ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1992 год Выпуск 147

УДК 519.615:519.624

# О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

С.И. Фадеев

Эта статья посвящается памяти Владимира Никифоровича Вилюнова. Задуманная по его инициативе как совместная работа,она несомненно была бы в этом случае более содержательной. При исследовании интегрального уравнения Абеля в связи с теорией зажигания он обратил внимание на противоречие с численными данными, приведенными в работе [1]. В данной статье описывается численный эксперимент, подтверждающий правильность его представлений.

В рамках одномерной теории зажигания горючей газовой смеси рассматривается следующее уравнение Абеля [1]:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{Z(s)ds}{[t-s]^{1/2}} = q\{1/t^{1/2}-[1/t-(1-Z(t))^n]^{1/2}\}, \quad (1)$$

$$t > 0, \quad Z(0) = 0 .$$

Здесь $n$ и $q$ - положительные параметры. Применив правило дифференцирования нецелого порядка, преобразуем (1) к виду:

$$\left.\begin{aligned} &U(t) = 1-\{1-t[1-Z(t)]^n\}^{1/2}, \quad U(0)= 0, \\ &\frac{q}{\pi}\int_0^t \frac{U(s)ds}{[s(t-s)]^{1/2}} = 1-\{U(t)[2-U(t)]/t\}^{1/n}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

В зависимости от значений параметров $n$ и $q$ длина интервала по $t$, $t \in (0,T)$, на котором существует решение (1), или решение (2), имеющее физический смысл, может быть как конечной так и бесконечной. В случае конечного $T$, определяемого как время зажигания, выполняются условия:

$$z(T) = 1-1/T^{1/n}, \quad U(T) = 1. \tag{3}$$

Отметим, что правая часть уравнения (2) определена для $0 < U(t) < 2$, т.е. для бо́льших значений $U(t)$, чем это предусмотрено условиями (3).

Решение интегрального уравнения (2) формально можно представить в виде степенного ряда по $t$:

$$U(t) = c(1)t + c(2)t^2 + c(3)t^3 + c(4)t^4 + \dots , \tag{4}$$

где

$$c(1) = 1/2,$$

$$c(2) = \frac{1-nq}{8},$$

$$c(3) = c(2)\frac{8-3nq}{16} + \frac{n(n-1)q^2}{64},$$

$$c(4) = c(3)\frac{16-5nq}{32} +$$

$$+ \frac{c(2)}{2}\left[c(2) + \frac{3n(n-1)q^2}{32}\right] - \frac{n(n-1)(n-2)q^3}{768}$$

и т.д. Коэффициенты ряда легко вычисляются, например, при $n = 1/2, 1, 2$. Оценка радиуса сходимости (4) нам не известна. В дальнейшем это представление $U(t)$ использовалось для сопоставления с численным решением уравнения (2).

Интересно, что при $n = q = 1$ все коэффициенты $c(k)$, $k > 1$, равны 0. Таким образом, точное решение (2) в этом случае имеет вид: $U(t) = t/2$ , $t > 0$. Отсюда следует, что $Z(t) = t/4$, $0 < t < T = 2$, $Z(T) = 1/2$.

Будем считать $T$ параметром задачи, а соответствующее ему значение $q$ определять из решения уравнения (2), где $T$ задано и $U(T) = 1$. (Легко убедиться, что $T > 1$ , если $q > 0$.) Метод численного построения зависимости $q(T)$ связан с приближенным переходом от интегрального уравнения (2) к его дискретной модели. С этой целью предварительно выполним в (2) замену независимой переменной: $t = Tx$, $0 < x \leq 1$ , и введем в рассмотрение сетку по $x$ :

$$0 = x(1) < x(2) < \ldots < x(N) < x(N+1) = 1 .$$

При этом из (2) следуют равенства:

$$u(i) = U[x(i)],\ i = 2,3,\ldots,N+1;\ u(1)=0,\ u(N+1)=1,$$

$$\frac{q}{\pi}\int_0^{x(i)} \frac{U(s)ds}{[s(x(i)-s)]^{1/2}} = 1-[u(i)(2-u(i))/T/x(i)]^{1/n} ,$$

или

$$\frac{q}{\pi}\sum_{k=1}^{i-1}\int_{x(k)}^{x(k+1)} \frac{U(s)ds}{[s(x(i)-s)]^{1/2}} =$$
$$= 1-[u(i)(2-u(i))/T/x(i)]^{1/n}. \qquad (5)$$

В каждом из интегралов суммы (5) приближенно заменим $U(x)$ на линейную функцию $V(x)$: $x \in [x(k), x(k+1)]$, $h = x(k+1) - -x(k)$, $V(x) = [(x-x(k))/h]u(k) + [(x(k+1)-x)/h]u(k+1)$. После интегрирования получим следующее выражение (с погрешностью порядка $h$ на решениях уравнения (2)):

$$\int\limits_{x(k)}^{x(k+1)} \frac{U(s)ds}{[s(x(i)-s)]^{1/2}} = [x(k+1)a(i,k)-b(i,k)]u(k) + $$

$$+ [b(i,k)-x(k)a(i,k)]u(k+1). \qquad (6)$$

где

$$a(i,k) = \left\{ \arcsin\left[\frac{2x(k+1)}{x(i)} - 1\right] - \right.$$

$$\left. - \arcsin\left[\frac{2x(k)}{x(i)} - 1\right]\right\} /h,$$

$$b(i,k) = \frac{x(i)a(i,k)}{2} +$$

$$+ \frac{x(k) + x(k+1) - x(i)}{\sqrt{x(k)[x(i)-x(k)]} + \sqrt{x(k+1)[x(i)-x(k+1)]}}.$$

Таким образом, принимая во внимание (5), приходим к дискретной модели интегрального уравнения (2), имеющей вид системы трансцендентных уравнений размерности $N$ со скалярным параметром $Q$,

$$\Phi(Y,Q) = 0, \qquad (7)$$

$$Y = [Y(1), Y(2), \ldots, Y(N)], \quad \Phi = [\Phi(1), \Phi(2), \ldots, \Phi(N)],$$

которая определяет приближенные сеточные значения $U(x)$ и $q$, в зависимости от параметра $Q = T$. Здесь

$$Y(1) = u(2),\ Y(2) = u(3), \ldots, Y(N-1) = u(N),\ Y(N) = \frac{q}{\pi},$$

$$\Phi(1) = Y(N)A(1,1)Y(1) - F(1),$$

$$\Phi(2) = Y(N)[A(2,1)Y(1) + A(2,2)Y(2)] - F(2),$$

$$\Phi(3) = Y(N)[A(3,1)Y(1) + \ldots + A(3,3)Y(3)] - F(3),$$

$$\Phi(4)= Y(N)[A(4,1)Y(1)+\ldots.+ A(4,4)Y(4)] - F(4),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Phi(N-1)= Y(N)[A(N-1,1)Y(1)+ A(N-1,2)Y(2)+ \ldots$$
$$\ldots + A(N-1, N-1)Y(N-1)] - F(N-1),$$

$$\Phi(N)= Y(N)[A(N,1)Y(1)+ A(N,2)Y(2)+ \ldots$$
$$\ldots + A(N,N-1)Y(N-1)+ A(N,N)]-F(N),$$

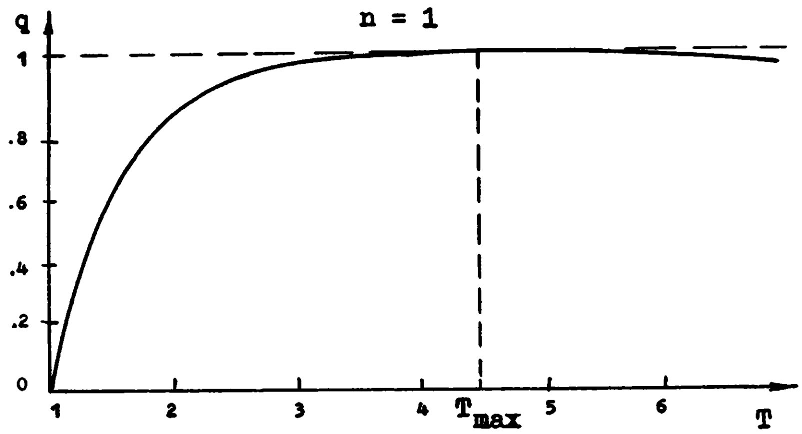
$$F(k)= [Y(k)(2-Y(k))/Q/x(k+1)]^{1/n}- 1,$$
$$k=1,2,\ldots, N.$$

Выражения коэффициентов $A(i,k)$, которые следуют из (6), мы приводить не будем.

Численное исследование зависимости решения системы (7) от параметра $Q$ проводилось по программе SYSTEM методом продолжения решения по параметру [2]. Используемая в SYSTEM параметризация, т.е. регулярный выбор "текущего" параметра системы (7) среди компонент вектора $Y$ и $Q$ для продолжения решения на один шаг, позволяет численно строить гладкую часть пространственной кривой, являющейся графиком вектор-функции $Y(Q)$ решения системы. Благодаря применению параметризации в сочетании с методом Ньютона, непрерывное продолжение решения реализуется и в том случае, когда имеет место ветвление решений по параметру $Q$ типа "поворот".

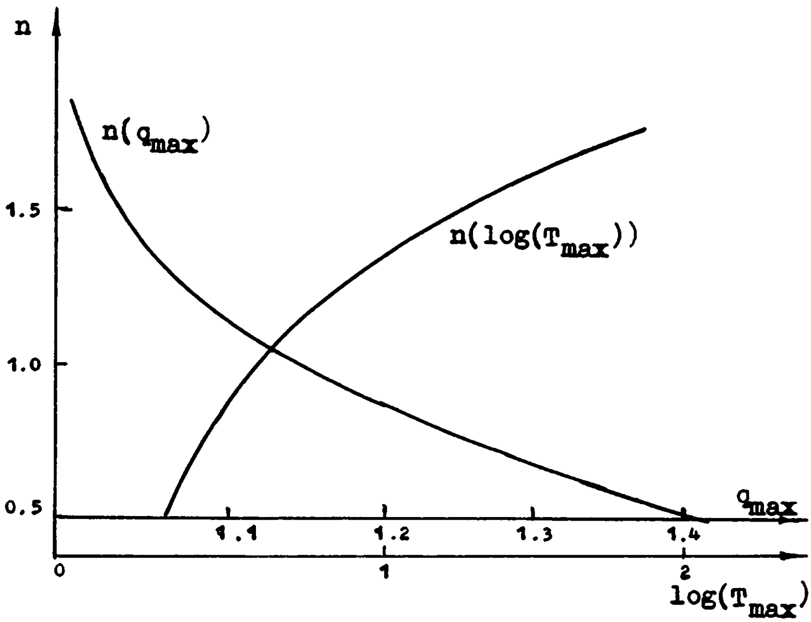
Как оказалось, для $n < 2$ существует "критическое" значение $q = q_{max}$, когда соответствующее значение $T=T_{max}$ еще конечно. На рис.1 приведена характерная зависимость $q(T)$ при $n=1$. Здесь $T_{max} = 4.525$, $q_{max} = 1.151$. При $q > q_{max}$ решение интегрального уравнения (1) определено для всех $t>0$.

Важно отметить, что при $t>T_{max}$ решение системы (7) теряет физический смысл по отношению к интегральному уравнению (1), так как некоторые из значений $U(t)$ становятся больше 1.



n = 1
q
1
.8
.6
.4
.2
0
1
2
3
4
$T_{max}$
5
6
T


Рис. 1



n
$n(q_{max})$
$n(\log(T_{max}))$
1.5
1.0
0.5
$q_{max}$
1.1
1.2
1.3
1.4
0
1
2
$\log(T_{max})$


Рис. 2

Тем не менее, преобразование интегрального уравнения (1) к виду (2) позволило определить $q_{max}$ как значение параметра $q$ , при котором имеет место ветвление решений (7) типа "поворот". Программа SYSTEM дает возможность эффективно найти как $T_{max}$ , так и $q_{max} = q(T_{max})$ .

На рис.2 представлена зависимость $q_{max}$ и $T_{max}$ от $n$ . Обратим внимание на неограниченный рост $T_{max}$ при стремлении $n$ к 2, что подтверждает предположение, высказанное автору Владимиром Никифоровичем Вилюновым.

## Литература

1. БЕРМАН В.С., РЯЗАНЦЕВ Ю.С. Асимптотический анализ зажигания газа накаленной поверхностью //Журнал прикладной механики и технической физики. - 1977. - № 1 (101). - С. 61-67.

2. ДЯТЛОВ В.Л., КОНЯШКИН В.В., ПОТАВОВ Б.С., ФАДЕЕВ С.И. Пленочная электромеханика. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1991. - 248 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
14 декабря 1992 года