ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНФОРМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1993 год Выпуск 148

УДК 510.62:519.68

ЛОГИЧЕСКИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ И ОТНОШЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ НА НИХ*)

В.Ш. Гумиров

Введение

В связи с появлением необходимости построения сложных программных систем в последнее время происходят некоторое переосмысление подходов к технологии программирования, их модификация и создание новых концепций программирования. Одним из таких новых подходов является так называемое *доказательное программирование* [3,4]. Основная идея этого подхода заключается в том, чтобы соответствие программы поставленной задаче гарантировалось бы самим процессом создания программы.Под *гарантией* соответствия программы поставленной задаче здесь подразумевается наличие формального доказательства. При этом естественно возникает необходимость

1) в спецификациях, как способе записи постановок задач в формальных терминах;

2) в методах построения программ, реализующих принцип *правильность по построению.*

Самым известным в настоящее время методом формального специфицирования является,вероятно,VDM [5]. Он основан на идеях денотационной семантики. Но VDM имеет ряд недостатков [3], та-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (93-011-1506).

ких как отсутствие средств модульного специфицирования и отсутствие удовлетворительной математической семантики, что вызывает сложность понимания VDM-спецификаций и затрудняет использование теоретико-доказательных методов при рассуждениях о них.

В данной работе предлагается один вариант спецификации - Σ-спецификации, основанный на концепции семантического программирования, или Σ-программирования [1], который, как нам представляется, может служить отправной точкой для дальнейшего развития идей доказательного программирования в рамках этой концепции. Помимо этого вводятся понятия композиции спецификаций и отношения реализации на спецификациях. На основе предложенных понятий и свойств возможно, как нам кажется, создание формального исчисления для Σ-спецификаций, которое будет реализовывать идею постепенного уточнения спецификаций в процессе создания конечной программы.

1. Спецификации и модели

Модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сигнатура есть пара $\Sigma = \langle \mathrm{Sort}_\Sigma, \ \mathrm{Pred}_\Sigma \rangle$, где Sort_Σ - множество символов, обозначающих сорта сигнатуры Σ; Pred_Σ - множество функциональных и предикатных символов сигнатуры Σ.

Через $\Sigma_\emptyset$ мы будем обозначать сигнатуру, у которой $\mathrm{Sort}_{\Sigma_\emptyset} = \emptyset$, $\mathrm{Pred}_{\Sigma_\emptyset} = \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Σ_1, Σ_2 - сигнатуры, тогда

1. $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \langle \mathrm{Sort}_{\Sigma_1} \cup \mathrm{Sort}_{\Sigma_2}, \mathrm{Pred}_{\Sigma_1} \cup \mathrm{Pred}_{\Sigma_2} \rangle$;

2. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \langle \mathrm{Sort}_{\Sigma_1} \cap \mathrm{Sort}_{\Sigma_2}, \mathrm{Pred}_{\Sigma_1} \cap \mathrm{Pred}_{\Sigma_2} \rangle$;

3. $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \Leftrightarrow \mathrm{Sort}_{\Sigma_1} \subset \mathrm{Sort}_{\Sigma_1}, \mathrm{Pred}_{\Sigma_1} \subset \mathrm{Pred}_{\Sigma_2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Моделью $\mathcal{M}$ сигнатуры Σ называется пара $\langle (M_s)_{s \in Sort_\Sigma}, P \rangle$, где M_s - основное множество сорта $s \in Sort_\Sigma$; P - набор предикатов и функций модели $\mathcal{M}$.

<u>Σ-спецификации.</u>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Σ-спецификацией будем называть тройку

$$S = \langle Sch(S),\ SigIn(S),\ SigOut(S) \rangle ,$$

где Sch(S) - Σ-схема Σ-спецификации S; SigIn(S) - входная сигнатура Σ-спецификации S; SigOut(S) - выходная сигнатура Σ-спецификации S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть S - Σ-схема, тогда через Sig(S) будем обозначать сигнатуру Σ-схемы S такую, что $Sort_{Sig(S)}$ - множество всех сортов, встречающихся в Σ-схеме S; $Pred_{Sig(S)}$ - множество всех предикатных и функциональных символов, встречающихся в Σ-схеме S.

С каждой Σ-спецификацией S мы будем связывать еще ряд понятий и обозначений:

Sig(S) - сигнатура Σ-спецификации S, причем $Sig(S) = SigIn(S) \cup SigOut(S) \cup Sig(Sch(S))$;

$SigDef(S) \subset Sig(Sch(S))$ - сигнатура определяемых символов Σ-схемы Sch(S), причем всегда $Sort_{SigDef(S)} = \emptyset$;

SigBase(S) - базовая сигнатура Σ-схемы Sch(S);

SigPar(S) - сигнатура параметров Σ-схемы Sch(S), причем всегда

$$Sort_{SigPar(S)} = \emptyset;$$

$OutSort(S) = Sort_{SigOut(S)}$.

При этом

$$SigBase(S) \cap SigPar(S) = \Sigma_\emptyset,$$

$$SigIn(S) = SigBase(S) \cup SigPar(S),$$

$$SigDef(S) \cap SigIn(S) = \Sigma_{\emptyset}.$$

С каждой Σ-спецификацией S мы будем связывать также еще два понятия. Во-первых, это означивание символов из SigBase(S), под которым мы будем понимать отображение, ставящее в соответствие каждой модели $\mathcal{M}$ такой, что $Sig(\mathcal{M}) = SigBase(S)$, и каждому предикатному (функциональному) символу $P \in SigBase(S)$ предикат (функцию) $P^{\mathcal{M}}$ на модели $\mathcal{M}$. При этом должны выполняться естественные требования на согласованность типов и местности. Такое отображение мы будем обозначать $VBase_S$.

Во-вторых, это означивание параметров Σ-схемы Sch(S), т.е. символов из $Pred_{SigPar(S)}$. Как и в предыдущем случае, это отображение $VPar_S$, ставящее в соответствие каждой модели $\mathcal{M}$ такой, что $Sig(\mathcal{M}) = SigBase(S)$, и каждому предикатному (функциональному) символу $P \in SigPar(S)$ предикат (функцию) $P^{\langle \mathcal{M}, HW(\mathcal{M})\rangle}$ на модели $\langle \mathcal{M}, HW(\mathcal{M})\rangle$. При этом должны выполняться естественные требования на согласованность типов и местности.

Последние два введенных понятия позволяют нам определить модель, задаваемую парой $\langle S, \mathcal{M}\rangle$, где S - некоторая Σ-спецификация, $\mathcal{M}$ - модель такая, что $Sig(\mathcal{M}) = SigBase(S)$.

<u>Задание модели Σ-спецификацией и базовой моделью.</u>

Рассмотрим Σ-спецификацию S и модель $\mathcal{M}$ сигнатуры SigBase(S).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Интерпретацией предикатных (функциональных) символов из сигнатуры Sig(S) на паре $\langle S, \mathcal{M}\rangle$ будем называть такое отображение $I\langle S, \mathcal{M}\rangle$ из множества Sig(S) в $2^{|\mathcal{M}| \cup |HW|(\mathcal{M})|}$, что

1) если $P \in SigDef(S)$, тогда

$$I\langle S, \mathcal{M}\rangle(P) = LEP(\Gamma\langle Sch(S)\rangle(\xi))(P),$$

где $(\Gamma\langle Sch(S)\rangle(\xi))$ - оператор, определенный в [2], ξ - интерпретация параметров схемы Sch(S), определяемая отображением $\mathrm{VPar}\langle S, \mathcal{M}\rangle$;

2) если $P \in \mathrm{SigBase}(S)$, то

$$I\langle S,\mathcal{M}\rangle (P) = \mathrm{VBase}\langle S, \mathcal{M}\rangle(P);$$

3) если $P \in \mathrm{SigPar}(S)$, то

$$I\langle S,\mathcal{M}\rangle (P) = \mathrm{VPar}\langle S, \mathcal{M}\rangle (P).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Следуя [2], будем говорить, что модель $\mathcal{N}$ сигнатуры SigOut(S) Σ^+-транслируема спецификацией S в модель $\mathcal{M}$, если

1) для всех сортов $s \in \mathrm{Out\,Sort}(S)$ существуют такие символы

$$X_s, \Theta_s \in \mathrm{Pred}_{\mathrm{Sig}(S)} \setminus \mathrm{Pred}_{\mathrm{SigOut}(S)},$$

что $I\langle S,\mathcal{M}\rangle (X_s) \subseteq |\mathcal{M}| \cup |\mathrm{HW}(\mathcal{M})|$; $I\langle S, \mathcal{M}\rangle (\Theta_s) \subseteq (|\mathcal{M}| \cup |\mathrm{HW}(\mathcal{M})|)^2$; причем $I\langle S, \mathcal{M}\rangle (\Theta_s)$ задает отношение эквивалентности на множестве $I\langle S, \mathcal{M}\rangle (X_s)$;

2) $\Theta = (I\langle S, \mathcal{M}\rangle (\Theta_s))_{s\in \mathrm{Out\,Sort}(S)}$ является отношением конгруэнтности на

$$\mathcal{N}_0 = \langle (I\langle S, \mathcal{M}\rangle (\Theta_s))_{s\in \mathrm{Out\,Sort}(S)}, (I\langle S,\mathcal{M}\rangle (P))_{P\in \mathrm{Pred}_{\mathrm{SigOut}(S)}}\rangle;$$

3) модель $\mathcal{N}_0 / \Theta$ изоморфна модели $\mathcal{N}$.

Этот факт будем обозначать $\mathcal{N} = \langle S, \mathcal{M}\rangle$.

2. Операции со спецификациями

В этом пункте мы рассмотрим некоторые операции над Σ-спецификациями, которые впоследствии позволят нам определить понятие отношения реализации (уточнения) на спецификациях.

<u>Сужение выходной сигнатуры.</u>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть S - некоторая Σ-спецификация, Σ-сигнатура такая, что $\Sigma \subseteq \mathrm{SigOut}(S)$. Тогда $S|_\Sigma$ будет обозначать

спецификацию, полученную из S изменением выходной сигнатуры, т.е. $S|_{\Sigma}$ отличается от S только тем, что $SigOut(S|_{\Sigma}) = \Sigma$.

Композиция Σ-спецификаций.

Пусть S_1, S_2 - Σ-спецификации такие, что $SigOut(S_2) = SigBase(S_1)$; $Sig(S_1) \cap Sig(S_2) = SigOut(S_2)$. В этом случае можно определить спецификацию, которую мы будем называть композицией спецификаций S_1 и S_2 и обозначать $S_1 \circ S_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Композиция $S_1 \circ S_2$ спецификаций S_1 и S_2 получается из S_1 и S_2 по следующим правилам:

1) $SigBase(S_1 \circ S_2) = SigBase(S_2)$;

2) $SigPar(S_1 \circ S_2) = SigPar(S_2)$, т.е. $SigIn(S_1 \circ S_2) = SigIn(S_2)$;

3) $SigOut(S_1 \circ S_2) = SigOut(S_1)$;

4) $Sch(S_1 \circ S_2) = Sch(S_1) \cup Sch(S_2) \cup DefPar(S_1)$, где $DefPar(S_1)$ - набор Σ-определений параметров Σ-схемы $Sch(S_1)$;

5) означивание символов из $SigBase(S_1 \circ S_2)$ и $SigPar(S_1 \circ S_2)$ в спецификации $S_1 \circ S_2$ совпадает с означиванием этих символов в спецификации S_2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть* $\mathcal{N} = \langle S_0, \mathcal{N}_0 \rangle$, $\mathcal{N}_2 = \langle S_1, \mathcal{N}_1 \rangle$. *Тогда* $\mathcal{N}_2 = \langle S_1 \circ S_2, \mathcal{N}_0 \rangle$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $S = (N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_n); \overline{v}, \overline{P}, \overline{F})$ - *Σ-схема*, α_{n+1} - *еще одно Σ-определение такое, что* $N(\alpha_{n+1}) \notin Sig(S)$; $S_1 = (N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_n), N(\alpha_{n+1}); \overline{v}, \overline{P}, \overline{F})$ - *Σ-схема, полученная из* S *добавлением определения* α_{n+1}. *Тогда*

$$LFP(\Gamma \langle S_1 \rangle (\xi))|_{\langle N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha) \rangle} = LEP(\Gamma \langle S \rangle (\xi))$$

для любой интерпретации ξ *параметров* $\overline{v}, \overline{P}, \overline{F}$ *схемы* S.

Заметим, что

$$\mathrm{LFP}(\Gamma\langle S_1\rangle(\xi)) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Gamma\langle S_1\rangle^k(\xi)\langle\emptyset,\dots,\emptyset\rangle .$$

Через Q_k^i или $\Gamma\langle S_1,i\rangle^k(\xi)\langle\emptyset,\dots,\emptyset\rangle$ будем обозначать i-ю компоненту $\Gamma\langle S_1\rangle^k(\xi)\langle\emptyset,\dots,\emptyset\rangle$. Известно, что оператор Γ является монотонным относительно отношения $\sqsubseteq$ *). Таким образом,

$$\langle Q_k^1,\dots,Q_k^{n+1}\rangle \sqsubseteq \langle\Gamma\langle S_1,1\rangle(\xi)\langle Q_{k-1}^1\rangle,\dots$$
$$\dots,\Gamma\langle S_1,n+1\rangle(\xi)\langle Q_{k-1}^{n+1}\rangle\rangle .$$

Тогда

$$\mathrm{LFP}(\Gamma\langle S_1\rangle(\xi)) = \langle\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\Gamma\langle S_1,1\rangle^k(\xi)\langle\emptyset\rangle,\dots$$
$$\dots,\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\Gamma\langle S_1,n\rangle^k(\xi)\langle\emptyset\rangle,\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\Gamma\langle S_1,n+1\rangle^k(\xi)\langle\emptyset\rangle\rangle =$$
$$= \langle\mathrm{LFP}(\Gamma\langle S\rangle(\xi)),\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\Gamma\langle S_1,n+1\rangle^k(\xi)\langle\emptyset\rangle\rangle ,$$

поскольку

$$\mathrm{LFP}(\Gamma\langle S\rangle(\xi)) = \langle\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\Gamma\langle S_1,1\rangle^k(\xi)\langle\emptyset\rangle,\dots$$
$$\dots,\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\Gamma\langle S_1,n\rangle^k(\xi)\langle\emptyset\rangle\rangle .$$

---

*) Определение отношения $\sqsubseteq$ и доказательство этого факта приводятся в [2].

Достаточно доказать, что не изменяется интерпретация символов из $SigOut(S_1)$ и предикатов, задающих сорты из $Sort_{SigOut(S_1)}$, так как

$$SigOut(S_1) = SigOut(S_1 \circ S_2).$$

Итак, пусть $P \in SigOut(S_1)$. Тогда

1) если $P \in SigPar(S_1 \circ S_0)$, то

$$SigPar(S_1 \circ S_0) = SigPar(S_0),$$

$$P \in SigBase(S_1)$$

и

$$I \langle S_1 \circ S_0, \mathcal{N}_0 \rangle (P) = VPar \langle S_0, \mathcal{N}_0 \rangle (P) =$$

$$= VBase \langle S_1, \mathcal{N}_1 \rangle (P) = I \langle S_1, \mathcal{N}_1 \rangle (P);$$

2) аналогично для $P \in SigBase(S_1 \circ S_0)$;

3) если $P \in SigDef(S_1 \circ S_0)$, то из леммы очевидно, что

$$I \langle S_1 \circ S_0, \mathcal{N}_0 \rangle (P) = I \langle S_1, \mathcal{N}_1 \rangle (P).$$

Если P - один из предикатов, определяющих сорта, тогда аналогично последнему пункту.

Конструктор спецификаций из Σ-определений.

Рассмотрим Σ-определение α: $N(\alpha)$ def $B(\alpha)$, $N(\alpha)$ - заголовок определения, $B(\alpha)$ - тело определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Через $Sig(\alpha)$ будем обозначать сигнатуру Σ-определения α.

Определим теперь операцию добавления новых определений к Σ-спецификации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть S - Σ-спецификация, α - Σ-определение, причем

$$N(\alpha) \notin Sig(S), (Sig(\alpha) \setminus N(\alpha)) \subseteq Sig(S).$$

Тогда $S \cup \alpha$ будет обозначать новую Σ-спецификацию, у которой:

$SigBase(S \cup \alpha) = SigBase(S)$;

$SigPar(S \cup \alpha) = SigPar(S)$;

$SigDef(S \cup \alpha) = \langle \emptyset, Pred_{SigDef(S)} \cup \{N(\alpha)\}\rangle$;

$SigOut(S \cup \alpha) = \langle Sort_{SigOut(S)}, Pred_{SigOut(S)} \cup \{N(\alpha)\}\rangle$;

$Sch(S \cup \alpha) = Sch(S) \cup \{\alpha\}$.

Рассмотрим сигнатуру Σ. Справедливо

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пустой спецификацией с базовой сигнатурой Σ будем называть спецификацию S, у которой

$Sch(S) = \emptyset$;

$SigBase(S) = \Sigma$;

$SigPar(S) = \emptyset$;

$SigOut(S) = \Sigma$.

Такую спецификацию будем обозначать $Spec^{\Sigma}_{\emptyset}$.

Пусть S – Σ-схема без параметров, состоящая из Σ-определений $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. Тогда через $Spec(S)$ будем обозначать спецификацию:

$$(\ldots((Spec^{Sig(S)}_{\emptyset} \cup \alpha_1) \cup \alpha_2)\ldots\alpha_n).$$

3. Отношение реализации

Отношение реализации на моделях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Будем говорить, что $\mathcal{N}$ реализуется в модели $\mathcal{M}$, и писать $\mathcal{N} \le \mathcal{M}$, если существует Σ-спецификация S такая, что $\mathcal{N} = \langle S, \mathcal{M}\rangle$.

СВОЙСТВО 1. Отношение $\le$ транзитивно.

Пусть $\mathcal{N}_1 \le \mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_2 \le \mathcal{M}$. Тогда существуют Σ-спецификации S_1 и S_2 такие, что $\mathcal{N}_1 = \langle S_1, \mathcal{N}_2\rangle$, $\mathcal{N}_2 = \langle S_2, \mathcal{M}\rangle$. Следовательно, по утверждению 1, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1 \circ S_2, \mathcal{M}\rangle$. Таким образом, $\mathcal{N}_1 \le \mathcal{M}$.

Заметим, что понятие отношения реализации на моделях эквивалентно в некотором смысле понятию Σ^+-транслируемости, определенному в [2].

Отношение реализации на Σ-спецификациях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть S_1, S_2 - Σ-спецификации. Будем говорить, что Σ-спецификации S_1 и S_2 эквивалентны, и писать $S_1 \equiv S_2$, если

1) $SigBase(S_1) = SigBase(S_2)$;

2) $SigOut(S_1) = SigOut(S_2)$;

3) для любой модели $\mathcal{M}$ такой, что $Sig(\mathcal{M}) = SigBase(S_1)$, выполняется $\langle S_1, \mathcal{M} \rangle = \langle S_2, \mathcal{M} \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Будем говорить, что Σ-спецификация S_1 реализует Σ-спецификацию S_2, и писать $S_1 \sqsubseteq S_2$, если

1) $SigBase(S_1) = SigBase(S_2)$;

2) существует такая Σ-спецификация S, что $S_1 \equiv S \circ S_2$.

СВОЙСТВО 2. Пусть S_1, S_2 и S_3 - Σ-спецификации такие, что определена спецификация $S_1 \circ (S_2 \circ S_3)$. Тогда определена спецификация $(S_1 \circ S_2) \circ S_3$, причем

$$(S_1 \circ S_2) \circ S_3 \equiv S_1 \circ (S_2 \circ S_3).$$

ЛЕММА 2. *Если модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ изоморфны, то для любой Σ-спецификации S такой, что определена пара $\langle S, \mathcal{M} \rangle$, будет определена и пара $\langle S, \mathcal{N} \rangle$, причем $\langle S, \mathcal{N} \rangle = \langle S, \mathcal{M} \rangle$.*

Очевидное следствие из определения пары.

Из утверждения 1 и леммы 2 получаем:

$$\langle S_1 \circ (S_2 \circ S_3), \mathcal{M} \rangle = \langle S_1, \langle S_2 \circ S_3, \mathcal{M} \rangle \rangle = \langle S_1, \langle S_2, \langle S_3, \mathcal{M} \rangle \rangle \rangle. \quad (1)$$

Аналогично

$$\langle (S_1 \circ S_2) \circ S_3, \mathcal{M} \rangle = \langle S_1, \langle S_2, \langle S_3, \mathcal{M} \rangle \rangle \rangle. \quad (2)$$

Из (1) и (2) очевидно свойство 2.

СВОЙСТВО 3. Отношение $\subseteq$ транзитивно.

Пусть S_1, S_2,S_3 - Σ-спецификации такие, что $S_1 \subseteq S_2$ и $S_2 \subseteq S_3$. Тогда по определению отношения $\subseteq$ существуют Σ-спецификации S' и S'' такие, что

$$S_1 \equiv S' \circ S_2,$$

$$S_2 \equiv S'' \circ S_3.$$

Из утверждения 1 и свойства 2 имеем:

$$S_1 \equiv S' \circ (S'' \circ S_3) \equiv (S' \circ S'') \circ S_3.$$

СВОЙСТВО 4. Пусть S - Σ-спецификация, $\Sigma_o = \mathrm{SigOut}(S)$,$\Sigma_1$ - некоторая сигнатура такая, что $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_o$. Тогда $S|_{\Sigma_1} \subseteq S$.

Очевидно, что $S|_{\Sigma_1} \equiv \mathrm{Spec}_{\emptyset}^{\Sigma_o}|_{\Sigma_1} \circ S$.

СВОЙСТВО 5. Пусть α - Σ-определение, S - Σ-спецификация, причем

$$N(\alpha) \notin \mathrm{Sig}(\alpha),$$

$$(\mathrm{Sig}(\alpha)\setminus N(\alpha)) \subseteq \mathrm{Sig}(S).$$

Тогда $S \subseteq S \cup \alpha$.

Из определений 11,14 и 8 очевидно $S \equiv (S \cup \alpha)|_{\mathrm{SigOut}(S)}$.

Іо свойству 4 получаем требуемое.

СВОЙСТВО 6. Отношение $\subseteq$ рефлексивно.

Так как $S \equiv \mathrm{Spec}_{\emptyset}^{\mathrm{SigOut}(S)} \circ S$, то $S \subseteq S$.

СВОЙСТВО 7. Если S_1, S_2 - Σ-спецификации такие, что $S_2 \equiv S_1 \circ S_2$,то $S_1 \equiv \mathrm{Spec}_{\emptyset}^{\Sigma}$, где $\Sigma = \mathrm{SigOut}(S_2)$.

Так как $S_2 \equiv S_1 \circ S_2$, то по определению 9 композиции Σ-спецификаций

$$\mathrm{SigBase}(S_1) = \Sigma, \tag{3}$$

$$\mathrm{SigOut}(S_1) = \mathrm{SigOut}(S_2) = \Sigma. \tag{4}$$

Из определения 4 Σ-спецификаций и формул (3),(4) имеем

$$\mathrm{Sig}(S_1) = \mathrm{SigPar}(S_1) \cup \mathrm{SigDef}(S_1) \cup \Sigma.$$

ЛЕММА 3. *Пусть* S - *Σ-спецификация такая, что*

$$\mathrm{SigOut}\,(S) = \mathrm{SigBase}(S) = \Sigma.$$

Тогда $S \equiv \mathrm{Spec}_{\emptyset}^{\Sigma}$.

Очевидно из определений 4,14,12.

По лемме 3, $S_1 \equiv \mathrm{Spec}_{\emptyset}^{\Sigma}$.

СВОЙСТВО 8. Пусть S_1, S_2, S_3 - Σ-спецификации такие, что

1) $S_1 \equiv S_2$;

2) определена композиция $S_1 \circ S_3$.

Тогда определена композиция $S_2 \circ S_3$, причем $S_2 \circ S_3 \equiv S_1 \circ S_3$.

1. $\mathrm{SigBase}(S_1 \circ S_3) = \mathrm{SigBase}(S_2 \circ S_3) = \mathrm{SigBase}(S_3)$.

2. Из свойства 6 $\mathrm{SigOut}\,(S_1 \circ S_3) = \mathrm{SigOut}\,(S_1)$ и $\mathrm{SigOut}\,(S_2 \circ S_3) = \mathrm{SigOut}\,(S_2)$.

Так как $S_1 \equiv S_2$, то $\mathrm{SigOut}\,(S_1) = \mathrm{SigOut}\,(S_2)$.

Следовательно, $\mathrm{SigOut}\,(S_1 \circ S_3) = \mathrm{SigOut}\,(S_2 \circ S_3)$.

3. Для любой модели $\mathcal{M}$ такой, что $\mathrm{Sig}(\mathcal{M}) = \mathrm{SigBase}(S_3)$, по свойству 1:

$$\langle S_1 \circ S_3, \mathcal{M}\rangle = \langle S_1, \langle S_3, \mathcal{M}\rangle\rangle = \langle S_2, \langle S_3, \mathcal{M}\rangle\rangle =$$
$$= \langle S_2 \circ S_3, \mathcal{M}\rangle$$

(из того, что $S_1 \equiv S_2$, и определения 14).

СВОЙСТВО 9. Пусть S_1, S_2, S_3 - Σ-спецификации такие, что 1) $S_1 \equiv S_2$; 2) определена композиция $S_3 \circ S_1$. Тогда определена композиция $S_3 \circ S_2$, причем $S_3 \circ S_2 \equiv S_3 \circ S_1$.

Доказательство аналогично доказательству свойства 8.

<u>Связь между отношениями реализации на моделях и Σ-спецификациях.</u>

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть* $\mathcal{M}_1 = \langle S', \mathcal{M}_2\rangle$, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1, \mathcal{M}_1\rangle$, $\mathcal{N}_2 = \langle S_2, \mathcal{M}_2\rangle$. *Тогда если* $S' \subseteq S_2$, *то* $\mathcal{N}_1 \le \mathcal{N}_2$.

Так как $S' \subseteq S_2$, то существует Σ-спецификация такая, что

$$S' \equiv S \circ S_2. \tag{5}$$

По условию, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1, \mathcal{M}_1 \rangle$. По лемме 2, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1, \langle S', \mathcal{M}_2 \rangle\rangle$. По свойству 1, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1 \circ S', \mathcal{M}_2 \rangle$. Из (5) и по свойству 9, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1 \circ (S \circ S_2), \mathcal{M}_2 \rangle$. По свойству 2, $\mathcal{N}_1 = \langle (S_1 \circ S) \circ S_2, \mathcal{M}_2 \rangle$. По свойству 1, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1 \circ S, \langle S_2, \mathcal{M}_2 \rangle\rangle$. И наконец, по лемме 2, $\mathcal{N}_1 = \langle S_1 \circ S, \mathcal{M}_2 \rangle$.

Заключение

Введенные в настоящей работе понятия, как нам видится, могли бы помочь в создании языка формального специфицирования, имеющего, помимо ясной математической семантики, средства последовательного уточнения спецификаций и модульной разработки спецификаций. При этом ясность математической семантики обеспечивалась бы тем, что понятие Σ-спецификации основывается на понятии Σ-схемы. Средства уточнения спецификаций могли бы основываться на отношении реализации для спецификаций, а средства для модульной разработки - на понятии композиции спецификаций.

Автор благодарит Д.И.Свириденко, С.В.Котова и С.С.Гончарова за постановку задачи и помощь при подготовке работы.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико-математические проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 107: Вычислительные системы. - С. 3-29.

2. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ^+-программы и их семантики //Логические методы в программировании. - Новосибирск, 1987. - Вып. 120: Вычислительные системы. - С. 24-51.

3. СВИРИДЕНКО Д.И. Проект СИГМА. Цели и задачи //Логические методы в программировании.-Новосибирск,1990. - Вып. 133: Вычислительные системы. - С. 68-94.

4. SCHERLIS W.L., SCOTT D.S. First steps towards inferential programming //IFIP'83. - Amsterdam,North-Holland. - 1983. - P. 199-212.

5. VDM - A formal method at work/Bjoerner D.,Jones C.D., McAirchinnigh M., Neohold E.J. (eds.) //Lecture Notes in Comput. Sci. - 1987. - N 252.

Поступила в ред.-изд.отд.

30 мая 1993 года