ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1992 год Выпуск 147

УДК 519.624.3

РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $2m$-ГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙНА СТЕПЕНИ $2m-1$

Б.С.Киндалев

В статье предлагается сплайновый метод решения периодической краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения $2m$-го порядка. Решение ищется в виде сплайна степени $2m-1$ дефекта 1 с узлами на равномерной сетке с шагом h. Алгоритм построения сплайна сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов разложения сплайна по B-сплайнам. При этом система уравнений имеет простейшие коэффициенты, которые получаются простым сносом коэффициентов исходного дифференциального уравнения в узлы сетки.

В работе доказано, что приближенное решение, полученное в виде сплайна, сходится к точному со скоростью $O(h^2)$. Однако, для дифференциальных уравнений частного вида скорость сходимости повышается от $O(h^4)$ до $O(h^{2m})$ в зависимости от конкретного вида уравнения.

Отметим работы [1,2], где при численном решении краевых задач также применяется подход, основанный на использовании сплайна, степень которого на единицу меньше, чем порядок дифференциального уравнения. Однако, в этих работах рассматриваются краевые задачи только четвертого порядка, причем частного вида. Кроме того, построение сплайна сводится к решению системы разностных уравнений относительно узловых значений сплайна. Такой подход в применении к нашей задаче привел бы к системе уравнений со сложными коэффициентами, получение которой наталкивается на чисто технические трудности.

Рассмотрим задачу об отыскании ω-периодического решения уравнения

$$Ly \equiv y^{(2m)}(x) + \sum_{\nu=0}^{2m-1} a_\nu(x) y^{(\nu)}(x) = f(x), \quad m \geq 2, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_\nu(x)$, $\nu = 0, \ldots, 2m-1$ и правая часть $f(x)$ непрерывны и ω-периодические. Предполагается, что однородное уравнение $Ly = 0$ имеет в C^{2m} лишь тривиальное решение (C^{2m} - пространство ω-периодических $2m$ раз непрерывно дифференцируемых функций).

Введем равномерную сетку Δ : $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = \omega/N$. Приближенное решение задачи (1) будем искать в виде ω-периодического сплайна $S(x)$ степени $2m-1$ дефекта 1, т.е. на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, N-1$, сплайн $S(x)$ - полином степени $2m-1$; $S(x) \in C^{2m-2}[0, \omega]$ и $S(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям: $S^{(k)}(0) = S^{(k)}(\omega)$, $k = 0, \ldots, 2m-2$.

Периодически продолжим на всю вещественную прямую сетку Δ и $S(x)$. Известно [3], что, если $S(x)$ интерполирует в узлах сетки Δ ω-периодическую функцию $u(x)$, то

$$S(x_i) = u(x_i),$$

$$S^{(p)}(x_i) = u^{(p)}(x_i) + O(h^{2m+1-p}), \quad u(x) \in C^{2m+1},$$

$$p \text{ - нечетное}, \quad 1 \leq p \leq 2m-3;$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{S^{(2m-1)}(x_i+0)+S^{(2m-1)}(x_i-0)}{2} = u^{(2m-1)}(x_i)+O(h^2), \\
&\qquad\qquad u(x)\in C^{2m+1}; \\
&\frac{S^{(2m-1)}(x_i+0)-S^{(2m-1)}(x_i-0)}{h} = u^{(2m)}(x_i)+O(h^{2m}), \\
&\qquad\qquad u(x)\in C^{4m}; \\
&S^{(p)}(x_i) + \\
&+\frac{B_{2m-p}}{(2m-p)!}\, h^{2m-p}\, \frac{S^{(2m-1)}(x_i+0)-S^{(2m-1)}(x_i-0)}{h} = \\
&\qquad = u^{(p)}(x_i)+O(h^{2m+2-p}), \\
&\qquad\qquad u(x)\in C^{2m+2}; \\
&\qquad p \text{ - четное}, \quad 2\le p\le 2m-2,
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

где B_k - числа Бернулли [4].

Используя эти соотношения для аппроксимации производных $y^{(k)}(x)$, $k=0,\ldots,2m$, в уравнении (1) на сетке Δ, приходим к N соотношениям

$$\frac{S^{(2m-1)}(x_i+0)-S^{(2m-1)}(x_i-0)}{h} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{2m-1} a_{\nu,i}[S^{(\nu)}(x_i+0) +$$

$$+\frac{B_\nu}{(2m-\nu)!}h^{\nu-1}(S^{(2m-1)}(x_i+0)-S^{(2m-1)}(x_i-0))]=f_i, \quad (3)$$

$$i=1,\ldots,N,$$

где $a_{\nu,i}=a_\nu(x_i)$, $f_i=f(x_i)$ и учтено, что все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме $B_1=-1/2$, равны нулю [4].

В дальнейшем для сплайна $S(x)$ будем использовать представление в виде разложения по нормализованным B-сплайнам [5]

$$S(x)=\sum_{k=-m+1}^{N+m-1}\alpha_k B_k(x), \quad x\in[0,\omega]. \quad (4)$$

В отличие от [5] нумерация B-сплайнов $B_k(x)$ ведется по средним узлам их интервалов-носителей.

Получим из (3) систему уравнений относительно коэффициентов α_k. Согласно [6] для нормализованных B-сплайнов $B_k(x)$ имеем

$$B_k^{(p)}(x_{k-m+1+l})=\frac{C^{(p)}_{2m-2-l,2m-1}}{h^p(2m-1-p)!},$$

$$l=0,\ldots,2m-2,\ p=0,\ldots,2m-2,$$

где $C^{(p)}_{j,n}=\nabla^{n+1}(r)_+^{n-p}$, $r=n-j$, ∇ - оператор разности назад с единичным шагом, $z_+=(z+|z|)/2$. Учитывая это соотношение и финитность $B_k(x)$, из (4) находим

$$S^{(p)}(x_i)=$$

$$=\frac{1}{(2m-1-p)!h^p}\sum_{j=0}^{2m-2}C^{(p)}_{j,2m-1}\alpha_{i-m+1+j}, \quad (5)$$

$$p=0,\ldots,2m-2.$$

Поскольку $S^{(2m-2)}(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид

$$S^{(2m-2)}(x) = tS^{(2m-2)}(x_{i+1}) + (1-t)S^{(2m-2)}(x_i),$$

$$t = (x-x_i)/h,$$

то

$$\left.\begin{aligned} S^{(2m-1)}(x_i+0) &= \frac{S^{(2m-2)}(x_{i+1}) - S^{(2m-2)}(x_i)}{h}, \\ S^{(2m-1)}(x_i-0) &= \frac{S^{(2m-2)}(x_i) - S^{(2m-2)}(x_{i-1})}{h}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Из (6), (5), используя соотношения [6,7]

$$\left.\begin{aligned} C^{(l)}_{k,l+1} &= C^{(l-1)}_{k-1,l} - C^{(l-1)}_{k,l}, \quad k = 0,\dots, l, \\ C^{(l-1)}_{-1,l} &= C^{(l-1)}_{l,l} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} S^{(2m-1)}(x_i+0) &= \frac{1}{h^{2m-1}} \sum_{j=0}^{2m-1} C^{(2m-1)}_{j,2m} \alpha_{i-m+1+j}, \\ S^{(2m-1)}(x_i-0) &= \frac{1}{h^{2m-1}} \sum_{j=0}^{2m-1} C^{(2m-1)}_{j,2m} \alpha_{i-m+j}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

В [7] доказано, что

$$C^{(2m-1)}_{j+1,2m+1} = C^{(2m-1)}_{j,2m} + C^{(2m-1)}_{j+1,2m}, \quad j = -1,\dots,2m-1.$$

Поэтому из (8) имеем

$$\frac{S^{(2m-1)}(x_i+0)+S^{(2m-1)}(x_i-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2h^{2m-1}} \sum_{j=0}^{2m} C^{(2m-1)}_{j,2m+1}\alpha_{i-m+j} . \qquad (9)$$

Далее, учитывая (7), из (8) получаем

$$\frac{S^{(2m-1)}(x_i+0)-S^{(2m-1)}(x_i-0)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} C^{(2m)}_{j,2m+1}\alpha_{i-m+j} . \qquad (10)$$

Подставляя в (3) найденные выражения и замыкая полученные со - отношения условиями периодичности сплайна, приходим к следую - щей системе уравнений

$$\frac{1}{h^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} C^{(2m)}_{j,2m+1}\alpha_{i-m+j} +$$

$$+ \frac{a_{2m-1,i}}{2h^{2m-1}} \sum_{j=0}^{2m} C^{(2m-1)}_{j,2m+1}\alpha_{i-m+j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{2k,i}}{h^{2k}(2m-2k)!} \sum_{j=0}^{2m} [B_{2m-2k}C^{(2m)}_{j,2m+1} +$$

$$+ (2m-2k)C^{(2k)}_{j-1,2m-1}]\alpha_{i-m+j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{2k-1,i}}{h^{2k-1}(2m-2k+1)!} \sum_{j=0}^{2m-2} C^{(2k-1)}_{j,2m-1}\alpha_{i-m+j+1} +$$

$$+ \frac{a_{0,i}}{(2m-1)!} \sum_{j=0}^{2m-2} C^{(0)}_{j,2m-1} \alpha_{i-m+j+1} = f_i , \qquad (11)$$

$$i = 1,\dots, N ,$$

где $\alpha_{-j} = \alpha_{N-j}$, $j = 0,\dots, m-1$, $\alpha_{N+j} = \alpha_j$, $j = 1,\dots$ $\dots, m$.

Для вычисления коэффициентов $C^{(p)}_{j,n}$ можно использовать полученные в [7] рекуррентную

$$C^{(p)}_{j,n+1} = (n+1-j) C^{(p)}_{j-1,n} + (j+1) C^{(p)}_{j,n} ,$$

$$j = 0,\dots, n,$$

$$C^{(p)}_{-1,n} = C^{(p)}_{n,n} = 0, \quad p = 0,\dots, n-1,$$

или явные формулы

$$\left.\begin{aligned} C^{(p)}_{j,n} &= \sum_{k=0}^{n-1-j} (-1)^k \binom{n+1}{k} (n-j-k)^{n-p}, \\ C^{(s)}_{r,s+1} &= (-1)^{s+r} \binom{s}{r}, \quad r = 0,\dots, s, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где $\binom{\cdot}{\cdot}$ - биномиальные коэффициенты.

В качестве иллюстрации приведем два примера. Для уравнения 4-го порядка ($m = 2$) система (11) имеет вид:

$$\frac{\alpha_{i-2} - 4\alpha_{i-1} + 6\alpha_i - 4\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}}{h^4} +$$

$$+ a_{3,i} \frac{-\alpha_{i-2} + 2\alpha_{i-1} - 2\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}}{2h^3} +$$

$$+ a_{2,i}\,\frac{\alpha_{i-2}+8\alpha_{i-1}-18\alpha_i+8\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{12h^2}+$$

$$+ a_{1,i}\,\frac{-\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}}{2h}+a_{0,i}\,\frac{\alpha_{i-1}+4\alpha_i+\alpha_{i+1}}{6}=f_i,$$

$$i=1,\dots,N,$$

где $\alpha_{-1}=\alpha_{N-1},\ \alpha_0=\alpha_N,\ \alpha_{N+1}=\alpha_1,\ \alpha_{N+2}=\alpha_2.$

Для уравнения 6-го порядка $(m = 3)$ получаем

$$\frac{\alpha_{i-3}-6\alpha_{i-2}+15\alpha_{i-1}-20\alpha_i+15\alpha_{i+1}-6\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}{h^6}+$$

$$+ a_{5,i}\,\frac{-\alpha_{i-3}+4\alpha_{i-2}-5\alpha_{i-1}+5\alpha_{i+1}-4\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}{2h^5}+$$

$$+ a_{4,i}\,\frac{\alpha_{i-3}+6\alpha_{i-2}-33\alpha_{i-1}+52\alpha_i-33\alpha_{i+1}+6\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}{12h^4}+$$

$$+ a_{3,i}\,\frac{-\alpha_{i-2}+2\alpha_{i-1}-2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2h^3}+$$

$$+ a_{2,i}\,\frac{-\alpha_{i-3}+126\alpha_{i-2}+225\alpha_{i-1}-700\alpha_i+225\alpha_{i+1}+126\alpha_{i+2}-\alpha_{i+3}}{720h^2}+$$

$$+ a_{1,i}\,\frac{-\alpha_{i-2}-10\alpha_{i-1}+10\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{24h}+$$

$$+ a_{0,i}\,\frac{\alpha_{i-2}+26\alpha_{i-1}+66\alpha_i+26\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{120}=f_i,\ i=1,\dots,N$$

где $\alpha_{-2}=\alpha_{N-2}$, $\alpha_{-1}=\alpha_{N-1}$, $\alpha_0=\alpha_N$, $\alpha_{N+1}=\alpha_1$, $\alpha_{N+2}=\alpha_2$, $\alpha_{N+3}=\alpha_3$.

Систему (11) запишем в матричной форме

$$L_h\alpha_h = f_h, \tag{13}$$

где $\alpha_h = (\alpha_1,\dots,\alpha_N)^T$, $f_h=(f_1,\dots,f_N)^T$, L_h - циркулянтная матрица порядка N. Покажем, что при достаточно малых h существует L_h^{-1} и норма оператора L_h^{-1} равномерно ограничена по h.

Введем следующие обозначения [8]:

C_h - пространство ω-периодических сеточных функций $y_h=(\dots,y_{-j},\dots,y_{-1},y_0,y_1,\dots,y_j,\dots)$, $y_j=y_{j+N}$, $j=0,\pm1,\dots$, с нормой $\|y_h\|_0 = \max\limits_{1\le j\le N}|y_j|$;

$C_h^{(2m)}$ - пространство ω-периодических сеточных функций y_h с нормой $\|y_h\|_{2m}=\max\limits_{0\le k\le 2m}\|\bar D_h^k y_h\|_0$, $\bar D_h^k=(\bar D_h)^k$, $(\bar D_h y_h)_j=(y_{j+1}-y_j)/h$, $j=0,\pm1,\dots$.

Исходя из (2), с учетом соотношений (5), (9), (10), введем следующие формулы численного дифференцирования

$$y(x)\approx\frac{1}{(2m-1)!}\sum_{j=0}^{2m-2}C^{(0)}_{j,2m-1}y(x+(j+1-m)h), \tag{14}$$

$$y^{(2k+1)}(x)\approx$$

$$\approx\frac{h^{-2k-1}}{(2m-2k-2)!}\sum_{j=0}^{2m-2}C^{(2k+1)}_{j,2m-1}y(x+(j+1-m)h), \tag{15}$$

$$k=0,\dots,m-2,$$

$$y^{(2m)}(x) \approx \frac{1}{h^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} C_{j,2m+1}^{(2m)} y(x+(j-m)h), \qquad (16)$$

$$y^{(2k)}(x) \approx$$

$$\approx \frac{h^{-2k}}{(2m-1-2k)!} \sum_{j=0}^{2m-2} C_{j,2m-1}^{(2k)} y(x+(j+1-m)h) +$$

$$+ \frac{B_{2m-2k} h^{-2k}}{(2m-2k)!} \sum_{j=0}^{2m} C_{j,2m+1}^{(2m)} y(x+(j-m)h), \qquad (17)$$

$$k = 1, \dots, m-1.$$

Используя формулы (14)-(17), построим для уравнения (1) разностную схему $L_h y_h = f_h$, которая представляет собой систему из N уравнений относительно N существенных компонент периодического вектора y_h.

Для доказательства существования оператора L_h^{-1} и оценки его нормы потребуется проверка выполнения условий теоремы 1 из [8]. Необходимо установить, во-первых, что формулы численного дифференцирования (14)-(17) являются сходящимися, и, во-вторых, что характеристические значения формулы (16) не лежат на единичной окружности. Согласно определению [8] характеристическими значениями формулы (16) являются нули многочлена $Q(\xi)$, который входит множителем в характеристическую функцию $\chi_{2m}(\xi)$ формулы численного дифференцирования (16)

$$\chi_{2m}(\xi) = \sum_{j=-m}^{m} C_{m+j,2m+1}^{(2m)} \xi^{j} = (\xi-1)^{2m} \xi^{-m} Q(\xi). \qquad (18)$$

Справедливость разложения $\chi_{2m}(\xi)$ в виде

$$\chi_{2m}(\xi) = (\xi-1)^{2m} \xi^{-m} Q(\xi)$$

следует из свойств сходящихся формул численного дифференцирования [8].

ЛЕММА 1. *Формулы (14)-(17) аппроксимируют соответствующие производные* $y(x)$ *со вторым порядком по* h.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\gamma_{j,r}^{(s)} = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{2r} C_{k,2r+1}^{(s)}(k-r)^j ,$$

$$s = 0,1,\ldots, 2r, \quad j = 0,1,\ldots$$

В [6] показано, что

$\gamma_{j,r}^{(s)} = 0$, если $j < s$ либо $s + j$ нечетно,

$\gamma_{s,r}^{(s)} = (2r+1-s)!$.

Заменяя в (14)-(17) величины $y(x+kh)$ их разложениями по формуле Тейлора в точке x и используя затем свойства величин $\gamma_{j,r}^{(s)}$, , получаем требуемый результат.

Выясним расположение характеристических значений формулы численного дифференцирования (16). Так как согласно (12)

$$C_{k,2m+1}^{(2m)} = (-1)^k \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} ,$$

из (18) имеем $\chi_{2m}(\xi) = (\xi-1)^{2m}\xi^{-m}$. Следовательно, характеристические значения формулы численного дифференцирования для $y^{(2m)}(x)$ не лежат на единичной окружности. Объединяя полученное утверждение с леммой 1, в силу замечания 1 к теореме 1 из [8] при достаточно малых h имеем $L_h^{-1} \in \mathcal{L}(C_h, C_h^{(2m)})$, причем $\|L_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(C_h, C_h^{(2m)})}$ равномерно ограничена по h.

Поскольку

$$\|L_h^{-1}\|_{\mathscr{L}(C_h,C_h)} = \sup_{\|f\|_0\neq 0} \frac{\|L_h^{-1}f\|_0}{\|f\|_0} \leq$$

$$\leq \sup_{\|f\|_0\neq 0} \frac{\|L_h^{-1}f\|_{2m}}{\|f\|_0} = \|L_h^{-1}\|_{\mathscr{L}(C_h,C_h^{(2m)})},$$

то справедлива следующая

ЛЕММА 2. *При всех достаточно малых* h *существует* $L_h^{-1} \in \mathscr{L}(C_h,C_h)$ *, причем* $\|L_h^{-1}\|_{\mathscr{L}(C_h,C_h)} \leq K$, *где* $K > 0$ *- константа, не зависящая от* h .

Теперь приступим к доказательству основного результата, касающегося оценки погрешности приближенного метода.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $f(x), a_k(x) \in C^2$, $k = 0,\dots, 2m-1$. *Тогда при достаточно малых* h *имеет место оценка* $\|S-y\|_C = O(h^2)$.

Если $a_j(x) \equiv a_{j+1}(x) \equiv \dots \equiv a_{2m-1}(x) \equiv 0$, $j \geq 3$, *и* $f(x), a_k(x) \in C^{2m-2[j/2]+2}$, $k = 0,\dots,j-1$, $[\cdot]$ *- целая часть числа, то при достаточно малых* h *имеем*

$$\|S-y\|_C = O(h^{2m-2[j/2]+2}) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(y;x)$ - ω-периодический полиномиальный сплайн степени $2m-1$ дефекта 1 с узлами Δ, интерполирующий в узлах сетки Δ точное решение $y(x)$ задачи (1).

Представим $S(y;x)$ в виде разложения по нормализован - ным B-сплайнам

$$S(y;x) = \sum_{k=-m+1}^{N+m-1} \tilde{\alpha}_k B_k(x), \quad x \in [0,\omega].$$

Имеем

$$|S(x)-y(x)| \le |S(x)-S(y;x)| + |S(y;x)-y(x)|.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства. Согласно [9] имеем

$$|S(y;x)-y(x)| = O(h^{2m}). \tag{19}$$

Учитывая выражение для $S(x)$, получаем

$$|S(x)-S(y;x)| \le$$

$$\le \sum_{k=-m+1}^{N+m-1} |\alpha_k - \tilde{\alpha}_k| \, |B_k(x)| \le \max_k |\alpha_k - \tilde{\alpha}_k|.$$

В последнем неравенстве используется неотрицательность B-сплайнов и тождество $\sum_k B_k(x) \equiv 1$ [5].

Обозначим через $\psi_h = (\psi_1, \dots, \psi_N)^T$ вектор невязки

$$\psi_h = L_h \tilde{\alpha}_h - f_h, \tag{20}$$

где $\tilde{\alpha}_h = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_N)$.

Учитывая (13), имеем $L_h(\alpha_h - \tilde{\alpha}_h) = \psi_h$. Отсюда в силу леммы 2 получаем

$$\|\alpha_h - \tilde{\alpha}_h\|_0 \le \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(C_h, C_h)} \|\psi_h\|_0 \le K \|\psi_h\|_0 , \tag{21}$$

где $K > 0$ не зависит от h.

Оценим $\|\psi_h\|_0$. Заметим, что при $f(x), a_k(x) \in C^r$, $k = 0, \dots, 2m-1$, точное решение задачи (1) $y(x) \in C^{2m+r}$. Поэтому, принимая во внимание (2), из (20) получаем, что

$$\|\psi_h\|_0 = O(h^2), \quad \text{если} \quad y(x) \in C^{2m+2},$$

$$\|\psi_h\|_0 = O(h^{2m-2[j/2]+2}), \text{ если } y(x) \in C^{4m-2[j/2]+2},$$

$$a_j(x) \equiv a_{j+1}(x) \equiv \ldots \equiv a_{2m-1}(x) \equiv 0, \ j \geq 3.$$

Теперь объединяя оценки (19) и (21), убеждаемся в справедливости теоремы.

Из оценки погрешности видно, что в случае общего уравнения, предложенный способ получения приближенного решения дает сходимость приближенного решения к точному со вторым порядком относительно h (сплайн-метод точности $O(h^2)$).Однако,скорость сходимости автоматически повышается по мере обнуления коэффициентов в уравнении (1). При $a_{2m-1}(x) \equiv 0$ приближенное решение сходится к точному со скоростью $O(h^4)$.Если $a_{2m-1}(x) \equiv a_{2m-2}(x) \equiv a_{2m-3}(x) \equiv 0$, то скорость сходимости $O(h^6)$.

В частном случае, когда в уравнении (1) кроме $a_0(x)$, $a_1(x), a_2(x)$ все коэффициенты равны нулю, достигается максимальная скорость сходимости $O(h^{2m})$.

Разные по порядку оценки погрешности вызваны неодинаковым порядком точности формул (2), которые используются при аппроксимации производных. Хуже всех (с точностью $O(h^2)$) приближается $u^{(2m-1)}(x_i)$, отсюда в общем случае следует сходимость $O(h^2)$ приближенного решения к точному. Возникает вопрос, можно ли увеличить порядок точности сплайн-метода, если $a_{2m-1}(x) \not\equiv 0$? Ответ будет положительным. Сделать это можно несколькими способами. В частности, повысить порядок точности сплайн-метода можно путем привлечения дифференциальных следствий исходного дифференциального уравнения, подобно тому, как это делается в разностных методах (см.,например,[10,с.538-539] применительно к краевой задаче второго порядка). Однако, при этом подходе существенно усложняются коэффициенты соответст - вующей системы линейных уравнений.

Другой способ - это аппроксимация производных, входящих в уравнение, с большей точностью. Такие формулы и способ их по- лучения приведены автором в [11]. Например, для получения сплайн-метода точности $O(h^4)$ для аппроксимации $y^{(2m-1)}(x_i)$ используем следующую формулу

$$\frac{S^{(2m-2)}(x_{i+1})-S^{(2m-2)}(x_{i-1})}{-2h} -$$

$$-\frac{\mu\delta^2 S^{(2m-2)}(x_i)}{24h} = u^{(2m-1)}(x_i)+O(h^4),$$

где $\mu y_i = y_{i+1} - y_{i-1}$, $\delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$.

В терминах коэффициентов α_k формула имеет вид

$$-\frac{1}{24h^{2m-1}} \sum_{j=0}^{2m+2} (C^{(2m)}_{j,2m+1} + C^{(2m)}_{j-2,2m+1} -$$

$$-12C^{(2m)}_{j-1,2m+1})\alpha_{i-m-1+j} = u^{(2m-1)}(x_i)+O(h^4).$$

Однако применение этой формулы приводит к увеличению шаблона. Каждое из уравнений в (11) будет иметь на 2 неизвестных боль - ше.

Литература

1. PAPAMICHAEL N., WORSEY A.J. A cubic spline method for the solution of a linear fourth-order two-point boundary value problem //J.Comp. and appl. math.- 1981.-Vol.7, N3. -P.187-189.

2. HOSKINS W.D. Cubic spline solutions to fourth-order boundary value problems //Communications of the ACM. - 1973. - Vol. 16, N 6. - P. 382-395.

3. КИНДАЛЕВ Б.С. О точности приближения периодическими интерполяционными сплайнами нечетной степени //Методы сплайн-функций в численном анализе. - Новосибирск, 1983. - Вып. 98: Вычислительные системы. - С. 67-82.

4. АБРАМОВИЦ М., СТИГАН Н. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979. - 832 с.

5. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

6. ALBASINY E.L., HOSKINS W.D. Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh //J.Inst.Math. Appl. - 1973. - Vol.12, N3. - P.303-318.

7. FYFE D.J. Linear dependence relations connecting equal interval N-th degree splines and their derivatives //J. Inst. Math. Appl. -1971. - Vol. 7. -P. 398-406.

8. ВАЙНИККО Г.М. О сходимости разностного метода в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений //Журн. вычисл. математики и мат.физики. - 1975. - Т. 15, № 1. - С. 87-100.

9. АЛЬБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972. - 316 с.

10. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы.1. - М.: Наука, 1973. - 631 с.

11. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотические формулы для сплайнов нечетной степени и аппроксимация производных высокого порядка // Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1982. - Вып. 93: Вычислительные системы. - С. 39-52.

Поступила в ред.-изд.отд.
3 декабря 1992 года