ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНФОРМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1993 год Выпуск 148

УДК 517.11

ТЕОРЕМА ЛЕВЕНГЕЙМА-СКУЛЕМА-МАЛЬЦЕВА ДЛЯ ОПРЕДЕЛИМЫХ МОДЕЛЕЙ*)

Ю.Л.Ершов

В заметке [1] автором было определено понятие Σ-определимой модели в допустимом множестве как обобщение понятия конструктивизируемой модели (см. [2]). Одной из главных целей такого расширения понятия конструктивизируемости была возможность рассмотрения и несчетных моделей.

В настоящей статье будет изучено явление Левенгейма-Скулема (спуск) и Мальцева (подъем) для моделей, определимых в допустимых множествах вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ имеет категоричную теорию. Для целей настоящего исследования нет необходимости ограничиваться Σ-определениями; единственным ограничением являются счетность языка модели $\mathfrak{M}$ и счетность языка определимой модели.

Теорема о спуске (теорема Левенгейма-Скулема) легко будет следовать из следующего несложного факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если* $\mathfrak{h} \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{h}$ *- элементарная подмодель* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$), *то* $\mathfrak{h}$ *имеет вид* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')$ *для подходящей модели* $\mathfrak{M}' \preccurlyeq \mathfrak{M}$. □

Следующее утверждение является следствием теоремы Карп (теорема 9.10 в [3]) и того, что $\mathbb{HF}$-язык является частью языка $L_{\omega_1,\omega}$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (93-011-1506).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* $\mathfrak{M}_0$ *и* $\mathfrak{M}_1$ - ω*-насыщенные модели. Если* $\mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{M}_1$, *то* $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0) \equiv \mathrm{HF}(\mathfrak{M}_1)$; *если* $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1$, *то* $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathrm{HF}(\mathfrak{M}_1)$. □

Модель $\mathfrak{M}_0$ назовем *достаточно насыщенной*, если существует ω-насыщенная модель $\mathfrak{M}_1$ такая, что $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1$ и $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathrm{HF}(\mathfrak{M}_1)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $\mathfrak{M}_0$ *и* $\mathfrak{M}_1$ - *достаточно насыщенные модели. Если* $\mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{M}_1$, *то* $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0) \equiv \mathrm{HF}(\mathfrak{M}_1)$; *если* $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1$, *то* $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathrm{HF}(\mathfrak{M}_1)$.

Оно легко вытекает из определения, предложения 2 и существования ω-насыщенных моделей. □

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Во всякой достаточно насыщенной модели $\mathfrak{M}$ реализуется всякий (не обязательно полный) арифметический тип из формул с ограниченным числом перемен кванторов над конечным $M_0 \subseteq |\mathfrak{M}|$. Является ли это условие эквивалентным достаточной насыщенности, автору неизвестно.

2. Любая полная теория (счетного языка) T с бесконечными моделями имеет счетную достаточно насыщенную модель. Это следует из теоремы Левенгейма-Скулема, предложения 1 и существования ω-насыщенных моделей теории T.

Всякая полная категоричная теория T имеет достаточно много ω-насыщенных моделей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если* T *полна и* ω*-категорична, то любая модель теории* T ω*-насыщенна. Если* T *полна и* ω_1*-категорична, то всякая несчетная модель теории* T *насыщенна* (тем более ω-насыщенна).

Первая часть предложения легко следует из теоремы Рылль-Нардзевского о характеризации ω-категоричных теорий (см. теорему 2.3.13 из [4]), а именно из того, что имеется конечное число типов над любым конечным множеством. Вторая часть хорошо известна (см., например, следствие 7.1.15 в [4]). □

ЗАМЕЧАНИЕ. Для ω_1-категоричных теорий не всякая счетная модель является достаточно насыщенной. Например, справедлив следующий факт.

Пусть $\mathbf{T}$ *- теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0. Если* $\mathbf{F}_0\ \mathbf{F}_1 \models \mathbf{T}$ *, то* $\mathrm{HF}(\mathbf{F}_0) \equiv \mathrm{HF}(\mathbf{F}_1)$ *тогда и только тогда, когда либо* $\mathbf{F}_0$ *и* $\mathbf{F}_1$ *имеют бесконечную степень трансцендентности над* $\mathbf{Q}$*, либо степени трансцендентности* $\mathbf{F}_0$ *и* $\mathbf{F}_1$ *над* $\mathbf{Q}$ *конечны и равны.*

Пусть $n \in \omega$; полагаем $\mathfrak{h}_n \leftrightharpoons \mathrm{HF}(n(=\{i \mid i \in n\}))$;
$\mathfrak{h}_0 = \mathrm{HF}(\emptyset) \subseteq \mathfrak{h}_1 \subseteq \ldots$; $\bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{h}_n = \mathrm{HF}(\omega)$. Для любых $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathfrak{h}_n$, $\bar{m} \in M^n$ определим элемент $\varkappa(\bar{m}) \in \mathrm{HF}(M)$ следующим образом: пусть $\lambda_{\bar{m}} : n \to M$ определено так: $\lambda_{\bar{m}}(i) = m_i$, $i < n$, где $\bar{m} = \langle m_0, \ldots, m_{n-1} \rangle$; отображение $\lambda_{\bar{m}}$ однозначно продолжается до отображения $\lambda^{\omega}_{\bar{m}} : \mathfrak{h}_n = \mathrm{HF}(n) \to \mathrm{HF}(M)$, так что $\lambda^{\omega}_{\bar{m}}(\{a_0, \ldots, a_k\}) \leftrightharpoons \{\lambda^{\omega}_{\bar{m}}(a_0), \ldots, \lambda^{\omega}_{\bar{m}}(a_k)\}$ для любого множества (не праэлемента) $\{a_0, \ldots, a_k\} \in \mathrm{HF}(n)$; тогда $\varkappa(\bar{m}) = \lambda^{\omega}_{\bar{m}}(\varkappa)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *- достаточно насыщенная модель. Если* $h_0, h_1 \in \mathrm{HF}(\mathfrak{M})$*, то типы* $t_{\mathrm{HF}(\mathfrak{M})}(h_0)$, $t_{\mathrm{HF}(\mathfrak{M})}(h_1)$ *этих элементов в* $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ *совпадают тогда и только тогда, когда существуют* $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathfrak{h}_n$, $\bar{m}_0, \bar{m}_1 \in M^n$ *такие, что* $h_0 = \varkappa(\bar{m}_0)$, $h_1 = \varkappa(\bar{m}_1)$ *и* $t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0) = t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $h_0, h_1 \in \mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ и $t_{\mathrm{HF}(\mathfrak{M})}(h_0) = t_{\mathrm{HF}(\mathfrak{M})}(h_1)$. Пусть $\mathrm{supp}\ h_0$ - носитель h_0 - имеет n элементов и $\mathrm{supp}\ h_0 =$

$= \{m_0^0, \dots, m_{n-1}^0\}$; тогда легко видеть, что носитель h_1 также имеет n элементов и что существует $\varkappa \in \mathfrak{h}_n$ такой, что $h_0 = \varkappa(\bar{m}_0^0)$, $\bar{m}_0 \leftrightharpoons \langle m_0^0, \dots, m_{n-1}^0 \rangle$ и $h_1 = \varkappa(\bar{m}_1)$ для подходящего $\bar{m}_1 = \langle m_0^1, \dots, m_{n-1}^1 \rangle$ такого, что $\operatorname{supp} h_1 = \{m_0^1, \dots, m_{n-1}^1\}$. Более того, для любой формулы $\varphi(\bar{x}) \in t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0)$ существует перестановка $\sigma \in S_n$ множества n такая, что $\varphi(\bar{x}) \in t_{\mathfrak{M}}(\sigma(\bar{m}_1))$, где $\sigma(\bar{m}_1) \leftrightharpoons \langle m^1_{\sigma(0)}, \dots, m^1_{\sigma(n-1)} \rangle$ и $h_1 = \varkappa(\sigma(\bar{m}_1))$. Но тогда существует $\sigma \in S_n$ такая, что $h_1 = \varkappa(\sigma(\bar{m}_1))$ и $t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0) = t_{\mathfrak{M}}(\sigma(\bar{m}_1))$. Действительно, если такой σ не существует, то для любой $\sigma \in S_n$ такой, что $h_1 = \varkappa(\sigma(\bar{m}_1))$, существует $\varphi_\sigma(\bar{x}) \in t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0)$ такая, что $\varphi_\sigma(\bar{x}) \notin t_{\mathfrak{M}}(\sigma(\bar{m}_1))$; пусть $\varphi(\bar{x}) \leftrightharpoons \bigwedge\limits_{\sigma \in S_n^{\varkappa}} \varphi_\sigma(\bar{x})$, где $S_n^{\varkappa} \leftrightharpoons \{\sigma \mid \sigma \in S_n, \ \varkappa(\sigma(\bar{m}_1)) = h_1\}$; так как $\varphi_\sigma(\bar{x}) \in t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0)$ для всех $\sigma \in S_n^{\varkappa}$, то $\varphi(\bar{x}) \in t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0)$. По отмеченному выше существует $\sigma_0 \in S_n^{\varkappa}$ такая, что $\varphi(\bar{x}) \in t_{\mathfrak{M}}(\sigma_0(\bar{m}_1))$; но тогда и $\varphi_{\sigma_0}(\bar{x}) \in t_{\mathfrak{M}}(\sigma_0(\bar{m}_1))$; противоречие. Итак, существует $\sigma \in S_n^{\varkappa}$ такая, что $t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0) = t_{\mathfrak{M}}(\sigma(\bar{m}_1))$ и $h_1 = \varkappa(\sigma(m_1))$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $\varkappa \in \mathfrak{h}_n$, $\bar{m}_0, \bar{m}_1 \in M^n$ и $t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0) = t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_1)$.

Используя предложения 5.1.7(ii) и 5.1.8 из [4], найдем элементарное расширение $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$, которое является специальной моделью. Так как $\mathfrak{M}'$ ω-насыщенна, то $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}) \preccurlyeq \mathrm{HF}(\mathfrak{M}')$. Тогда $t_{\mathfrak{M}'}(\bar{m}_0) = t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_0) = t_{\mathfrak{M}}(\bar{m}_1) = t_{\mathfrak{M}'}(\bar{m}_1)$ и из специальности $\mathfrak{M}'$ следует существование автоморфизма φ модели $\mathfrak{M}'$ такого, что $\varphi(\bar{m}_0) = \bar{m}_1$; продолжим φ до автоморфизма φ^{ω} модели $\mathfrak{H} = \mathrm{HF}(\mathfrak{M}')$; тогда $\varphi^{\omega}(\varkappa(\bar{m}_0)) = \varkappa(\varphi^{\omega}(\bar{m}_0)) = \varkappa(\varphi(\bar{m}_0)) = \varkappa(\bar{m}_1)$; следовательно, $t_{\mathfrak{H}}(\varkappa(\bar{m}_0)) = t_{\mathfrak{H}}(\varkappa(\bar{m}_1))$ и $t_{\mathrm{HF}(\mathfrak{M})}(\varkappa(\bar{m}_0)) = t_{\mathfrak{H}}(\varkappa(\bar{m}_0)) = t_{\mathfrak{H}}(\varkappa(\bar{m}_1)) = t_{\mathrm{HF}}(\varkappa(\bar{m}_1))$. □

Обратимся теперь к изучению мощности определимых множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ α-насыщенна; если бесконечное множество S определимо в $\mathfrak{M}$, то $|S| \geq \alpha$.*

Пусть $\varphi_0(\bar{x},\bar{m})$, $\varphi_1(\bar{x},\bar{y},\bar{m})$ - формулы, определяющие S в $\mathfrak{M}$; $\bar{x} = x_0,\ldots,x_{n-1}$; $\bar{y} = y_0,\ldots,y_{n-1}$; $\bar{m} \in M^k$; $T \leftrightharpoons \{\bar{a} \mid \bar{a} \in M^n,\ \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a},\bar{m})\}$; $\delta \leftrightharpoons \{\langle \bar{a},\bar{b}\rangle \mid \bar{a},\bar{b} \in M^n,\ \mathfrak{M} \models \varphi_0(\bar{a},\bar{m}) \wedge \varphi_0(\bar{b},\bar{m}) \wedge \varphi_1(\bar{a},\bar{b},\bar{m})\}$ - отношение эквивалентности на T и $S = T/\delta$.

Рассмотрим множество констант c^i_β, $\beta < \alpha$, $i < n$, и следующее множество предложений:

$$\{\varphi_0(\bar{c}_\beta,\bar{m}) \mid \beta<\alpha\} \cup \{\neg\varphi_1(\bar{c}_{\beta_0},\bar{c}_{\beta_1},\bar{m}) \mid \beta_0 < \beta_1 < \alpha\},$$

где $\bar{c}_\beta = c^0_\beta,\ldots,c^{n-1}_\beta$, $\beta < \alpha$. Это множество предложений выполнимо на $\mathfrak{M}$ на некоторых наборах $\bar{d}_\beta \in M^n$, $\beta < \alpha$, так как оно локально выполнимо (S бесконечно), а

$\mathfrak{M}$ α-насыщенна. Но тогда

$$\bar{d}_\beta \in T,\ \beta < \alpha;\quad \langle \bar{d}_{\beta_0}, \bar{d}_{\beta_1} \rangle \notin \delta,$$

$$[\bar{d}_{\beta_0}]_\delta \neq [\bar{d}_{\beta_1}]_\delta$$

для $\beta_0 < \beta_1 < \alpha$ и $|S| \geq \alpha = |\{[\bar{d}_\beta]_\delta \mid \beta < \alpha\}|$. □

Пусть множество S определимо в модели вида $HF(\mathfrak{M})$ формулами $\varphi_0(\bar{x},\bar{m})$, $\varphi_1(\bar{x},\bar{y},\bar{m})$ (заметим, что, не уменьшая общности, можно считать параметрами набор праэлементов $\bar{m} \in M^k$, а теоретико-множественные конструкции в $HF(\mathfrak{M})$ позволяют ограничиться случаем, когда $n = 1$, т.е. $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$). С любыми $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathcal{F}_n$ свяжем множества $T_\varkappa \rightleftharpoons \{\bar{a} \mid \bar{a} \in M^n,\ HF(\mathfrak{M}) \models \varphi_0(\varkappa(\bar{a}),\bar{m})\}$, $S_\varkappa \rightleftharpoons \{\varkappa(\bar{a}) \mid \bar{a} \in T_\varkappa\}/$ $/\delta \restriction \{\varkappa(\bar{a}) \mid \bar{a} \in T_\varkappa\}^2$ и отношение $\delta_\varkappa \rightleftharpoons \{\langle \bar{a},\bar{b}\rangle \mid \bar{a},\bar{b} \in T_\varkappa$ $HF(\mathfrak{M}) \models \varphi_1(\varkappa(\bar{a}),\varkappa(\bar{b}),\bar{m})\}$. Тогда $S_\varkappa \subseteq S$, $\delta_\varkappa$ - отношение эквивалентности на $T_\varkappa$ и $|S_\varkappa| = |T_\varkappa/\delta_\varkappa|$. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ достаточно насыщенна, то из теоремы 1 следует, что множество $T_\varkappa$ и отношение $\delta_\varkappa$ замкнуты относительно типов над $\bar{m}$, т.е. если $\bar{a} \in T_\varkappa$, $\bar{a}' \in M^n$ и $t_{(\mathfrak{M},\bar{m})}(\bar{a}) = t_{(\mathfrak{M},\bar{m})}(\bar{a}')$, то $\bar{a}' \in T_\varkappa$, и если $\langle \bar{a},\bar{b}\rangle \in \delta_\varkappa$, $t_{(\mathfrak{M},\bar{m})}(\bar{a},\bar{b}) = t_{(\mathfrak{M},\bar{m})}(\bar{a}',\bar{b}')$ для некоторых $\bar{a}',\bar{b}' \in M^n$, то $\langle \bar{a}',\bar{b}'\rangle \in \delta_\varkappa$. Отметим также очевидное соотношение

$$S = \bigcup_n \bigcup_{\varkappa \in \mathcal{F}_n} S_\varkappa = \bigcup_{\varkappa \in HF(\omega)} S_\varkappa .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть* $\alpha > \omega$, $\mathfrak{M}$ *−* α*-насыщенная модель, имеющая* ω*-категоричную теорию. Если множество* S *определимо в* $HF(\mathfrak{M})$, *то либо для любого* $\varkappa \in HF(\omega)$ *множество* $S_\varkappa$ *конечно, либо* $|S| \geq \alpha$.

Пусть S бесконечно для некоторых $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathfrak{h}_n$; тогда и $T_\varkappa / \delta_\varkappa$ бесконечно. Как отмечено выше, множество $T_\varkappa$ и отношение $\delta_\varkappa$ замкнуты относительно типов над $\bar{m}$. Модель $Th(\mathfrak{M})$ ω-категорична и, следовательно, имеет лишь конечное число $(n+1)$-типов и $(2n+1)$-типов; отсюда следует, что множества $T_\varkappa$ и $\delta_\varkappa$ формульны над $\mathfrak{M}$, но тогда по предложению 4 имеем $|T_\varkappa / \delta_\varkappa| \geq \alpha$. Итак, имеем $|S| \geq |S_\varkappa| = |T_\varkappa / \delta_\varkappa| \geq \alpha$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть* $\alpha > \omega$, $\mathfrak{M}$ *−* α*-насыщенная модель, имеющая* ω*-стабильную теорию. Если несчетное множество* S *определимо в* $HF(\mathfrak{M})$, *то* $|S| \geq \alpha$.

Так как $|S| > \omega$, $S = \bigcup\limits_{\varkappa \in HF(\omega)} S_\varkappa$ и $|HF(\omega)| = \omega$, то существуют $n \in \omega$ и $\varkappa \in \mathfrak{h}_n$ такие, что $|S_\varkappa| > \omega$. Выберем последовательность $\bar{a}_\beta \in M^n$, $\beta < \alpha$, такую, что $K = \{\bar{a}_\beta \mid \beta < \omega_1\} \subseteq T_\varkappa$, $\langle \bar{a}_{\beta_0}, \bar{a}_{\beta_1} \rangle \notin \delta_\varkappa$ для всех $\beta_0 < \beta_1 < \omega_1$. Из доказательства теоремы 7.1.23 из [4] следует, что в модели $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ можно выбрать тотально неразличимое подмножество $K' \subseteq K$ мощности ω_1. Не уменьшая общности будем считать, что $K' = K$. Используя α-насыщенность $\mathfrak{M}$, можно расширить K до тотально неразличимого множества $K_\alpha = \{\bar{a}_\beta \mid \bar{a}_\beta \in M^n, \ \beta < \alpha\}$ мощности α. Тогда для любых $\beta_0 < \beta_1 < \alpha$ имеем $t_{(\mathfrak{M}, \bar{m})}(\bar{a}_{\beta_0}, \bar{a}_{\beta_1}, \bar{m}) = t_{(\mathfrak{M}, \bar{m})}(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{m})$ и, следовательно, по теореме 1, $HF(\mathfrak{M}) \models \neg\varphi_1(\varkappa(\bar{a}_{\beta_0})\varkappa(\bar{a}_{\beta_1}), \bar{m})$, так как

$HF(\mathfrak{M}) \models \neg\varphi_1(\varkappa(\bar{a}_0), \varkappa(\bar{a}_1)\, \bar{m}),\qquad \langle \bar{a}_0, \bar{a}_1\rangle \notin \delta_\varkappa$;
кроме того, очевидно, что $\bar{a}_\beta \in T_\varkappa$ (так как $t_{(\mathfrak{M},\bar{m})}(\bar{a}_\beta, \bar{m}) = t_{(\mathfrak{M},\bar{m})}(\bar{a}_0, \bar{m})$ и $\bar{a}_0 \in T_\varkappa$). Тогда $\alpha = |K_\alpha/\delta_\varkappa \restriction K_\alpha^2| \le |T_\varkappa/\delta_\varkappa| = |S_\varkappa| \le |S|$. □

ТЕОРЕМА 2 (теорема Левенгейма-Скулема-Мальцева). *Пусть* T *- полная* ω*-категоричная или* ω*-стабильная теория,* $\mathfrak{M}$ *- достаточно насыщенная модель* T *и несчетная модель* $\mathfrak{N}$ *определима в* $HF(\mathfrak{M})$ *. Тогда для любых бесконечных кардиналов* α *и* β *таких, что* $\alpha \le \|\mathfrak{N}\| \le \beta$, *существуют достаточно насыщенные модели* $\mathfrak{M}_\alpha$ *и* $\mathfrak{M}_\beta$ *теории* T *такие, что* $\mathfrak{M}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{M}_\beta$; $\mathfrak{M}_\alpha$ *содержит параметры из* $\mathfrak{M}$ *, используемые в определении* $\mathfrak{N}$ *; если* $\mathfrak{N}_\alpha$ *и* $\mathfrak{N}_\beta$ *- это модели, определяемые в* $HF(\mathfrak{M}_\alpha)$ *и* $HF(\mathfrak{M}_\beta)$ *соответственно теми же формулами и параметрами, что и* $\mathfrak{N}$ *в* $HF(\mathfrak{M})$ *, то* $\|\mathfrak{N}_\alpha\| = \alpha$, $\|\mathfrak{N}_\beta\| = \beta$.

Существование нужной модели $\mathfrak{M}_\alpha$ сразу вытекает из обычной теоремы Левенгейма-Скулема и предложения 1; причем $\mathfrak{M}_\alpha$ можно выбрать таким, что $\|\mathfrak{M}_\alpha\| = \alpha$. Далее, выбирая β-насыщенное элементарное расширение $\mathfrak{M}'_\beta$ модели $\mathfrak{M}$, имеем $HF(\mathfrak{M}) \preccurlyeq HF(\mathfrak{M}'_\beta)$ и, если $\mathfrak{N}'_\beta$ определима в $HF(\mathfrak{M}'_\beta)$ теми же формулами и параметрами, что и $\mathfrak{N}$ в $HF(\mathfrak{M})$, то по предложениям 5 и 6 будем иметь $\|\mathfrak{N}'_\beta\| \ge \beta$. Опять применяя обычную теорему Левенгейма-Скулема и предложение 1, можно найти такую элементарную подмодель $HF(\mathfrak{M}_\beta) \preccurlyeq HF(\mathfrak{M}'_\beta)$, что $\mathfrak{M}_\alpha \le \mathfrak{M}_\beta$ (тогда и $\mathfrak{M}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{M}_\beta$), $\|\mathfrak{M}_\beta\| = \beta$ и $\|\mathfrak{N}_\beta\| = \beta$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Если T - ω_1-категорична, то можно выбрать $\mathfrak{M}_\beta$ такой, что $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{M}_\beta$. Можно ли всегда выбрать так $\mathfrak{M}_\beta$, автору неизвестно.

Трудность в нахождении $\mathfrak{M}_\beta$ как расширения $\mathfrak{M}$ состоит в том, что мощность $\mathfrak{N}$ (хотя и большая ω) может быть строго меньше мощности $\mathfrak{M}$.

Автор благодарен Е.А.Палютину, замечания которого способствовали значительному улучшению первоначального текста.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-определимость в допустимых множествах //Докл.АН СССР, 1985. - Т.285, № 4. - С. 792-795.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

3. КЕЙСЛЕР Х.Дж. Основы теории моделей //Справочная книга по мат.логике. Часть 1. - М.: Наука. - 1982. - С. 55-108.

4. КЕЙСЛЕР Г., ЧЭН Ч.Ч. Теория моделей. - М.: Мир, 1977.

Поступила в ред.-изд.отд.

10 марта 1993 года