ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)

1992 год Выпуск 147

УДК 519.65

МОНОТОННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОБОБЩЕННЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ КЛАССА C^2

Ю.С.Завьялов

Введение

В работе [1] нами совместно с В.В.Богдановым рассмотрена монотонная эрмитова интерполяция обобщенными кубическими сплайнами самого общего вида. Доказаны существование и единственность сплайна. Установлены необходимые и достаточные условия его монотонности, состоящие в том, что пары заданных значений m_i^0, m_{i+1}^0 производной сплайна в соседних узлах сетки должны принадлежать специальным выпуклым областям в плоскостях (m_i, m_{i+1}). Это обобщение результатов работы [2] о монотонных эрмитовых кубических сплайнах. Предложена методика выбора свободных параметров обобщенных сплайнов, обеспечивающих выполнение указанных условий.

В данной статье эти вопросы исследованы для лагранжевой интерполяции обобщенными кубическими сплайнами класса C^2. Как и для чисто кубических сплайнов, задача интерполяции сводится к решению системы уравнений с трехдиагональной матрицей. Примеры обобщенных сплайнов и интерполяционных задач имеются в работах ряда авторов, из которых мы отметим непосредственно использовавшиеся нами работы В.Л.Мирошниченко [3-5]. В [4-5] им установлены достаточные условия монотонности кубических и параболических сплайнов в виде ограничений на исходные данные задачи при их строгой монотонности. В [4] без доказательства сформулировано утверждение о достаточных условиях монотонности обобщенных сплайнов, включающих, кроме строго монотонных исходных данных, также свободные параметры сплайна.

Следуя методике работы [4], мы получили систему неравенств, обеспечивающих существование двухсторонних оценок $0 \le m_i \le m_i^0$, $0 \le m_{i+1} \le m_{i+1}^0$ (в случае монотонного возрастания), где m_i^0, m_{i+1}^0 зависят от исходных данных, но не зависят от свободных параметров сплайна. В результате задача сводится к задаче монотонной эрмитовой интерполяции [1], с тем отличием, что теперь выпуклой области должна принадлежать не только точка (m_i^0, m_{i+1}^0), но и целый прямоугольник с вершинами $(0,0)$, $(m_i^0, 0)$, $(0, m_{i+1}^0)$, (m_i^0, m_{i+1}^0). Там подобное условие было необходимым и достаточным, а здесь только достаточным. Предложена подходящая для данного случая модернизация методики выбора свободных параметров сплайна.

Из других работ по теме отметим исследования Б.И.Квасова и С.А.Яценко [7], в которых задача монотонной и выпуклой интерполяции сплайнами класса C^2 сводится к эрмитовой интерполяции второго порядка рациональными сплайнами с дополнительными узлами.

Графики и численные примеры в данной статье (§3) выполнены В.В.Богдановым, которому автор выражает искреннюю благодарность.

§1. Существование и единственность интерполяционного сплайна

Рассматриваются обобщенные сплайны на отрезке $[a,b]$ на сетке $\Delta: a = x_0 < \ldots < x_N = b$ с шагами $h_i = x_{i+1} - x_i$. Звено сплайна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ записываем в виде [1]:

$$S_G(x) = f_{i+1}t + f_i(1-t) + h_i\{C_i[\varphi_i(t)-t] + D_i[\psi_i(t) - 1 + t]\}, \qquad (1)$$

где $t = (x-x_i)/h_i$, $\varphi_i(t), \psi_i(t) \in C^2[0,1]$ - базовые функции, подчиняющиеся ограничениям

$$\varphi_i(1) = \psi_i(0) = 1,\ \varphi_i^{(r)}(0) = \psi_i^{(r)}(1) = 0,\ r=0,1,2, \qquad (2а)$$

$$\varphi_i'(1) > 2,\ \psi_i'(0) < -2, \qquad (2б)$$

$$\varphi_i''(1) > 0,\ \psi_i''(0) > 0, \qquad (2в)$$

C_i, D_i - произвольные постоянные*).

Выполняя условия интерполяции исходных данных $S_G(x_j) = f_j$, $j = i, i+1$, и условия непрерывности первой производной сплайна в узлах сетки $S_G'(x_j) = m_j$, $j = i, i+1$, находим [1]

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \Delta_i^{-1}\{-m_i + \delta_{i+1/2} + [\psi_i'(0)+1](m_{i+1} - \delta_{i+1/2})\}, \\ D_i &= \Delta_i^{-1}\{[\varphi_i'(1)-1](m_i - \delta_{i+1/2}) + m_{i+1} - \delta_{i+1/2}\}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $\delta_{i+1/2} = (f_{i+1} - f_i)/h_i$ - первые разделенные разности,

$$\Delta_i = \varphi_i'(1)\psi_i'(0) + \varphi_i'(1) - \psi_i'(0) < 0. \qquad (4)$$

Если величины m_i, $i = 0, \ldots, N$, задаются, то получается эрмитов сплайн класса C^1 [1]. *Интерполяционный сплайн класса* C^2 возникает, если они определяются из условий непрерывности второй производной сплайна в узлах сетки

---

*) Здесь использованы традиционные обозначения функций $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ в отличие от работы [1], где они оказались поменены местами.

Δ , т.е. $S''_G(x_i-0) = S''_G(x_i+0)$. Это дает систему уравнений [3,4,6]

$$c_i m_{i-1} + a_i m_i + b_i m_{i+1} = d_i \,, \; i = 1, \dots, N-1 \,, \tag{5}$$

с коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} & b_i = -\mu_i \psi''_i(0)/2\Delta_i \,, \; c_i = -\lambda_i \varphi''_{i-1}(1)/2\Delta_{i-1} \,, \\ & a_i = b_i[\varphi'_i(1)-1] - c_i[\psi'_{i-1}(0)+1] \,, \\ & d_i = b_i \varphi'_i(1)\delta_{i+1/2} - c_i \psi'_{i-1}(0)\delta_{i-1/2} \,, \\ & \qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, N-1 \,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1-\lambda_i$.

К уравнениям (5) добавляются уравнения, порождаемые линейными граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} & a_0 m_0 + b_0 m_1 = d_0 \,, \\ & c_N m_{N-1} + a_N m_N = d_N \,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В частности, условия типа I, по терминологии [3,4,6], $S'_G(x_i) = f'_i$, $i = 0, N$, приводят к уравнениям (7) с коэффициентами

$$b_0 = c_N = 0 \,, \; a_0 = a_N = 2 \,, \; d_0 = 2f'_0 \,, \; d_N = 2f'_N \,. \tag{8}$$

Условия типа II, $S''_G(x_i) = f''_i$, $i = 0, N$, дают

$$\left.\begin{aligned} & b_0 = -\psi''_0(0)/2\Delta_0 \,, \quad a_0 = b_0[\varphi'_0(1)-1] \,, \\ & d_0 = b_0 \varphi'_0(1)\delta_{1/2} - h_0 f''_0/2 \,, \\ & c_N = \varphi''_{N-1}(1)/2\Delta_{N-1} \,, \; a_N = -c_N[\psi'_{N-1}(0)+1] \,, \\ & d_N = -c_N \psi'_{N-1}(0)\delta_{N-1/2} + h_{N-1} f''_N/2 \,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

При рассмотрении вопроса о существовании и единственности решения системы (5),(7), а затем и монотонности сплайна будем использовать лемму из [4,5].

ЛЕММА 1 [4,5]. *Пусть коэффициенты системы вида (5),(7) удовлетворяют условиям*

$$a_0 > 0, \quad b_0 < a_0 a_1/(c_1 + b_1), \tag{10а}$$

$$c_i \geq 0, \; b_i \geq 0, \; a_i > b_i + c_i, \quad i = 1,\ldots, N-1, \tag{10б}$$

$$a_N > 0, \quad c_N < a_N a_{N-1}/(c_{N-1} + b_{N-1}). \tag{10в}$$

Если

$$d_i \geq 0, \quad i = 0,\ldots, N, \tag{11}$$

$$d_0 - b_0 d_1/a_1 \geq 0, \tag{12а}$$

$$d_i - b_i d_{i+1}/a_{i+1} - c_i d_{i-1}/a_{i-1} \geq 0, \; i=1,\ldots, N-1, \tag{12б}$$

$$d_N - c_N d_{N-1}/a_{N-1} \geq 0, \tag{12в}$$

то система (5), (7) разрешима и

$$m_i \geq 0, \quad i = 0,\ldots, N. \tag{13}$$

Система (5), (7) имеет решение $m_i \leq 0$, $i = 0,\ldots, N$, *если знаки неравенств в (11), (12) изменены на противоположные.*

Известно [3,4,6], что для существования и единственности решения системы вида (5),(7) достаточно выполнения условий (10). В силу (2), (6)

$$b_i > 0, \quad c_i > 0,$$

$$a_i \geq (b_i + c_i)\min[\varphi_i'(1)-1, -\psi_i'(0)-1] > b_i + c_i,$$

$$i = 1,\ldots, N-1,$$

и условия (10б) выполняются. В случае граничных условий типов I и П с коэффициентами (8) и (9) $b_0 \geq 0$, $c_N \geq 0$, $a_0 > 0$, $a_N > 0$, нетрудно видеть, что выполняются условия (10а) и (10в). В общем случае граничных условий для популярных на практике сплайнов (см. ниже §3) их можно заменить несколько более жесткими условиями

$$\left.\begin{aligned} &a_0 > 0, \quad b_0 < (\alpha_1 - 1)a_0, \\ &a_N > 0, \quad c_N < (\alpha_{N-1} - 1)a_N, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где $\alpha_i = \min[\varphi_i'(1), -\psi_i'(0)]$, которые в дальнейшем считаем выполненными.

Этим доказано известное утверждение [3,4,6]: *интерполяционный обобщенный сплайн класса* C^2 *существует и единствен.*

§2. Достаточные условия монотонности интерполяционного сплайна

Пусть исходные данные монотонно возрастающие (убывающие) т.е. $\delta_{i+1/2} \geq 0$ $(\delta_{i+1/2} \leq 0)$. Требуется решить два вопроса: а) каковы необходимые и достаточные условия монотонности обобщенного интерполяционного сплайна, б) при каких ограничениях на базовые функции сплайна они выполняются?

Поскольку обобщенный интерполяционный сплайн класса C^2 отличается от эрмитова сплайна только тем, что в одном случае величины $m_i, i = 0,\ldots,N$, задаются, а в другом определяются из системы уравнений (5),(7), то необходимые и достаточные условия монотонности эрмитова сплайна в терминах величин m_i [1] являются одновременно таковыми и для сплайна класса C^2.

Необходимые условия монотонности звена сплайна суть [1,2]

$$\left.\begin{aligned} \bar{m}_i &= \frac{m_i}{\delta_{i+1/2}} \geq 0, \\ \bar{m}_{i+1} &= \frac{m_{i+1}}{\delta_{i+1/2}} \geq 0, \end{aligned}\right\} \text{если} \quad \delta_{i+1/2} \neq 0, \tag{15а}$$

$$\bar{m}_i = \bar{m}_{i+1} = 0, \text{ если } \quad \delta_{i+1/2} = 0. \tag{15б}$$

Для решения вопроса об их выполнении используется лемма 1. Чтобы имели место (13), требуется выполнение (11) и (12). Из (2) и (6) следует, что (11) выполняются для индексов $i = 1,\dots, N-1$. Для выполнения их для индексов $i = 0,N$ граничные условия (7) должны быть специального типа. В частности (11) удовлетворяются в случае условий типов I, П.

Неравенства (12б) будем заменять парами неравенств. Для этого подставляем в них выражения d_i (6), группируем члены с b_i и c_i и требуем, чтобы

$$\varphi_i'(1)\,\delta_{i+1/2} \geq d_{i+1}/a_{i+1}, \tag{16а}$$

$$-\psi_{i-1}'(0)\delta_{i-1/2} \geq d_{i-1}/a_{i-1}, \tag{16б}$$

$$i = 1,\dots, N-1.$$

Граничные неравенства (11), (12а) и (12в) объединяем в формулы вида

$$\left.\begin{aligned} d_0 &\geq (b_0)_+ d_1/a_1, \\ d_N &\geq (c_N)_+ d_{N-1}/a_{N-1}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $z_+ = \max(0,z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия леммы 1 и тем более (16), (17) весьма жесткие,из-за чего возникает неприятное обстоятельство,а именно: *если хотя бы одна из величин* $\delta_{j+1/2}$, $j \in \{0, \dots, N-1\}$, *или* d_0 *при* $b_0 > 0$, *или* d_N *при* $c_N > 0$ *равна нулю, то* (16), (17) *выполняются, если только все* $\delta_{i+1/2} = 0$, $i = 0, \dots, N-1$, $d_0 = d_N = 0$. В этом случае система (5),(7) имеет только тривиальное решение $m_i = 0$, $i = 0, \dots, N$, и значит, согласно (1) $S_G(x) = f_i = \mathrm{const}$.

В главном случае $\delta_{i+1/2} > 0$, $i = 0, \dots, N-1$, т.е. исходные данные строго монотонны, $d_0 \geq 0$, $d_N \geq 0$, причем равенства возможны, если только $b_0 \leq 0$, $c_N \leq 0$. Здесь из необходимых условий монотонности реализуются только (15а). В вырожденном случае реализуются только (15б).

"Сильный" вариант леммы 1, т.е. $m_i > 0$, $i = 0, \dots, N$, получается, если в главном случае при каждом $i = 1, \dots, N-1$ хотя бы, одно из двух неравенств (16), а также оба неравенства (17) строгие.

Подобные рассуждения справедливы и при монотонно убываю - щих исходных данных.

Введем величины

$$\xi_i = \varphi_i'(1)[\varphi_i'(1)-1]^{-1}, \qquad \eta_i = \psi_i'(0)[\psi_i'(0)+1]^{-1}.$$

Их значения монотонно убывают по $\varphi_i'(1)$ и $-\psi_i'(0)$ соответственно.

Пусть базовые функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = 0, \dots, N-1$, таковы, что при варьировании их свободных параметров наимень - шие из возможных значений $\varphi_i'(1)$, $-\psi_i'(0)$ одинаковы и равны α . Тогда наибольшие из возможных значений ξ_i, η_i тоже одинаковы и равны $\beta = \alpha/(\alpha-1) < 2$. Имеем $1 < \xi_i \leq \beta$, $1 < \eta_i \leq \beta$.

Введем величины

$$\zeta_i = \varphi_i''(1)(2[\varphi_i'(1) - \eta_i])^{-1},$$

$$\chi_i = -\psi_i''(0)(2[\psi_i''(0)+ \xi_i])^{-1}.$$

Во-первых, $\zeta_i > 0$, $\chi_i > 0$. Во-вторых, эти величины являются монотонно возрастающими функциями аргументов η_i и ξ_i соответственно: $\zeta_i = \zeta_i(\eta_i)$, $\chi_i = \chi_i(\xi_i)$.

ЛЕММА 2. *Если* $\delta_{i+1/2} > 0$, $i = 0,\ldots, N-1$, *и выполняются неравенства*

$$(\zeta_{i-1} - \chi_i)(\eta_{i-1}\delta_{i-1/2} - \xi_i\delta_{i+1/2}) \le 0; \tag{18}$$

$$\varphi_i'(1) \ge \lambda_{i+1}\eta_i + \mu_{i+1}\xi_{i+1}\delta_{i+3/2}\delta^{-1}_{i+1/2}, \tag{19а}$$

$$-\psi_{i-1}'(0) \ge \lambda_{i-1}\eta_{i-2}\delta_{i-3/2}\delta^{-1}_{i-1/2} + \mu_{i-1}\xi_{i-1}, \tag{19б}$$

$$i = 1,\ldots, N-1;$$

$$d_0 \ge (b_0)_+(\lambda_1\eta_0\delta_{1/2} + \mu_1\xi_1\delta_{3/2}), \tag{20а}$$

$$d_N \ge (c_N)_+(\lambda_{N-1}\eta_{N-2}\delta_{N-3/2} + \mu_{N-1}\xi_{N-1}\delta_{N-1/2}), \tag{20б}$$

то $m_i \ge 0$, $i = 0,\ldots, N$.

Если $\delta_{i+1/2} < 0$, $i = 0,\ldots, N-1$, *то* $m_i \le 0$, $i = 0,\ldots, N$, *если знаки неравенств в (18),(20) заменены на противоположные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 2 справедлива, если из ее условий вытекают условия леммы 1, которые мы заменили более сильными неравенствами (16), (17).

Выразим коэффициенты (6) через величины ξ_i, η_i, ζ_i, χ_i. Учитывая, что

$$\Delta_i = [\psi_i'(0)+1][\varphi_i'(1)- \eta_i] =$$

$$= [\varphi_i'(1)-1][\psi_i'(0)+ \xi_i],$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} &b_i[\varphi_i'(1)-1] = \mu_i\chi_i, \\ &c_i[\psi_{i-1}'(0)+1] = -\lambda_i\zeta_{i-1}, \\ &a_i = \lambda_i\xi_{i-1} + \mu_i\chi_i, \\ &d_i = \lambda_i\eta_{i-1}\zeta_{i-1}\delta_{i-1/2} + \mu_i\xi_i\chi_i\delta_{i+1/2}, \\ &\qquad\qquad i = 1,\dots,N-1. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Рассматривая d_i/a_i как функцию ζ_{i-1} и χ_i, вычисляем производные

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_{i-1}}\left(\frac{d_i}{a_i}\right) = \frac{1}{a_i^2}\lambda_i\mu_i\chi_i(\eta_{i-1}\delta_{i-1/2} - \xi_i\delta_{i+1/2}),$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi_i}\left(\frac{d_i}{a_i}\right) = \frac{1}{a_i^2}\lambda_i\mu_i\zeta_{i-1}(\xi_i\delta_{i+1/2} - \eta_{i-1}\delta_{i-1/2}).$$

Поскольку они разных знаков или нули, то d_i/a_i по одному из аргументов, например ζ_{i-1}, монотонно возрастает, если $\eta_{i-1}\delta_{i-1/2} \ge \xi_i\delta_{i+1/2}$, а по другому, χ_i, монотонно убывает. Но, в таком случае согласно (18) $\zeta_{i-1} \le \chi_i$ и имеет место неравенство

$$d_i/a_i \le \lambda_i\eta_{i-1}\delta_{i-1/2} + \mu_i\xi_i\delta_{i+1/2}, \qquad i = 1,\dots,N-1. \tag{22}$$

Такой же результат получается при $\eta_{i-1}\delta_{i-1/2} \le \xi_i\delta_{i+1/2}$, $\zeta_{i-1} \ge \chi_i$.

Из (19), (22) следуют неравенства (16). Неравенства (17) вытекают из (20), (22). Лемма доказана.

В дальнейшем нам потребуются оценки сверху, $m_i \le m_i^0$ (снизу, $m_i \ge m_i^0$) для монотонно возрастающих (убывающих) сплайнов.

ЛЕММА 3. *Если* $\delta_{i+1/2} > 0,\ i = 0,\dots,N-1$, *и выполняются неравенства* (18), *то имеют место оценки*

$$m_i \le \lambda_i \eta_{i-1} \delta_{i-1/2} + \mu_i \xi_i \delta_{i+1/2},\ i = 1,\dots,N-1, \quad (23)$$

$$m_0 \le a_0^{-1}[d_0 + (-b_0)_+ (\lambda_1 \eta_0 \delta_{1/2} + \mu_1 \xi_1 \delta_{3/2})], \quad (24a)$$

$$m_N \le a_N^{-1}[d_N + (-c_N)_+ (\lambda_{N-1} \eta_{N-2} \delta_{N-3/2} + \mu_{N-1} \xi_{N-1} \delta_{N-1/2})]. \quad (24б)$$

Если $\delta_{i+1/2} < 0,\ i = 0,\dots,N-1$, *то неравенства в* (23) *и* (24) *меняются на противоположные, если на противоположные сменены знаки неравенств* (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из системы (5) вытекают оценки $m_i \le d_i/a_i, i=1,\dots,N-1$. Тогда согласно (22) имеют место (23). Из (7) получаем

$$m_0 \le a_0^{-1}[d_0 + (-b_0)_+ m_1],$$

$$m_N \le a_N^{-1}[d_N + (-c_N)_+ m_{N-1}].$$

Подставляя сюда уже найденные оценки (23) для m_1, m_{N-1}, получаем (24). Лемма доказана.

Неравенства (18)-(20) достаточны для выполнения необходимых условий монотонности (15). С их помощью также получены оценки (23),(24), требующиеся для вывода достаточных условий монотонности.

В работе [1] установлены необходимые и достаточные условия монотонности эрмитова сплайна для случая, когда базовые функции являются сплайнами класса C^2 на сетке δ:

$0 \le t_1 \le \ldots \le t_k \le \ldots \le t_n = 1,\ n \ge 1,$ и $\varphi_i(t), \psi_i(t) \in$ $\in C^4[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$ *).

Предполагается в дополнение к (2), что $\varphi_i^{(r)}(t) \ge 0$, $(-1)^r \psi_i^{(r)}(t) \ge 0$, $r = 0,1,2,3$. При этом $\varphi_i^{(r)}(t) = 0$, $r = 0,1,2$, только при $t \in [0, t_k], t_k < 1$, $\varphi_i'''(t) = 0$ при $t \in [0, t_k)$, а $\psi_i^{(r)}(t) = 0$, $r = 0,1,2,3$, только при $t \in [t_l, 1]$, $t_l > 0$.

Вводятся функции

$$\Phi_i(t) = -\varphi_i(t) + t + [\varphi_i'(1) - 1][\psi_i(t) - 1 + t],$$

$$\Psi_i(t) = [\psi_i'(0) + 1][\varphi_i(t) - t] + \psi_i(t) - 1 + t,$$

через которые согласно (3) сплайн представляется в виде:

$$S_G(x) = f_{i+1} t + f_i (1-t) + \Delta_i^{-1} h_i [\Phi_i(t)(m_i - \delta_{i+1/2}) + \Psi_i(t)(m_{i+1} - \delta_{i+1/2})],\ x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{25}$$

Предполагается, что функция

$$Q_i(t) = \Delta_i^{-1}[\Phi_i'(t)\Psi_i''(t) - \Phi_i''(t)\Psi_i'(t)] = [\psi_i'(t) + 1]\varphi_i''(t) - [\varphi_i'(t) - 1]\psi_i''(t) \ge 0, \tag{26}$$

причем равенство имеет место только при $t \in [t_l, t_k]$, $t_l \le t_k$, где $\varphi_i^{(r)}(t) = \psi_i^{(r)}(t) = 0$, $r = 0,1,2$.

Требуемый результат [1, теорема 1], сформулируем в виде леммы.

---

*) В.В.Богданов недавно показал, что достаточно требовать, чтобы $\varphi_i(t), \psi_i(t) \in C^3$.

ЛЕММА 4. *Пусть для обобщенного эрмитова сплайна выполняются условия (15). Тогда для того, чтобы сплайн был монотонным на* $[x_i, x_{i+1}]$, *необходимо и достаточно, чтобы в плоскости* $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1})$ *заданная точка* $E(\bar{m}_i^0, \bar{m}_{i+1}^0) \in G_i$, *где* G_i *- выпуклая область, ограниченная отрезками осей координат OA и OB, причем* $A(0, \varphi_i'(1))$, $B(-\psi_i'(0), 0)$, *и кривой* Γ_i *(рис.1).*

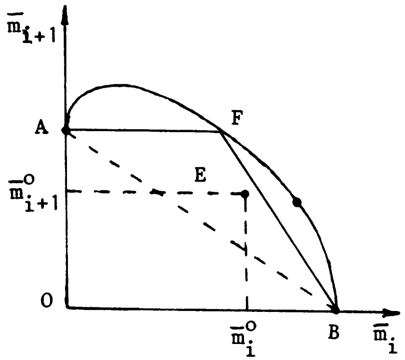

Рис.1

а) Если $t_k < t_l$ $(Q_i(t) > 0)$, *то* Γ_i *представляется параметрически уравнениями*

$$\left.\begin{aligned} \bar{m}_i &= 1 - \Psi_i''(\tau) Q_i^{-1}(\tau), \\ \bar{m}_{i+1} &= 1 + \Phi_i''(\tau) Q_i^{-1}(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где $\tau \in [t_k, t_l]$, *причем, если* $t_k = 0$ *и/или* $t_l = 1$, *то* Γ_i *касается осей координат в точках* A *и/или* B.

б) Если $t_k \geq t_l$ $(Q_i(t) = 0$ *при* $t \in [t_l, t_k])$, *то* Γ_i *есть прямая*

$$\varphi_i'(1)\bar{m}_i - \psi_i'(0)\bar{m}_{i+1} + \varphi_i'(1)\psi_i'(0) = 0, \tag{28}$$

проходящая через точки A *и* B.

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы обобщенный интерполяционный сплайн класса* C^2 *был монотонным на* $[a,b]$ *достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$
\left.\begin{aligned}
&[\zeta_{i-1}(\beta)-\chi_i(\beta)](\delta_{i-1/2}-\delta_{i+1/2})\le 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,\dots,N-1,
\end{aligned}\right\}\qquad(29)
$$

и чтобы в плоскостях $(\overline{m}_i,\overline{m}_{i+1})$ *прямоугольники* P_i *с вершинами* $(0,0)$, $(\overline{m}_i^0,0)$, $(0,\overline{m}_{i+1}^0)$, $(\overline{m}_i^0,\overline{m}_{i+1}^0)$ *принадлежали областям* G_i, *определенным в лемме 4. Здесь*

$$\overline{m}_i^0=\beta(\lambda_i\delta_{i-1/2}\delta_{i+1/2}^{-1}+\mu_i),\ i=1,\dots,N-1, \qquad (30а)$$

$$\overline{m}_{i+1}^0=\beta(\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}\delta_{i+3/2}\delta_{i+1/2}^{-1}),i=0,\dots,N-2. \qquad (30б)$$

Для промежутков $[x_0,x_1]$ *и* $[x_{N-1},x_N]$

$$\overline{m}_0^0=a_0^{-1}[d_0\delta_{1/2}^{-1}+(-b_0)_+\beta(\lambda_1+\mu_1\delta_{3/2}\delta_{1/2}^{-1})], \qquad (31а)$$

$$\overline{m}_N^0=a_N^{-1}[d_N\delta_{N-1/2}^{-1}+$$

$$+(-c_N)_+\beta(\lambda_{N-1}\delta_{N-3/2}\delta_{N-1/2}^{-1}+\mu_{N-1})], \qquad (31б)$$

а $\overline{m}_1^0$ *и* $\overline{m}_{N-1}^0$ *определяются по формулам (30б) и (30а) соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (29) - это неравенства (18), записанные при замене η_{i-1} и ξ_i их наибольшим значением β. Из условий $P_i\in G_i$ следует, что $-\psi_i'(0)\ge\overline{m}_i^0$, $\varphi_i'(1)\ge$ $\ge\overline{m}_{i+1}^0$. И из (30), (31) следуют (19),(20) при $\xi_j=\eta_j=$ $=\beta$. Таким образом, справедливы утверждения лемм 2 и 3 при $\xi_j=\eta_j=\beta$, которые можно записать в виде: $0\le\overline{m}_i\le\overline{m}_i^0$, $0\le\overline{m}_{i+1}\le\overline{m}_{i+1}^0$, что согласно лемме 4 и доказывает утверждение теоремы.

Для эрмитовой интерполяции условия леммы 4 являются необходимыми и достаточными. Для исследуемой здесь лагранжевой интерполяции условия теоремы только достаточны,но не необходимы, ибо такой характер имеют условия используемых лемм 2 и 3. Главное среди ограничений, еще раз подчеркнем, это требование строгой монотонности исходных данных.

Тем не менее несомненное достоинство теоремы - это ее конструктивность. Оценки для величин $\bar{m}_i$, $\bar{m}_{i+1}$ вычисляются независимо от параметров базовых функций, что позволяет свести задачу к задаче эрмитовой интерполяции. При этом дополнительное ограничение состоит в необходимости выполнения условий (29), которые для популярных на практике сплайнов (см., например, §3) выполняются достаточно просто.

§3. Приложения теории

В этом параграфе с точки зрения предлагаемой теории исследуются обобщенные сплайны из некоторого их подмножества, в частности, рассмотренные в [1].

1. Кубические сплайны порождаются базовыми функциями

$$\varphi_i(t) = t^3, \quad \psi_i(t) = (1-t)^3. \tag{32}$$

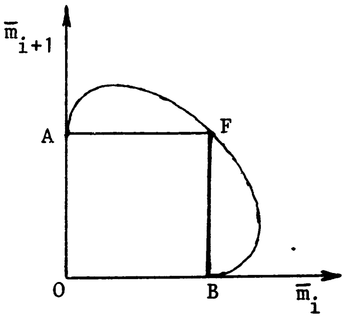

Рис.2

У них свободных параметров нет, и значения производных не зависят от индекса i: $\varphi_i'(1) = -\psi_i'(0) = \alpha = 3$, $\varphi_i''(1) = \psi_i''(0) = 6$, $\xi_i = \eta_i = \beta = 3/2$, $\zeta_i = \chi_i = \gamma = 2$, и условия (29) выполняются.

Применим теорему 1 для вывода достаточных условий монотонности кубических сплайнов, полученных ранее в [4,5]. Так как согласно (4) здесь $\Delta_i = -3$, то коэффициенты (6) системы (5) имеют значения

$\beta_i = \mu_i$, $c_i = \lambda_i$, $a_i = 2$, $d_i = 3(\lambda_i \delta_{i-1/2} + \mu_i \delta_{i+1/2})$, $i = 1, \dots, N-1$.

Граница Γ_i (27) области монотонности G_i в плоскости $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1})$ есть дуга эллипса с центром в точке O_2 (2,2), проходящего через точки A (0,3), F(3,3) и B(3,0) и касающегося осей координат в точках A и B (рис.2) [1,2]. В область G_i вписывается квадрат OAFB со стороной, равной 3, и поэтому в (30) можно брать $\bar{m}_i^0 \le 3$, $\bar{m}_{i+1}^0 \le 3$, $i = 0, \dots, N-1$. Тогда для монотонно возрастающих сплайнов эти неравенства принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \mu_i \delta_{i+1/2} &\le (1+\mu_i)\delta_{i-1/2}, \\ \lambda_i \delta_{i-1/2} &\le (1+\lambda_i)\delta_{i+1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

что налагает ограничения на исходные данные.

Граничные условия (7) нормируем так, чтобы $a_0 = a_N = 2$. Тогда для выполнения неравенств (14), требующихся для существования и единственности решения, должно быть $b_0 < 4$, $c_N < 4$, что было показано еще в [8].

Граничные неравенства (17) и $\bar{m}_0 \le 3, \bar{m}_N \le 3$ приводят к условиям

$$\left.\begin{aligned} &(b_0)_+(\lambda_1\delta_{1/2} + \mu_1\delta_{3/2}) \le \tfrac{2}{3} d_0 \le \\ &\qquad \le 4\delta_{1/2} - (-b_0)_+(\lambda_1\delta_{1/2} + \mu_1\delta_{3/2}), \\ &(c_N)_+(\lambda_{N-1}\delta_{N-3/2} + \mu_{N-1}\delta_{N-1/2}) \le \tfrac{2}{3} d_N \le \\ &\le 4\delta_{N-1/2} - (-c_N)_+(\lambda_{N-1/2}\delta_{N-3/2} + \mu_{N-1}\delta_{N-1/2}). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Отсюда следует, что

$$|b_0| \le 4\delta_{1/2}/(\lambda_1\delta_{1/2} + \mu_1\delta_{3/2}),$$

$$|c_N| \le 4\delta_{N-1/2}/(\lambda_{N-1}\delta_{N-3/2} + \mu_{N-1}\delta_{N-1/2}).$$

Если в (33) при $i = 0$ и/или $i = N-1$ достигаются равенства, то

$$|b_0| \le 2, \quad |c_N| \le 2. \tag{35}$$

Для граничных условий типа I из (8),(34) находим

$$0 \le f_0' \le 3\delta_{1/2}, \quad 0 \le f_N' \le 3\delta_{N-1/2}. \tag{36}$$

В граничных условиях типа П коэффициенты (9) в данном случае имеют значения

$$b_0 = c_N = 1, \; d_0 = 3\delta_{1/2} - h_0 f_0''/2, \; d_N = 3\delta_{N-1/2} + h_N f_N''/2.$$

Тогда из (34) получаем

$$\left.\begin{aligned} -(1+\mu_1)\delta_{1/2} + \mu_1\delta_{3/2} \le -\frac{1}{3} h_0 f_0'' \le 2\delta_{1/2}, \\ \lambda_{N-1}\delta_{N-3/2} - (1+\mu_{N-1})\delta_{N-1/2} \le \frac{1}{3} h_{N-1} f_N'' \le 2\delta_{N-1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ограничения (33), (35)-(37) получены в [5].

Для монотонно убывающих сплайнов знаки неравенств в (33), (34), (36), (37) должны быть изменены на противоположные.

Можно заметить, что из каждой пары этих неравенств, по крайней мере, одно выполняется строго.

2. Обобщенные кубические сплайны специального вида. Их базовые функции таковы, что наименьшие значения $\varphi_i'(1), -\psi_i'(0)$ равны 3, а наименьшие значения $\varphi_i''(1), \psi_i''(0)$ равны 6 и совпадают с соответствующими значениями для базовых функций (32) кубических сплайнов. Вследствие этого наибольшие значения ξ_i, η_i, равны $\beta = 3/2$, а наименьшие значения $\zeta_i(\beta)$, $\chi_i(\beta)$ равны $\gamma = 2$, т.е. тоже совпадают со значениями для базовых функций (32).

Покажем, что для этого множества базовых функций неравенства (29) выполняются, если следовать определенному правилу выбора в них свободных параметров. Оно заключается в следующем:

а) Если $\delta_{i+1/2} \geq \delta_{i-1/2}$, то из (30а) следует $\bar{m}_i^0 \leq$ $\leq 3/2$. Так как точка с координатой $\bar{m}_i^0 \leq -\psi_i'(0)$ будет принадлежать выпуклой области G_i независимо от значений свободных параметров функции $\psi_i(t)$, то рекомендуется брать $-\psi_i'(0) = 3$, $\psi_i''(0) = 6$, чему соответствует $\chi_i(\beta) = 2$. С другой стороны, из (30а) имеем $m_i^0/\delta_{i-1/2} = \tilde{m}_i^0 \geq 3/2$ и добиваться, чтобы точка с координатой $\tilde{m}_i^0$ принадлежала области монотонности G_{i-1}, рекомендуется при выборе $\varphi_{i-1}'(1) \geq 3$, $\varphi_{i-1}''(1) \geq 6$, $\zeta_{i-1}(\beta) \geq 2$, и (29) выполняется.

б) Если $\delta_{i+1/2} < \delta_{i-1/2}$, то $\bar{m}_i^0 > 3/2$, $\tilde{m}_i^0 < 3/2$. По аналогии с предыдущим здесь рекомендуется брать $-\psi_i'(0) \geq$ ≥ 3, $\psi_i''(0) \geq 6$, $\chi_i(\beta) \geq 2$, а $\varphi_{i-1}'(1) = 3$, $\varphi_{i-1}''(1) =$ $= 6$, $\zeta_{i-1}(\beta) = 2$, и снова (29) выполняется.

Таким образом, при следовании указанному правилу одна из базовых функций $\varphi_{i-1}(t)$ и $\psi_i(t)$, $i = 1,\ldots,N-1$, будет совпадать с таковой для кубических сплайнов. Функции $\psi_0(t)$ и $\varphi_{N-1}(t)$, зависящие от величин $\bar{m}_0^0, \bar{m}_N^0$ (31), на выполнение неравенств (29) не влияют.

Предлагается следующий порядок построения монотонного обобщенного интерполяционного сплайна класса C^2.

Шаг 1. По формулам (30), (31) вычисляются пары значений $\bar{m}_i^0$, $\bar{m}_{i+1}^0$, $i = 0,\ldots,N-1$. Значения $\bar{m}_0^0, \bar{m}_N^0$ особенно просты при граничных условиях типа I. Из (8) или (31а),(31б) получаем

$$\bar{m}_0^0 \leq f_0'/\delta_{1/2}, \quad \bar{m}_N^0 \leq f_N'/\delta_{N-1/2} . \tag{38}$$

Шаг 2. Находятся свободные параметры базовых функций из условий, чтобы в каждой плоскости $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1})$ прямоугольник P_i, образованный осями координат и линиями $\bar{m}_i = \bar{m}_i^0$, $\bar{m}_{i+1} =$ $= \bar{m}_{i+1}^0$, принадлежал выпуклой области монотонности G_i.

На практике используются базовые функции, имеющие по одному свободному параметру. Поэтому для каждого i множество кривых Γ_i на плоскости $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1})$ образует двупараметрическое семейство и обеспечить расширение области G_i можно разными способами.

Будем рассматривать в качестве параметров значения $\varphi_i'(1)$, $-\psi_i'(0)$, определяющие положение точек A и B (см.рис.1). Напоминаем, что там, где возможно, следует пользоваться базовыми функциями для кубических сплайнов. Если $\bar{m}_i^0 \le 3$, $\bar{m}_{i+1}^0 \le 3$, то таковыми будут обе базовые функции и $\varphi_i'(1) = -\psi_i'(0) = 3$. Если нарушено только одно из неравенств, например, первое, то $\varphi_i(t)$ берется из (32) и $\varphi_i'(1) = 3$. Через точки $A(0,3)$ и $E(\bar{m}_i^0, \bar{m}_{i+1}^0)$ проводим прямую

$$\bar{m}_{i+1} - \bar{m}_{i+1}^0 = k_i(\bar{m}_i - \bar{m}_i^0), \qquad (39)$$

где $k_i = (\bar{m}_{i+1}^0 - 3)/\bar{m}_i^0$. Ее пересечение с осью $\bar{m}_i$ принимаем в качестве точки $B(-\psi_i'(0), 0)$, где $-\psi_i'(0) = \bar{m}_i^0 - \bar{m}_{i+1}^0/k_i > 3$. Очевидно, будет $P_i \in G_i$. Если с (32) совпадает $\psi_i(t)$, то $k_i = \bar{m}_{i+1}^0/(\bar{m}_i^0 - 3)$, $\varphi_i'(1) = \bar{m}_{i+1}^0 - k_i \bar{m}_i^0$.

Если $\bar{m}_i^0 > 3$, $\bar{m}_{i+1}^0 > 3$, то решение задачи дает любая прямая пучка (39) при $-\infty < k_i < 0$. Стремясь избежать больших отклонений базовых функций от функций (32), выбираем ту прямую пучка, которая дает минимальную длину отрезка AB, т.е. решает задачу $\min\limits_{k_i}\{[\varphi_i'(1)]^2 + [\psi_i'(0)]^2\}$. В этом случае

$k_i = -\sqrt[3]{\bar{m}_i^0/\bar{m}_{i+1}^0}$. Очевидно, будет $P_i \in G_i$.

В случае, если границей области G_i будет прямая (28), то точка $E(\bar{m}_i^0, \bar{m}_{i+1}^0)$ будет лежать на границе. Но в случае криволинейной границы Γ_i (27) значения параметров $\varphi_i'(1)$, $-\psi_i'(0)$ могут оказаться сильно завышенными и точка E будет лежать на удалении от Γ_i. На практике это приведет к спрямлению соответствующего звена сплайна. Поэтому предлагается делать несколько итераций по выбору параметров в диапазонах

$$\max(3, \bar{m}^0_{i+1}) \le \varphi_i'(1) \le \bar{m}^0_{i+1} - k_i \bar{m}^0_i,$$

$$\max(3, \bar{m}^0_i) \le -\psi_i'(0) \le \bar{m}^0_i - \bar{m}^0_{i+1}/k_i.$$

Можно применять два способа. Первый заключается в аппроксимации кривой Γ_i ломаной при выбранных $\varphi_i'(1)$, $-\psi_i'(0)$ из указанных диапазонов и проверке принадлежности точки E выпуклому многоугольнику. Достаточно брать два (см.рис.1) или три звена ломаной: первое с уравнением $\bar{m}_{i+1} = \varphi_i'(1)$, третье - $\bar{m}_i = -\psi_i'(0)$. Приходится решать одно или два уравнения (27) для определения значений τ, отвечающих вершинам ломаной.

Второй способ заключается в построении кривой Γ_i, горизонтального и вертикального звеньев ломаной на дисплее ПЭВМ и наблюдении точки E относительно получающейся области.

<u>Шаг 3</u>. С найденными значениями свободных параметров базовых функций вычисляются коэффициенты (6), a_0, b_0, d_0, a_N, c_N, d_N и решается задача интерполяции, т.е. система (5), (7).

Проиллюстрируем этот процесс на примерах.

Кубические сплайны с дополнительными узлами имеют базовые функции в виде усеченных степенных функций вида

$$\varphi_i(t) = \frac{(t-p_i)^3_+}{(1-p_i)^3}, \qquad \psi_i(t) = \frac{(q_i-t)^3_+}{q_i^3}, \tag{40}$$

где $0 \le p_i < 1$, $0 < q_i \le 1$. Значения p_i, q_i - это координаты дополнительных узлов на промежутке $[0,1]$. При $p_i = 0$, $q_i = 1$ формулы (40) переходят в (32).

Из (40) получаем

$$\varphi_i'(1) = 3(1-p_i)^{-1}, \quad \psi_i'(0) = -3q_i^{-1},$$

$$\varphi_i''(1) = 6(1-p_i)^{-2}, \quad \psi_i''(0) = 6q_i^{-2} .$$

Согласно (22), (24)

$$\xi_i = 3(2+p_i)^{-1}, \qquad \eta_i = 3(3-q_i)^{-1} ,$$

$$\zeta_i(\beta) = 3(1-p_i)[3-\beta(1-p_i)]^{-1} ,$$

$$\chi_i(\beta) = 3q_i^{-1}(3-\beta q_i)^{-1}.$$

Отсюда наибольшие значения ξ_i, η_i и наименьшие значения $\zeta_i(\beta)$, $\chi_i(\beta)$ достигаются при $p_i = 0$, $q_i = 1$ и равны $\beta = 3/2$, $\gamma = 2$.

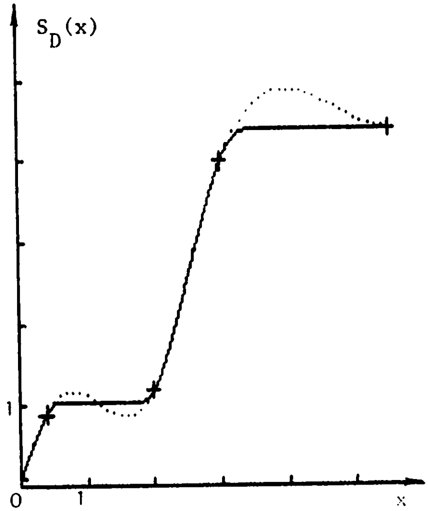

Рис. 3

Таким образом, сплайны с дополнитель - ными узлами принадлежат к рассматриваемому множеству обобщенных сплайнов. К ним применимы описанные выше алгоритмы построения. Границами областей G_i могут быть и прямые (28) и кривые Γ_i (27), являющиеся здесь кривыми второго порядка, описанными подробно в [1].

Пример такого сплайна с граничными условиями типа I приведен на рис.3. Здесь же пунктиром показан кубический сплайн, пост - роенный по тем же исходным данным, которые не удовлетворяют условиям его монотонности (33).

Рациональные сплайны генерируются базовыми функциями

$$\varphi_i(t) = \frac{t^3}{1+p_i(1-t)}, \quad \psi_i(t) = \frac{(1-t)^3}{1+q_it}, \tag{41}$$

где ограничиваемся случаем $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$. Из (41) получаем

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i'(t) &= \frac{3t^2}{1+p_i(1-t)} + \frac{p_it^3}{[1+p_i(1-t)]^2}, \\ \psi_i'(t) &= -\frac{3(1-t)^2}{1+q_it} - \frac{q_i(1-t)^3}{[1+q_it]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i'(1) = 3 + p_i, \quad \psi_i'(0) = -(3 + q_i), \\ &\varphi_i''(1) = 2(3+3p_i+p_i^2), \quad \psi_i''(0) = 2(3+3q_i+q_i^2). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Тогда

$$\Delta_i = -[3+2(p_i+q_i)+p_iq_i],$$

$$\xi_i = \frac{3+p_i}{2+p_i}, \qquad \eta_i = \frac{3+q_i}{2+q_i},$$

$$\zeta_i(\beta) = \frac{3+2p_i+p_i^2}{3+p_i-\beta}, \quad \chi_i(\beta) = \frac{3+2q_i+q_i^2}{3+q_i-\beta}.$$

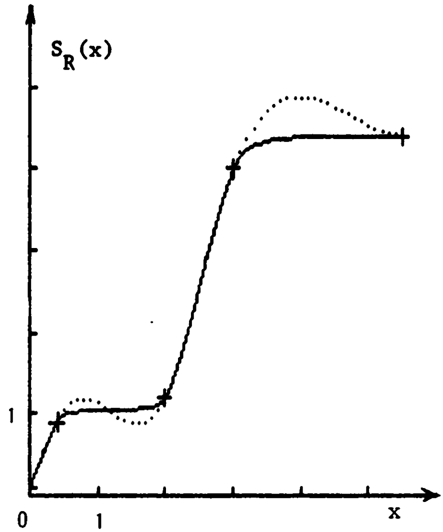

Рис. 4

Отсюда следует, что наибольшие значения ξ_i, η_i и наименьшие значения $\zeta_i(\beta)$, $\chi_i(\beta)$ достигаются, при $p_i = q_i = 0$ и равны $\beta = 3/2$, $\gamma = 2$ соответственно.

Таким образом, рациональные сплайны принадлежат к рассматриваемому множеству обобщенных сплайнов. Для рациональных сплайнов всегда $Q_i(t) > 0$, границы Γ_i областей монотонности G_i определяются уравнениями (27) и касаются осей координат. Случай прямой (28) здесь не возникает.

Пример рационального сплайна с граничными условиями типа I приведен на рис. 4. Он построен по тем же исходным данным, что и сплайн на рис.3. Снова для сравнения приведен кубический сплайн.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., БОГДАНОВ В.В. Монотонная и выпуклая эрмитова интерполяция обобщенными кубическими сплайнами //Сплайны и их применения. - Новосибирск, 1991. - Вып. 142: Вычислительные системы. - С. 15-46.

2. FRITSCH F.N., CARLSON R.E. Monotone piecewise cubic interpolation //SIAM J.Numer. Anal. - 1980. - Vol. 17, N 2. - P. 231-239.

3. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Приближение функций сплайнами //Сплайны в инженерной геометрии. - Новосибирск, 1981.- Вып.86: Вычислительные системы. - С. 9-24.

4. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation //Constructive Theory of Function. Sofia,1984.-P.610-620.

5. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып. 137: Вычислительные системы. - С. 31-57.

6. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. О теории обобщенных кубических сплайнов //Там же. - С. 58-90.

7. КВАСОВ Б.И., ЯЦЕНКО С.А. Изогеометрическая интерполяция рациональными сплайнами //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1987. - Вып. 121: Вычислительные системы. -С. 11-36.

8. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972. - 318 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

23 ноября 1992 года