicity and convexity of cubic splines of class C^2//Siberian advances in mathematics. - 1992. - Vol. 2, N4. -P. 147-163.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

4. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений.-М.: Изд-во Моск. ун-та,1983. - 208 с.

5. Де БОР К. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.

6. ВЕРШИНИН В.В., ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ПАВЛОВ Н.Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания.-Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1988. - 102 с.

7. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии. - М.: Машиностроение, 1985. - 222 с.

8. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Приближение функций сплайнами //Сплайн-функции в инженерной геометрии. - Новосибирск, 1981. - Вып. 86: Вычислительные системы. - С. 9-24.

9. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами //Проблемы обработки информации. - Новосибирск,1983. - Вып. 100: Вычислительные системы. - С. 83-100.

10. ОВЧИННИКОВА Т.Э. Точные оценки погрешности приближения локальной аппроксимации кубическими сплайнами. Простейшая формула //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1987. - Вып.121: Вычислительные системы. - С. 55-65.

11. ОВЧИННИКОВА Т.Э. Точные оценки погрешности приближения локальной аппроксимации кубическими сплайнами. Формула, точная на полиномах первой степени //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1988. - Вып. 128: Вычислительные системы. -С. 39-59.

12. ЖАНЛАВ Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через В-сплайны //Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1981. - Вып. 87: Вычислительные системы. - С. 3-10.

13. ЖАНЛАВ Т., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Аппроксимация функций локально-интерполяционными кубическими сплайнами //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып. 137: Вычислительные системы. - С. 3-30.

14. SCHOENBERG I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions //Quarterly of applied mathematics. - 1946. - Vol. 4. - P. 45-99,112-141.

Поступила в ред.-изд.отд.

14 декабря 1992 года